

# Benchmark solution for a three-dimensional mixed convection flow

Xavier NICOLAS<sup>1</sup>, Marc MEDALE<sup>2</sup>, Stéphane GLOCKNER<sup>3</sup>, Stéphane GOUNAND<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Est, Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France (xavier.nicolas@univ-paris-est.fr)

<sup>2</sup>IUSTI, UMR 6595 CNRS, 5 rue Enrico Fermi, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille Cedex 13, France (marc.medale@polytech.univ-mrs.fr)

<sup>3</sup>Université de Bordeaux, IPB ENSCBP, CNRS UMR 5295, Institut I2M, 16 av. Pey-Berland, 33 607 Pessac Cedex, France (glockner@enscbp.fr)

<sup>4</sup>CEA-Saclay, DEN, DM2S, SFME, LTMF, F-91191 Gif-sur-Yvette, France (stephane.gounand@cea.fr)

November 16, 2011

## Objectifs

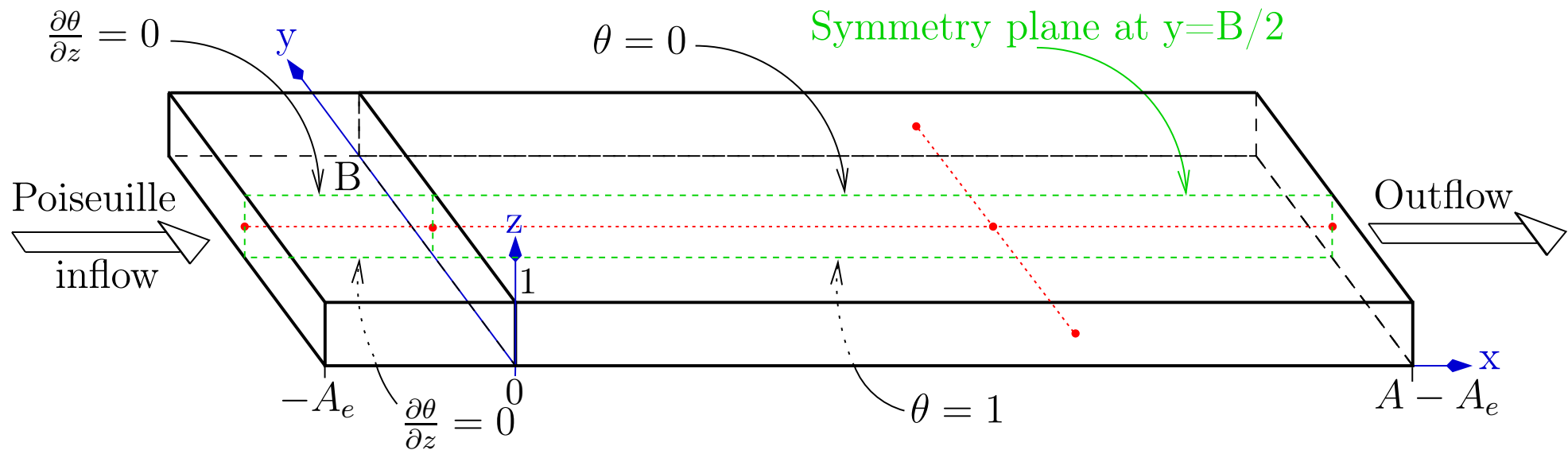
- Obtention d'une **solution de référence** pour un écoulement de **convection mixte** 3D ;
- Utilisation systématique de l'**extrapolation de Richardson** : quantifier l'erreur et obtenir une solution plus précise ;
- Appel à contributions [Medale and Nicolas, 2006] ;
- Publications [Nicolas et al., 2011c], [Nicolas et al., 2011a]  
Rapport technique [Nicolas et al., 2011b].

## *Plan*

1. Problème et démarche de résolution ;
2. Résultats obtenus ;
3. Explication des résultats : Singularité ;
4. Explication des résultats : Comportement de l'extrapolation de Richardson ;
5. Perspectives.

