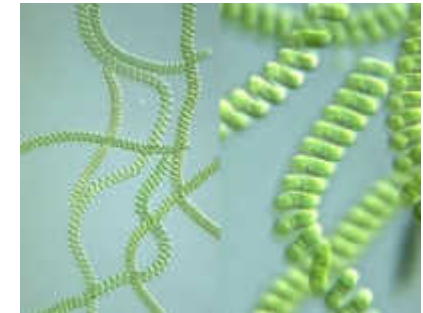


Transferts radiatifs dans les photobioréacteurs à éclairage interne



Jérémi Dauchet,

Jean-François Cornet, Stéphane Blanco, Richard Fournier, Mouna El Hafi



Université Blaise Pascal
Laboratoire de Génie
Chimique et Biochimique
(LGCB)

LABORATOIRE PLASMA ET CONVERSION D'ENERGIE
Groupe de Recherche Energétique, Plasmas, Hors Equilibre

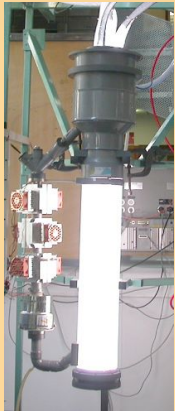
Sommaire

- Présentation des photobioréacteurs.
- Les micro-organismes photosynthétiques: la brique élémentaire d'un photobioréacteur.
- Optimum de la photosynthèse.
- Couplage et productivité.
- Propriétés optiques des micro-organismes.
- Résolution de l'équation du transfert radiatif dans une géométrie 1D.
 - Flux aux bords
 - Champs de radiation

Photobioréacteurs



- Principe: Mise en oeuvre de la **réaction de photosynthèse** via des catalyseurs biologiques: **micro-organismes** photosynthétiques.
- Intérêts: **Conversion du CO₂ et de l'eau en dioxygène et biomasse.**



- Régénération d'athmosphères.
- Valorisation de la biomasse: intermédiaires chimiques (biorafineries), vecteurs énergétiques (biocarburants, méthane, hydrogène).
- Objectifs: Réduction des **constantes de temps**.
Productivités élevées en surface de captation solaire (à partager avec l'agriculture et d'autres technologies solaires).

Micro-organisme photosynthétique

- La brique élémentaire d'un photobioréacteur:



Arthrospira platensis

- Le **photobioréacteur idéal** assure que chaque micro-organisme de la culture fonctionne à l'**optimum thermodynamique de la photosynthèse**.
 - Contrôle de l'apport en substrat chimique.
 - Contrôle de la quantité de photons absorbés.

Optimum de la photosynthèse

- Apport en substrats chimiques:
 - On peut toujours se placer dans des conditions où **l'apport en substrats chimiques n'est pas limitant**.
 - **Mélange parfait** dans un réacteur fermé permet un ajustement **optimum des concentrations en tout point de la culture**.
- Apport en photons:
 - Pour chaque micro-organisme: densité de photons (irradiance) optimale pour sa croissance.
 - La culture constitue un **milieu diffusant et absorbant**.
 - Densité de photons homogène, à la valeur optimale (milieu optiquement mince) ne correspond pas à un optimum du procédé.
 - **Les performances ne dépendent quasiment que du champs de radiation** qui est déterminé par les propriétés du milieu.

Couplage et productivité

- L'énergie photonique est diffusée et absorbée par les micro-organismes. L'**énergie absorbée est convertie** au cours de la réaction de photosynthèse.
- Productivité volumétrique locale en biomasse:

$$r_X(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) A(\vec{x})$$

- Densité volumétrique d'absorption:

$$A(\vec{x}) = K_a G(\vec{x}) = E_a C_X G(\vec{x})$$

- Rendement:

$$\Phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \bar{\phi}$$

Dissipation sur les antennes:

$$\rho(\vec{x}) = \rho_{MAX} \frac{K}{K + G(\vec{x})}$$

Conversion dans le schéma en Z:

Filtrage des fluctuations métaboliques

$$\bar{\phi} = \langle \phi \rangle = f(\langle A(\vec{x}) \rangle)$$

Couplage et productivité

- Productivité d'un photobioréacteur: **couplage non linéaire**

$$r_X(\vec{x}) = \rho_{MAX} \bar{\phi} E_a C_X \frac{K G(\vec{x})}{K + G(\vec{x})}$$

$$\langle r_X \rangle = \frac{\rho_{MAX} \bar{\phi} K E_a C_X}{V_{tot}} \int_{V_{tot}} \frac{G(\vec{x})}{K + G(\vec{x})} d\vec{x}$$

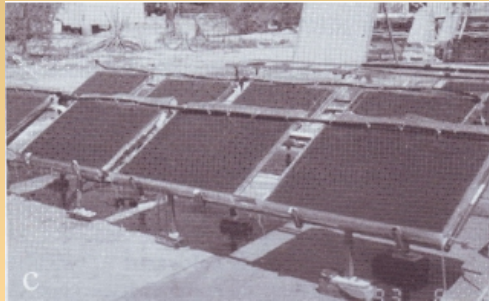
- L'évaluation de la productivité d'un photobioréacteur ainsi que son optimisation passent par la **détermination et l'analyse des champs radiatifs** qui sont *a priori* donnés par l'équation du **transfert radiatif** (ETR).
- Nécessité de la détermination des **propriétés optiques des micro-organismes** photosynthétiques.

Propriétés optiques

- Modèle:
 - Particules de symétrie de révolution orientées aléatoirement.
 - Teneur en pigments et distribution de tailles déterminées expérimentalement (source d'incertitude).
 - Résolution des équations de Maxwell (coordonnées sphériques): théorie de Lorenz-Mie généralisée (approximation de diffraction anormale).
- Données d'entrée de l'ETR:
 - Domaine d'absorption (visible 400-700 nm)
 - Surface efficace d'absorption (E_a)
 - Surface efficace de diffusion (E_s)
 - Fonction de phase (et paramètre d'asymétrie)

Résolution de L'ETR en 1D

- Lame éclairée par une face.
- **Photobioréacteurs plans:**



Photobioréacteur modulaire à inclinaison variable (Qiang et al., 1996)

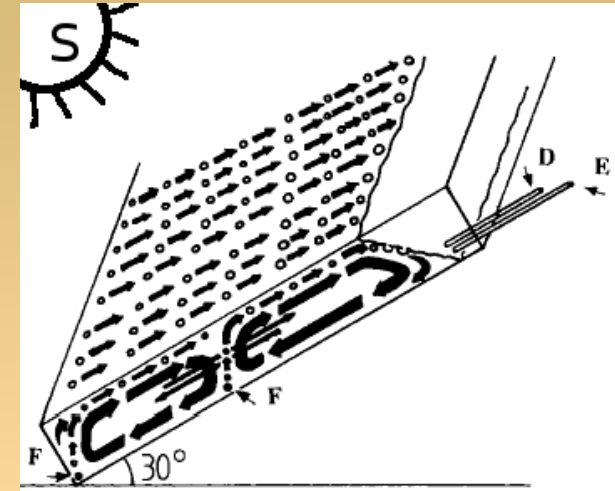
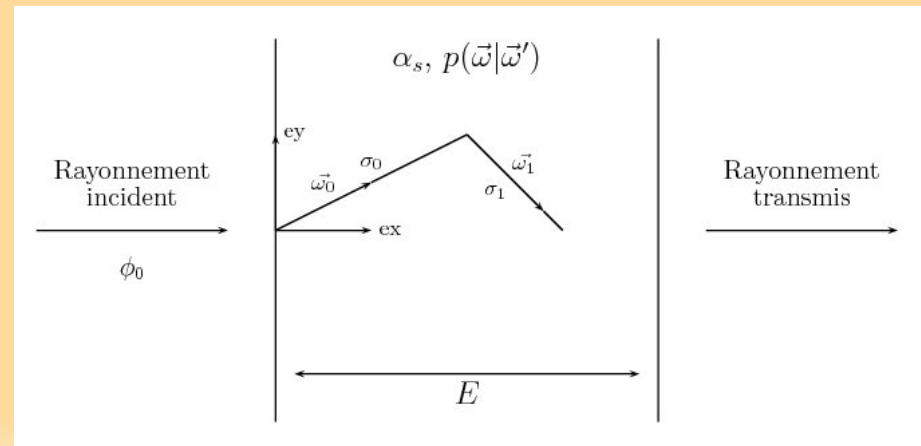


Schéma modélisant un réacteur plan à inclinaison variable et à bullage interne (Hu et al., 1996)

- Cuve spectro pour la **validation expérimentale des propriétés optiques** déterminées par la théorie de Mie.

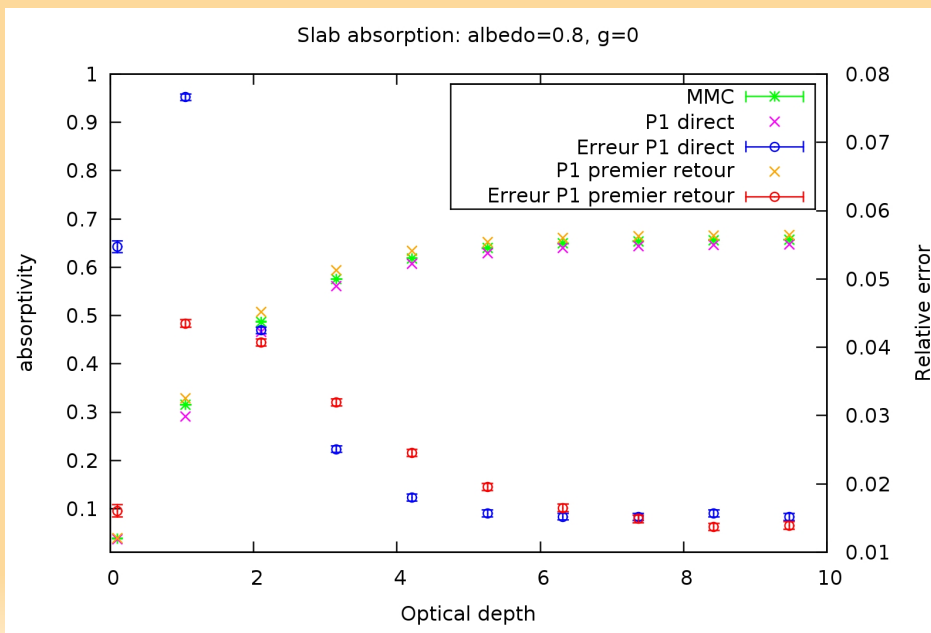
- **Modélisation:**

- Lame éclairée par une frontière.
- Régime stationnaire.
- Milieu homogène isotrope.



Flux aux bords

- Nécessité de l'étude des retours aux parois:
 - Réflexion, absorption?
- Etude des **statistiques des chemins de premiers retours** par l'approximation P1 (J. Rolland):
 - Problème équivalent conservatif.
 - L'absorption est prise en compte *a posteriori*: atténuations exponentielles sur les statistiques de sortie.



Il est intéressant de bien décrire les systèmes conservatifs même si nous sommes dans des situations avec absorption!