# Démarche : Problème à résoudre (I)

**Écoulement de convection mixte** (Poiseuille-Rayleigh-Bénard) en cavité (ex. refroidissement de circuits intégrés)



## *Démarche : Équations (II)*

### Navier-Stokes incompressible + Boussinesq

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \vec{k} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \theta \end{array} \right.$$

### Paramètres adimensionnés

$$Pr = 0.7 \quad Re = 50 \quad Ra = 5000$$

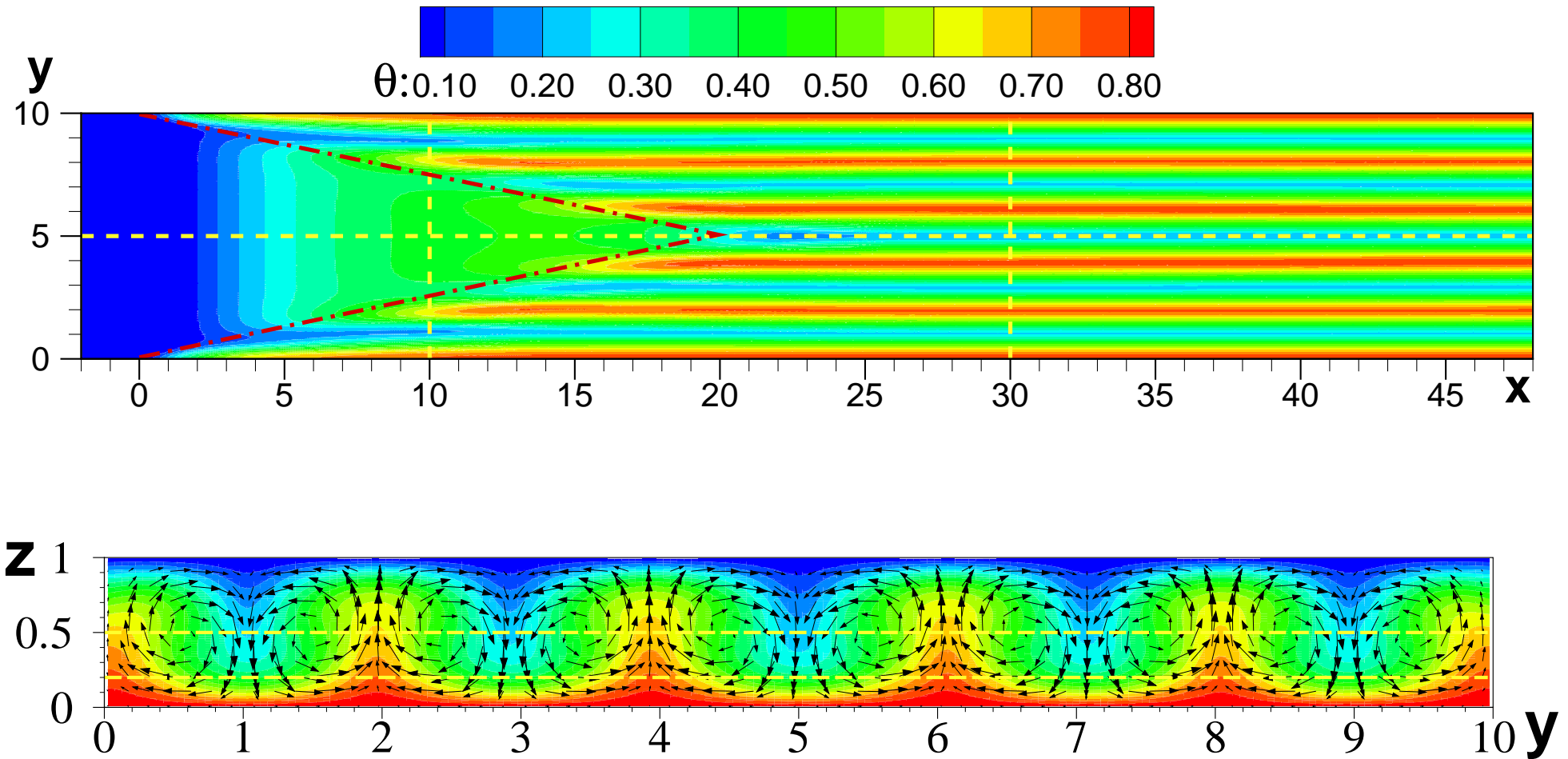
$$A = 50 \quad A_e = 2 \quad B = 10$$

### Conditions aux limites

**Dynamiques** : Profil établi (Poiseuille) en entrée, conditions de sortie “libres”, vitesse nulle en paroi ;

**Thermiques** :  $\theta = 0$  en entrée, conditions de sortie “libres”, zone d'établissement adiabatique, puis chauffage par le bas, refroidissement par le haut.