Transmission

- Résultats expérimentaux en sphère d'intégration:
 - Validation du modèle de détermination des propriétés optiques.
 - Ajustement des teneurs en pigments.
 - Ajustement des distributions de tailles de micro-organismes.

Cuve spectro source collimatée:

Longueur d'onde (nm)	440	490	540	620	655	674
Transmission expérimentale	0.1371	0.2405	0.3803	0.2022	0.2608	0.2035
Paramètre d'assymétrie	0.7802	0.8215	0.8377	0.8222	0.8389	0.8262
Albedo	0.6750	0.8010	0.8621	0.7479	0.8304	0.7550
Epaisseur optique	5.117	4.989	4.767	5.054	5.269	5.333
Transmission fonction de phase Mie	0.09182 +- 7.10-5	0.20889 +- 1.10-4	0.32609 +- 2.10-4	0.15422 +- 1.10-4	0.23643 +- 2.10-4	0.14494 +- 1.10-4
Erreur relative (%)	33	13	14	24	9	29
Transmission fonction de phase HG	0.09426 +- 7.10-5	0.21326 +- 1.10-4	0.33082 +- 2.10-4	0.15845 +- 1.10-4	0.24137 +- 2.10-4	0.14918 +- 1.10-4
Erreur relative (%)	31	11	13	21	7	27

Champs de radiation

- Equation de transfert radiatif.

$$c \vec{\omega} \cdot \vec{e}_x \frac{\partial f(x, \vec{\omega})}{\partial x} = -\frac{c}{\lambda} f(x, \vec{\omega}) + \alpha_s \frac{c}{\lambda} \int f(x, \vec{\omega}') p(\vec{\omega} | \vec{\omega}') d\vec{\omega}' + S(x, \vec{\omega})$$

- Approximation P1.

Hypothèse:

Situation proche de l'équilibre thermodynamique, *i.e* quasi-isotropie de la fonction de distribution.

DL d'ordre 1 en harmoniques sphériques.

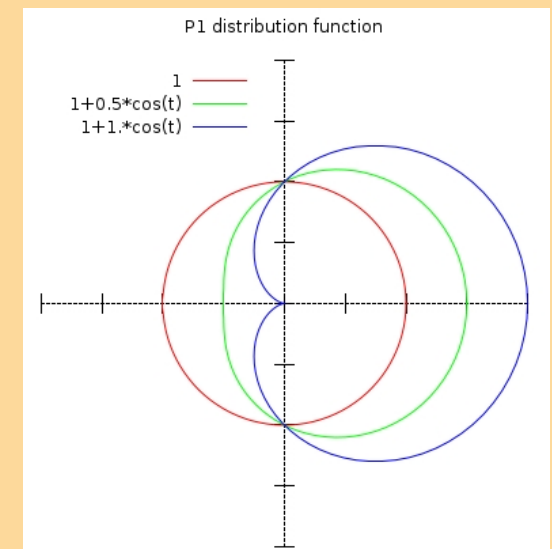
$$J_x(x) = -D \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{S_{j_x}(x)}{\frac{c}{\lambda}(1 - g\alpha_s)} - D \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) \right\} = -\frac{c}{\lambda}(1 - \alpha_s)\eta(x) + S_\eta(x)$$

$$S_\eta(x) = \int_{4\pi} S(x, \vec{\omega}) d\vec{\omega}$$

$$D = \frac{c\lambda}{d(1 - g\alpha_s)}$$

$$S_{j_x}(x) = \int_{4\pi} S(x, \vec{\omega}) c \vec{\omega} \cdot \vec{e}_x d\vec{\omega}$$

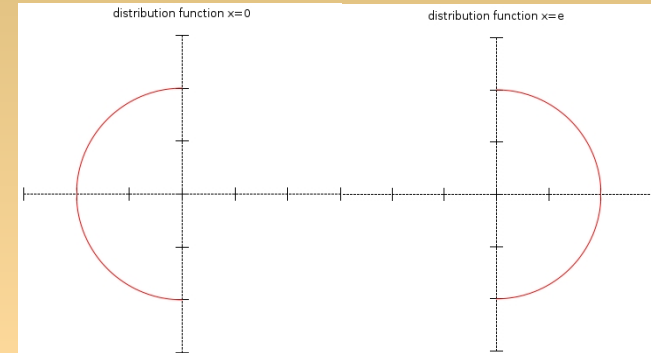


Champs de radiation

- Conditions aux limites de type Milne.

$$\eta(x=0) - h_0 \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = \text{Constante}$$

$$\eta(x=e) + h_e \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=e} = \text{Constante}$$



- Résolution de l'approximation de diffusion:

- Deux paramètres indéterminés: les **longueurs d'extrapolation** h_e ; h_0

- Dans le cas d'une fonction de distribution isotrope:

$$z = \frac{h}{\lambda} = 2/3$$

- Dans le cas conservatif, source homogène dans la lame et vide derrière les frontières (Marshack):

$$z = \frac{h}{\lambda} = 0.7104$$

Champs de radiation

- Approximation P1.

- Cas d'une incidence Lambertienne en $x=0$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1 - \alpha_s}{D} \eta(x)$$

$$\alpha_s = 1 : \eta(x) = ax + b$$

$$0 < \alpha_s < 1 : \eta(x) = a \exp(\xi x) + b \exp(-\xi x) \quad \xi = \sqrt{\frac{1 - \alpha_s}{D}}$$

$$\text{CL en } x=0: \quad J_x(0) - J_x^b(0) = -\frac{D}{z_0} (\eta(0) - \eta^b(0)) \Leftrightarrow \eta(0) - z_0 \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_0 = 2 + \frac{z_0}{D}$$

$$\text{CL en } x=e: \quad J_x(e) - J_x^b(e) = \frac{D}{z_e} (\eta(e) - \eta^b(e)) \Leftrightarrow \eta(e) + z_e \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_e = \eta^b(e) - \frac{z_e}{D} J_x^b(e) \approx 0$$

$$\alpha_s = 1 : \eta(x) = \eta(0) \left(1 - \frac{x}{e + z_e} \right) \quad \text{avec} \quad \eta(0) = \frac{1/D + 2/z_0}{\frac{1}{e + z_e} + \frac{1}{z_0}}$$

$$0 < \alpha_s < 1 : \eta(x) = A \left(\exp(-2\xi e) \frac{z_e \xi - 1}{z_e \xi + 1} \exp(\xi x) + \exp(-\xi x) \right)$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{\frac{1}{D} + \frac{2}{z_0}}{\exp(-2\xi e) \frac{z_e \xi - 1}{z_e \xi + 1} \left(\frac{1}{z_0} - \xi \right) + \frac{1}{z_0} + \xi}$$

Champs de radiation

- Approximation P1.
 - Cas d'une source Lambertienne en $x=0$, système conservatif: $\alpha_s = 1$

$$\int_0^e \eta(x) dx = J_x^{\text{entrant}} \langle t \rangle = 2e$$

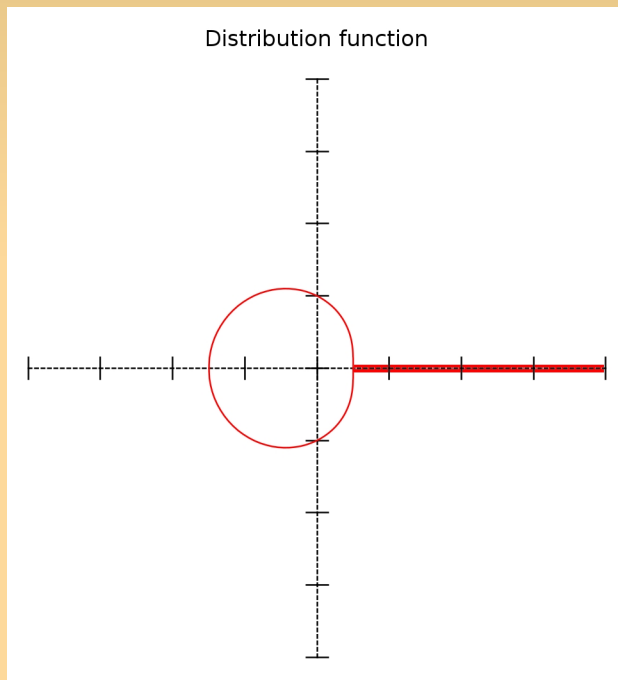
$$z_0 = \frac{2D}{1 + \frac{z_e - 2D}{e/2}} \xrightarrow{e \rightarrow \infty} 2/3$$

$$\alpha_s = 1 : \eta(x) = \eta(0) \left(1 - \frac{x}{e + z_e} \right) \quad \eta(0) = \frac{2}{1 - \frac{e/2}{e + z_e}}$$

- Le champ de radiation ne dépend plus que d'une longueur d'extrapolation.
- On choisit de garder la dépendance en z_e .
- Résultat plus précis avec la valeur 0.7104 (plutôt que 2/3)

Champs de radiation

- Approximation P1: Cas d'une **incidence collimatée en $x=0$** .
 - Séparation des **photons balistiques et diffus**.



- Si paramètre d'asymétrie de la fonction de phase non-nul:
 - Terme de source de flux amène des aberrations.
 - Toujours se placer dans un problème équivalent où $g=0$ (problème de transport).

$$\frac{\partial^2 \eta^d}{\partial x^2} = \xi^2 \eta^d(x) + (\xi^2 - 1/D) \exp(-x)$$

On ne dispose plus de la relation liant les longueurs d'extrapolation

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - \alpha_s}{D}}$$

Champs de radiation

- Approximation P1: Cas d'une **incidence collimatée en x=0.**

$$\frac{\partial^2 \eta^d}{\partial x^2} = \xi^2 \eta^d(x) + (\xi^2 - 1/D) \exp(-x)$$

$$\alpha_s = 1 : \eta^d(x) = ax + b - \frac{1}{D} \exp(-x)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - \alpha_s}{D}}$$

$$0 < \alpha_s < 1 : \eta^d(x) = a \exp(\xi x) + b \exp(-\xi x) - \frac{\xi^2 - \frac{1}{D}}{\xi^2 - 1} (\exp(-x) - \exp(-\xi x))$$

$$\text{CL en } x=0: \eta^d(x=0) - z_0 \left. \frac{\partial \eta^d}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\text{CL en } x=e: \eta^d(x=e) + z_e \left. \frac{\partial \eta^d}{\partial x} \right|_{x=e} = 0$$

$$\alpha_s = 1 : \eta(x) = A \left(1 - \frac{x}{e + z_e} \right) - \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \exp(-x)$$

$$\text{avec } A = \frac{\frac{1+z_0}{D}}{1 + \frac{z_0}{e+z_e}}$$

$$0 < \alpha_s < 1 :$$

$$\eta(x) = B \exp(\xi x) + C \exp(-\xi x) - \frac{\xi^2 - \frac{1}{D}}{\xi^2 - 1} (\exp(-x) - \exp(-\xi x)) + \exp(-x)$$

avec

$$C = \frac{-\frac{\xi^2 - \frac{1}{D}}{\xi^2 - 1} \left(z_0(1-\xi) \frac{1+z_e\xi}{1-z_0\xi} + \exp(-2\xi e) \{ 1 - z_e\xi - (1-z_e)\exp((\xi-1)e) \} \right)}{\exp(-2\xi e)(1-z_e\xi) - (1+z_0\xi) \frac{1+z_e\xi}{1-z_0\xi}} \quad B = -C \frac{1+z_0\xi}{1-z_0\xi} - z_0 \frac{\xi^2 - \frac{1}{D}}{(\xi+1)(1-z_0\xi)}$$