# Démarche : Solution du problème (III)



## *Démarche : Méthodes de résolution (IV)*

4 méthodes de résolution et codes différents :

- FD1** Différences finies centrées, vectorisées, ADI, matrices tridiagonales, méthode de projection continue (Goda) ;
- FE2** Éléments finis Q2/Q1, parallélisme distribué, décomposition de domaine (PETSc), méthode de projection continue (Guermond) ;
- FV3** Thétis, Volumes finis nodaux, vitesses aux faces, décentrement QUICK température, parallélisme distribué (Hypra), méthode de projection continue (Timmermans) ;
- FE4** Castem, Éléments finis Q2/P1nc, parallélisme partagé, AGMG (Notay), méthode de projection algébrique (Quarteroni).

## Démarche : Paramètres des contributeurs (V)

Contributor	$N_x \times N_y \times N_z$ [symmetry]	$\Delta t$	User time [computer type (organism/lab)]	Consistency orders $\alpha^\circ$
MSME, FD1	$400 \times 134 \times 40$	0.01	36 <i>min</i> on 1 processor	2 for $\theta, u, v, w$ ; 2 for $p$
	$600 \times 200 \times 60$	0.01	2 <i>h</i> 20 on 1 processor	
	$800 \times 268 \times 80$	0.002	25 <i>h</i> on 1 processor	
	$1200 \times 400 \times 120$ [no]	0.002	100 <i>h</i> on 1 processor [NEC SX5 (IDRIS)]	
IUSTI, FE2	$601 \times 121 \times 41$	0.01	19 <i>min</i> on 60 cores	3 for $\theta, u, v, w$ ; 2 for $p$
	$901 \times 181 \times 61$	0.01	1 <i>h</i> 40 on 150 cores	
	$1351 \times 271 \times 91$ [yes]	0.005	43 <i>h</i> 15 on 225 cores [IBM SP6 (IDRIS)]	
I2M Institute, FV3	$601 \times 161 \times 41$	0.1	8 <i>h</i> on 152 cores	2 for $\theta, u, v, w$ ; 2 for $p$
	$901 \times 241 \times 61$	0.1	12 <i>h</i> on 152 cores	
	$1351 \times 361 \times 91$ [yes]	0.1	56 <i>h</i> on 152 cores [ALTIX ICE 8200 (I2M Inst.)]	
CEA, FE4	$601 \times 121 \times 49$	0.5	200 <i>h</i> on 8 cores	3 for $\theta, u, v, w$ ; 2 for $p$
	$751 \times 151 \times 61$	0.5	400 <i>h</i> on 8 cores	
	$801 \times 161 \times 65$	0.5	450 <i>h</i> on 8 cores	
	$1001 \times 201 \times 81$ [yes]	0.5	1600 <i>h</i> on 8 cores [PC 8 cores (CEA)]	



*Démarche : Valeurs de références calculées (VI)*

**Intégrales :**

$$\begin{aligned}2E_c &= \frac{1}{D} \iiint_D (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \\ \Delta P_{io} &= \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} P dy dz - \frac{1}{S_o} \iint_{S_o} P dy dz \\ T_m &= \frac{1}{D} \iiint_D \theta dx dy dz\end{aligned}$$

**Flux** : de chaleur et de quantité de mouvement à travers toutes les faces ;

**Locales** : extrema locaux sur les profils des variables primales ( $u, v, w, T$ ) et du flux de chaleur ( $Nu$ ) sur les faces à températures imposées.