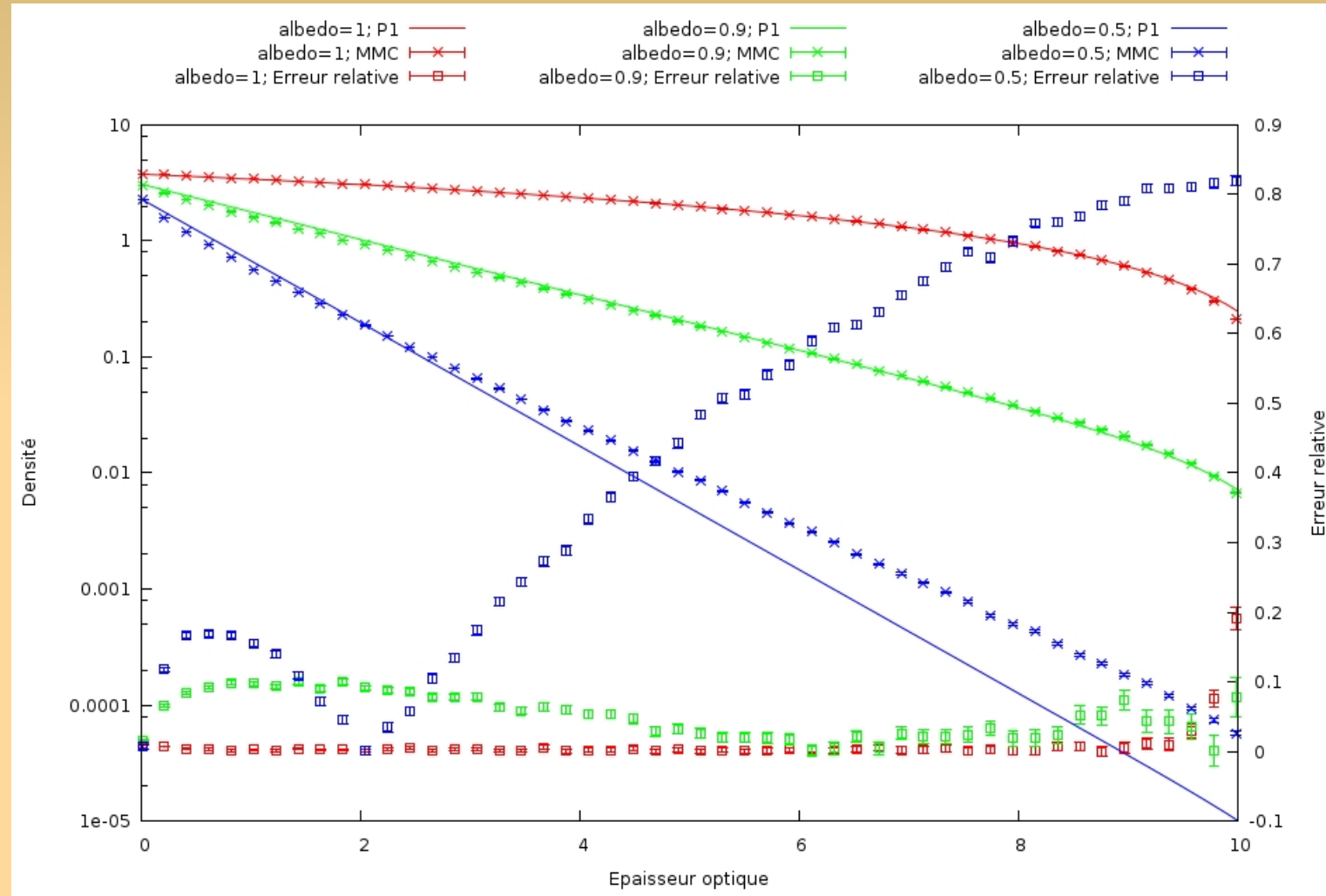
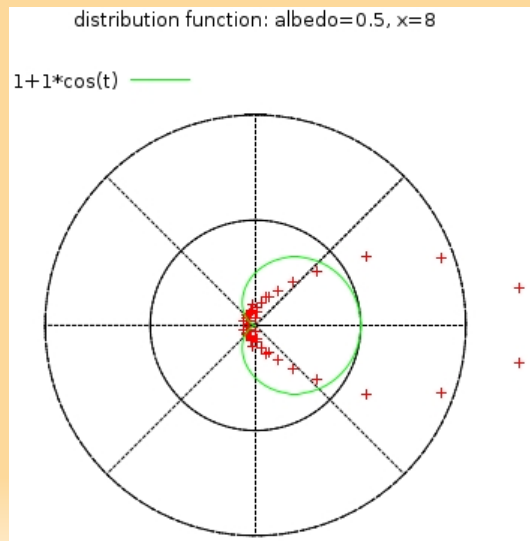
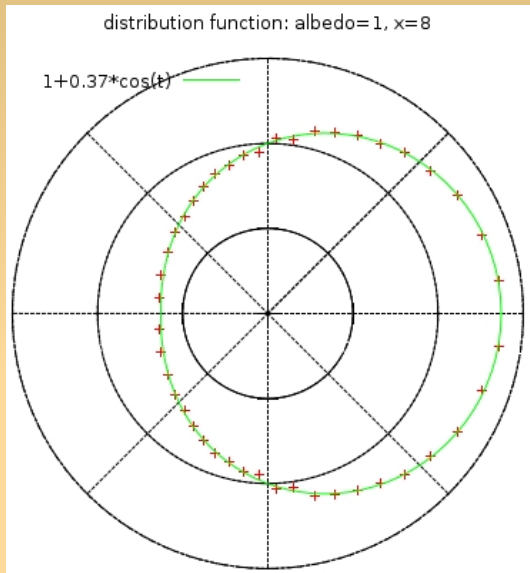
Champs de radiation