*Démarche : Calcul des Nusselt (VII)*

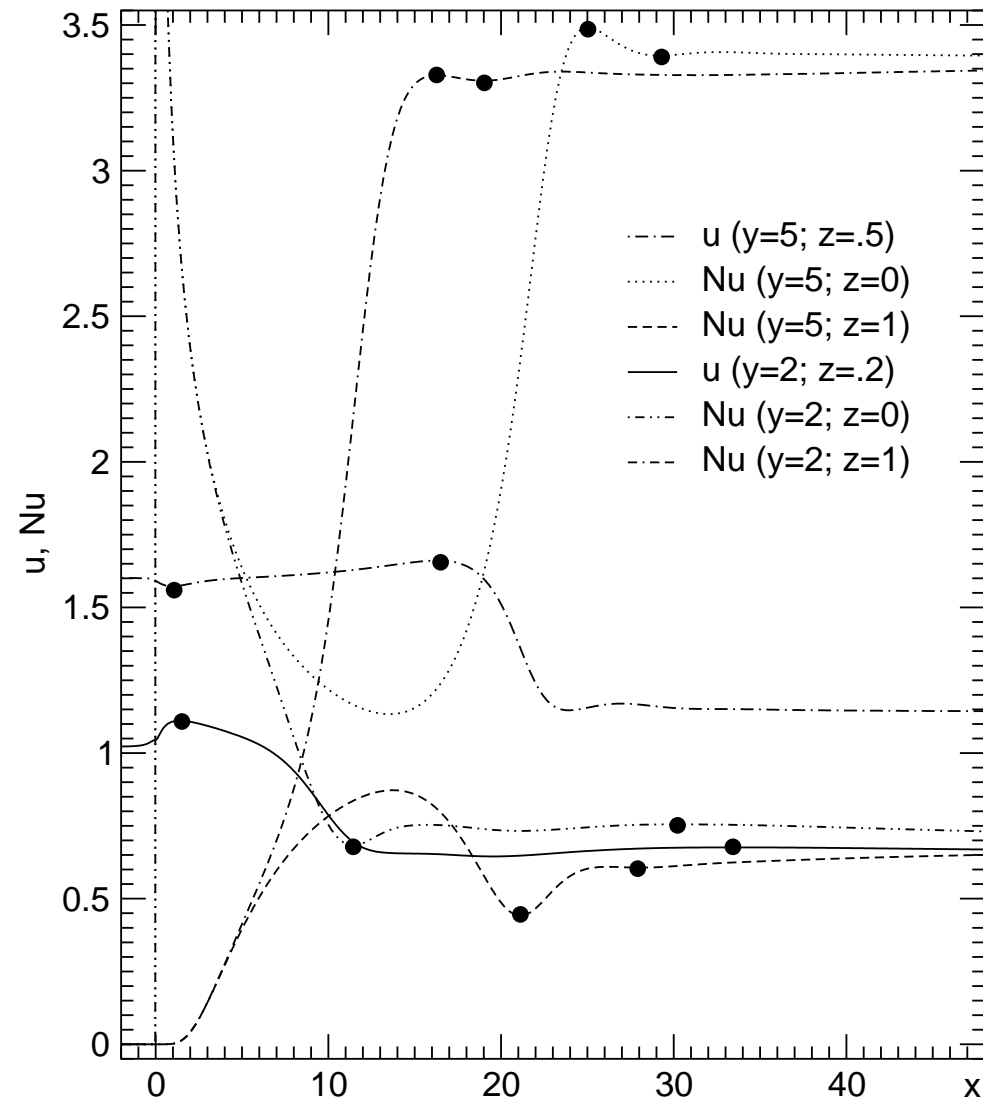
$Nu$  calculé de deux manières par **FE4** :

**Non consistante**

$$Nu = -\frac{\partial \theta}{\partial n}$$

**Consistante** Par dualité : le flux (condition de Neumann) qu'il aurait fallu mettre à la place des conditions de Dirichlet pour obtenir la même solution.

## Démarche : Exemple de profils (VIII)



## Démarche : Extrapolation de Richardson (RE) (IX)

**{A1}**  $f_{exact}$  suffisamment régulière pour pouvoir écrire le **développement de Taylor** :

$$f_h = f_{exact} + C_\alpha h^\alpha + O(h^{\alpha+1})$$

**{A2}**  $h_i$  suffisamment petits pour avoir (**convergence asymptotique**) :

$$C_\alpha h_i^\alpha \gg O(h_i^{\alpha+1})$$

**{A3}** raffinement uniforme en espace et en temps

alors, pour trois grilles  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3}$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \frac{\ln\left(\frac{f_{h_1} - f_{h_2}}{f_{h_2} - f_{h_3}}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \\ \tilde{C}_\alpha &= \frac{f_{h_2} - f_{h_3}}{h_2^{\tilde{\alpha}} - h_3^{\tilde{\alpha}}} \\ \tilde{f}^{ex} &= f_{h_3} - \tilde{C}_\alpha h_3^{\tilde{\alpha}}\end{aligned}$$