- **Systemes conservatifs:**
 - Source collimatée: Situation optimale mal définie mais l'erreur relative moyenne sur la lame est minimisée pour $z_0 = 0.7104$; $z_e = 2/3$
 - Source lambertienne: Z_0 et Z_e liés, $z_e = 0.7104$ minimise l'erreur.
- **Systemes dissipatifs:**
 - Modèles de connaissances à explorer.
 - On utilise les seules valeurs dont on dispose à l'heure actuelle.

Champs de radiation

Source diffuse:

$e=10; K=1; g=0$



Champs de radiation

- Erreur relative moyenne dans la lame.

Source diffuse

Epaisseur optique	Albedo				
	1	0.8	0.6	0.4	0.2
20	0.008 +- 4.10-3	0.316 +- 2.10-2			
10	0.010 +- 4.10-3	0.133 +- 1.10-2	0.349 +- 7.10-3	0.506 +- 5.10-3	0.607 +- 3.10-3
5	0.015 +- 4.10-3	0.063 +- 6.10-3	0.132 +- 6.10-3	0.233 +- 5.10-3	0.325 +- 4.10-3
2	0.030 +- 3.10-3	0.131 +- 4.10-3	0.140 +- 5.10-3	0.133 +- 5.10-3	0.114 +- 5.10-3

Ordre de grandeur dans un photobioréacteur:

$$E_a \approx 100 (m^2.Kg^{-1})$$

$$E_s \approx 1000 (m^2.Kg^{-1})$$

$$C_x E \approx 0.02 \rightarrow 0.06 (Kg.m^{-2})$$

$$g \approx 0.9$$

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_a + E_s} \approx 0.9$$

$$e = C_x E (E_a + E_s) \approx 20 \rightarrow 70$$

$$\alpha_s^* = \alpha_s \frac{1 - g}{1 - g\alpha_s} \approx 0.5$$

$$e^* = e (1 - g\alpha_s) \approx 4 \rightarrow 12$$

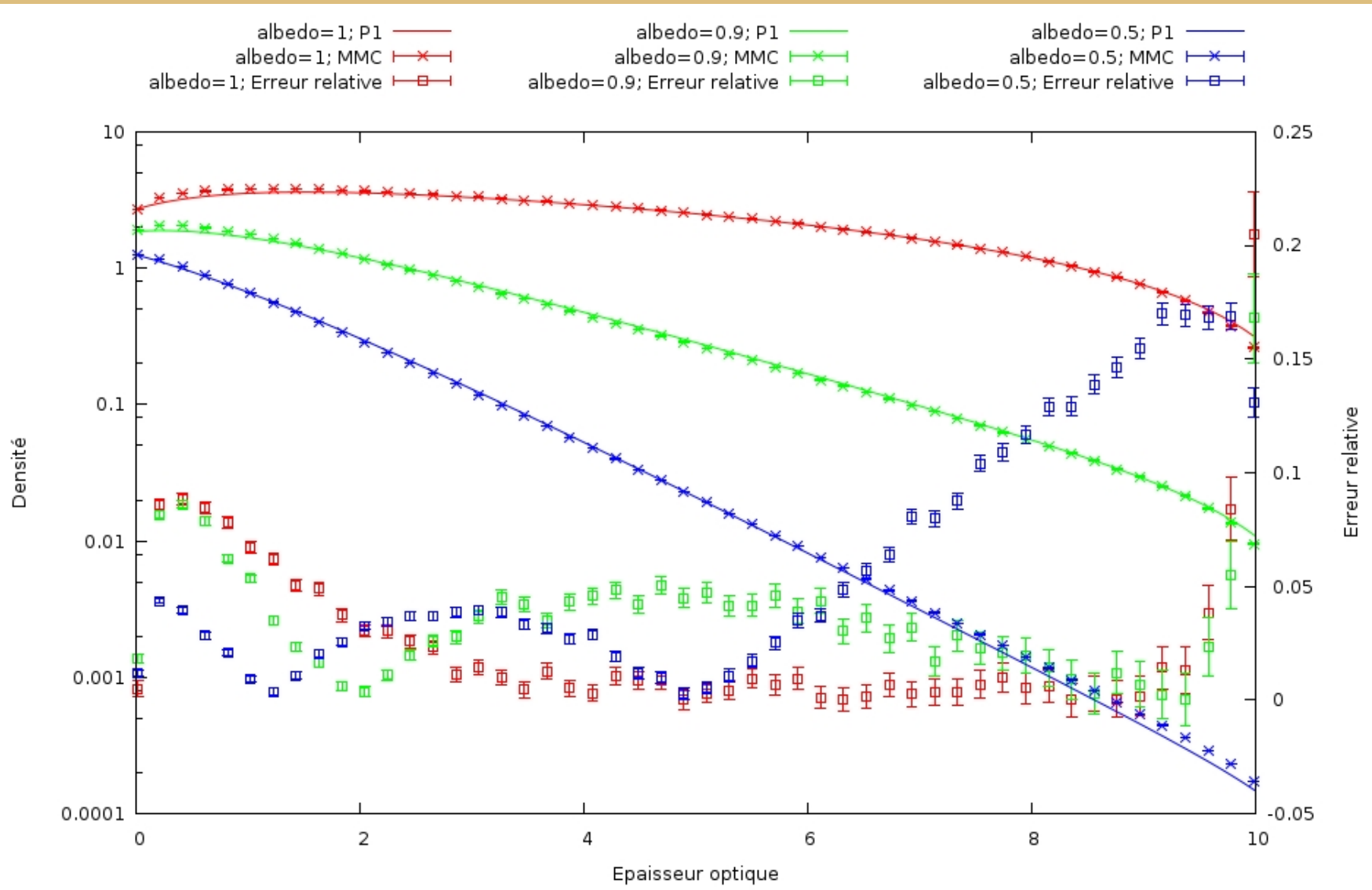
Champs de radiation

Source collimatée

$e=10$

$K=1$

$g=0$

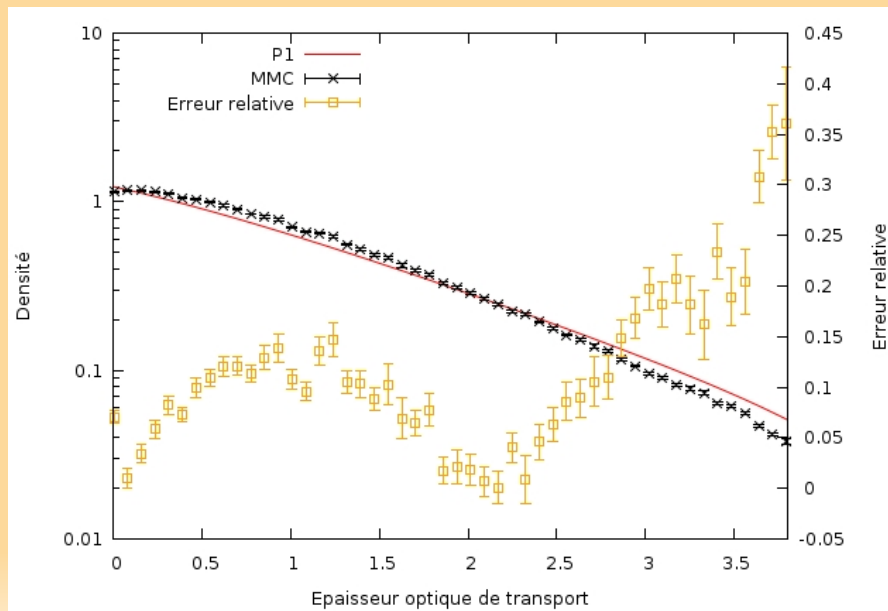


Champs de radiation

- Erreur relative moyenne dans la lame.

Source collimatée

Epaisseur optique	Albedo				
	1	0.8	0.6	0.4	0.2
20	0.029 +- 6.10-3	0.196 +- 1.10-2	0.369 +- 1.10-2		
10	0.031 +- 5.10-3	0.041 +- 5.10-3	0.064 +- 3.10-3	0.050 +- 2.10-3	0.025 +- 1.10-3
5	0.035 +- 4.10-3	0.052 +- 3.10-3	0.037 +- 2.10-3	0.022 +- 1.10-3	0.009 +- 1.10-3
2	0.086 +- 3.10-3	0.048 +- 2.10-3	0.032 +- 1.10-3	0.022 +- 1.10-3	0.010 +- 1.10-3



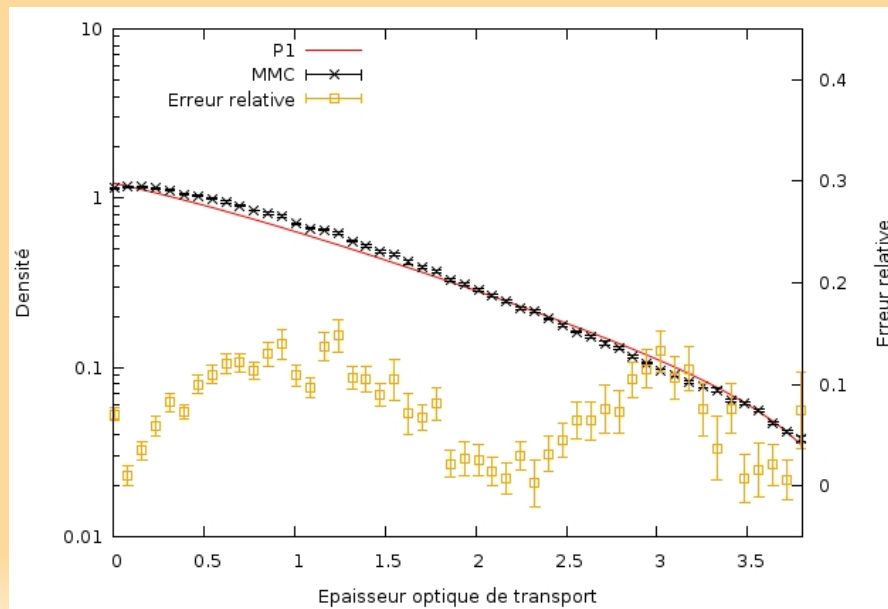
$g = 0.9$
 $\alpha_s = 0.9$
 $e = 20$
 Fonction de phase henyeey-greenstein
 $\alpha_s^* = 0.5 ; e^* = 4$

Champs de radiation

- Erreur relative moyenne dans la lame.

Source collimatée

Epaisseur optique	Albedo				
	1	0.8	0.6	0.4	0.2
20	0.029 +- 6.10-3	0.196 +- 1.10-2	0.369 +- 1.10-2		
10	0.031 +- 5.10-3	0.041 +- 5.10-3	0.064 +- 3.10-3	0.050 +- 2.10-3	0.025 +- 1.10-3
5	0.035 +- 4.10-3	0.052 +- 3.10-3	0.037 +- 2.10-3	0.022 +- 1.10-3	0.009 +- 1.10-3
2	0.086 +- 3.10-3	0.048 +- 2.10-3	0.032 +- 1.10-3	0.022 +- 1.10-3	0.010 +- 1.10-3



$Ze = 0.2$

$$g = 0.9$$

$$\alpha_s = 0.9$$

$$e = 20$$

Fonction de phase
henyey-greenstein

$$\alpha_s^* = 0.5 ; e^* = 4$$

Merci pour votre attention

Transmission

- Méthode Monté Carlo:

$$T = \int_{\Omega_{source}} p_{\vec{\Omega}_0}(\vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_0 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_0) d\sigma_0 [H(\sigma_0 - d_0^+) + H(d_0^+ - \sigma_0) \int_{4\pi} p_{\vec{\Omega}}(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_1 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_1) d\sigma_1 \\ \times [H(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{e}_z) H(\sigma_1 - d_1^+) + (H(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{e}_z) H(d_1^+ - \sigma_1) + H(-\vec{\omega}_1 \cdot \vec{e}_z) H(d_1^- - \sigma_1)) \int_{4\pi} p_{\vec{\Omega}}(\vec{\omega}_2 | \vec{\omega}_1) d\vec{\omega}_2 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_2) d\sigma_2 \\ \times [H(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{e}_z) H(\sigma_2 - d_2^+) + (H(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{e}_z) H(d_2^+ - \sigma_2) + H(-\vec{\omega}_2 \cdot \vec{e}_z) H(d_2^- - \sigma_2)) \dots]]]] \quad (1)$$

- Résultats expérimentaux en sphère d'intégration:

- Validation du modèle de détermination des propriétés optiques.
- Ajustement des teneurs en pigments.

Cuve spectro source collimatée:

Longueur d'onde (nm)	440	490	540	620	655	674
Transmission expérimentale	0.1371	0.2405	0.3803	0.2022	0.2608	0.2035
Paramètre d'assymétrie	0.7802	0.8215	0.8377	0.8222	0.8389	0.8262
Albedo	0.6750	0.8010	0.8621	0.7479	0.8304	0.7550
Epaisseur optique	5.117	4.989	4.767	5.054	5.269	5.333
Transmittivité fonction de phase Mie	0.09182 +- 7.10-5	0.20889 +- 1.10-4	0.32609 +- 2.10-4	0.15422 +- 1.10-4	0.23643 +- 2.10-4	0.14494 +- 1.10-4
Transmittivité fonction de phase HG	0.09426 +- 7.10-5	0.21326 +- 1.10-4	0.33082 +- 2.10-4	0.15845 +- 1.10-4	0.24137 +- 2.10-4	0.14918 +- 1.10-4

Champs de radiation

- Formulation intégrale de l'ETR et résolution par Méthode de Monte Carlo (MMC).

- Cas d'une source Lambertienne:

$$\begin{aligned} \eta(x) = & \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\vec{\omega}_0 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_0) d\sigma_0 \{ H(x_1 \leq 0) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_1 \in]0; e[) \int_\Omega p_\Omega(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_1 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_1) d\sigma_1 \{ H(x_2 \leq 0) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_2 \in]0; e[) \dots \} \} \end{aligned}$$

- Cas d'une source collimatée:

$$\begin{aligned} \eta(x) = & \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\vec{\omega}_0 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_0) d\sigma_0 \{ H(x_1 \leq 0) \delta(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{e}_x + 1) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_1 \in]0; e[) \int_\Omega p_\Omega(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_1 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_1) d\sigma_1 \{ H(x_2 \leq 0) \delta(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{e}_x + 1) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_2 \in]0; e[) \dots \} \} \end{aligned}$$

Champs de radiation

- Formulation intégrale de l'ETR et résolution par Méthode de Monte Carlo (MMC).

- Cas d'une source Lambertienne:

$$\begin{aligned} \eta(x) = & \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\vec{\omega}_0 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_0) d\sigma_0 \{ H(x_1 \leq 0) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_1 \in]0; e[) \int_\Omega p_\Omega(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_1 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_1) d\sigma_1 \{ H(x_2 \leq 0) 4\pi e^{-K_a l} \\ & + H(x_2 \in]0; e[) \dots \} \} \end{aligned}$$

- Cas d'une source collimatée:

$$\begin{aligned} \eta(x) = & e^{(K_a + K_d) d_0^*} \\ & + \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} d\vec{\omega}_0 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_0) d\sigma_0 H(x_1 \in]0; e[) \{ 4\pi p_\Omega(-\vec{e}_x | \vec{\omega}_0) e^{-K_d d_1^*} e^{-K_a(\sigma_0 + d_1^*)} \\ & + \int_\Omega p_\Omega(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_0) d\vec{\omega}_1 \int_0^\infty p_\Sigma(\sigma_1) d\sigma_1 H(x_2 \in]0; e[) \{ \dots \} \} \end{aligned}$$