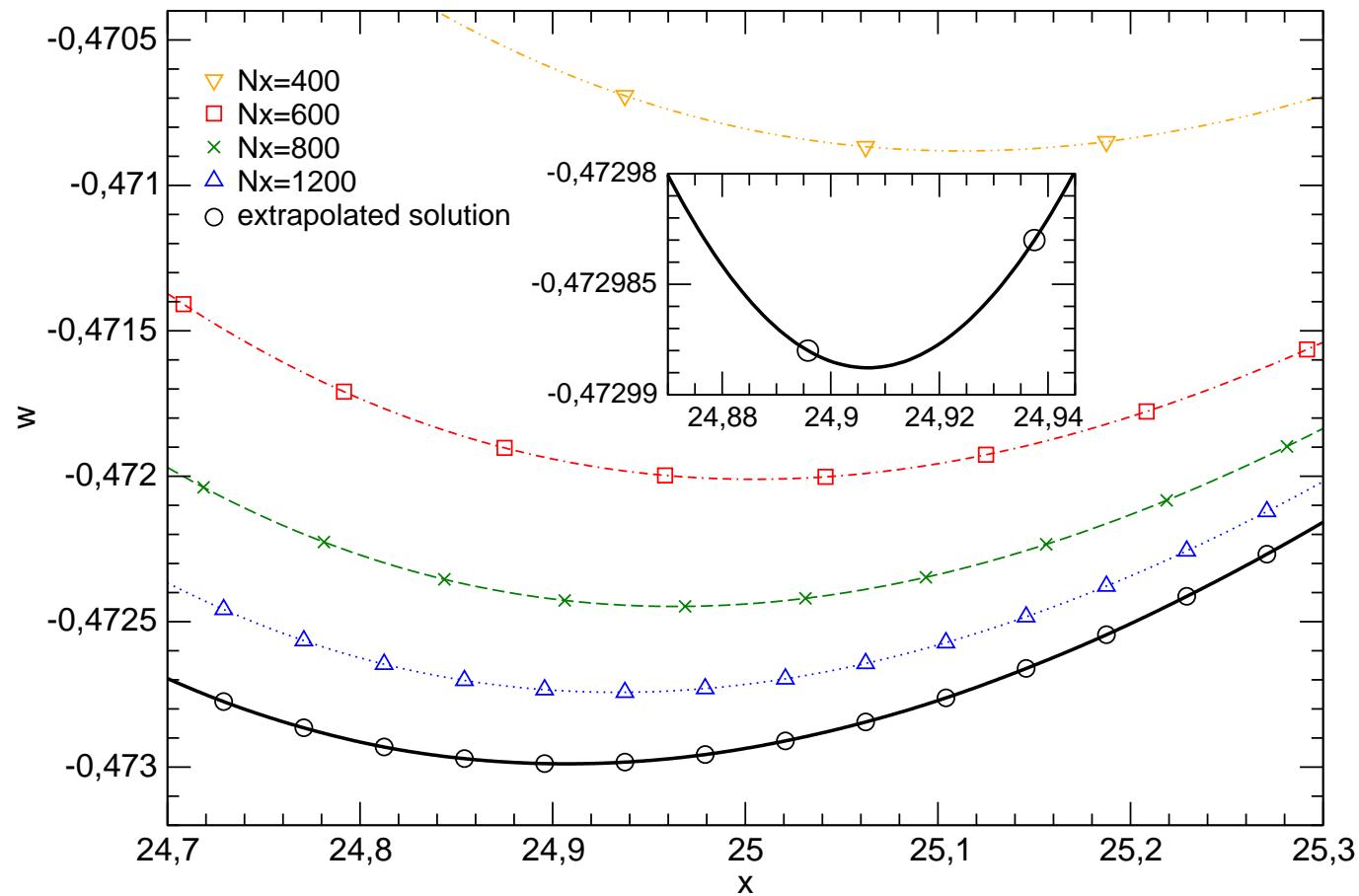
*Démarche : Intérêts de l'extrapolation de Richardson (X)*

**Précision** Éliminer le terme dominant de l'erreur de troncature, i.e. gagner un ordre ;

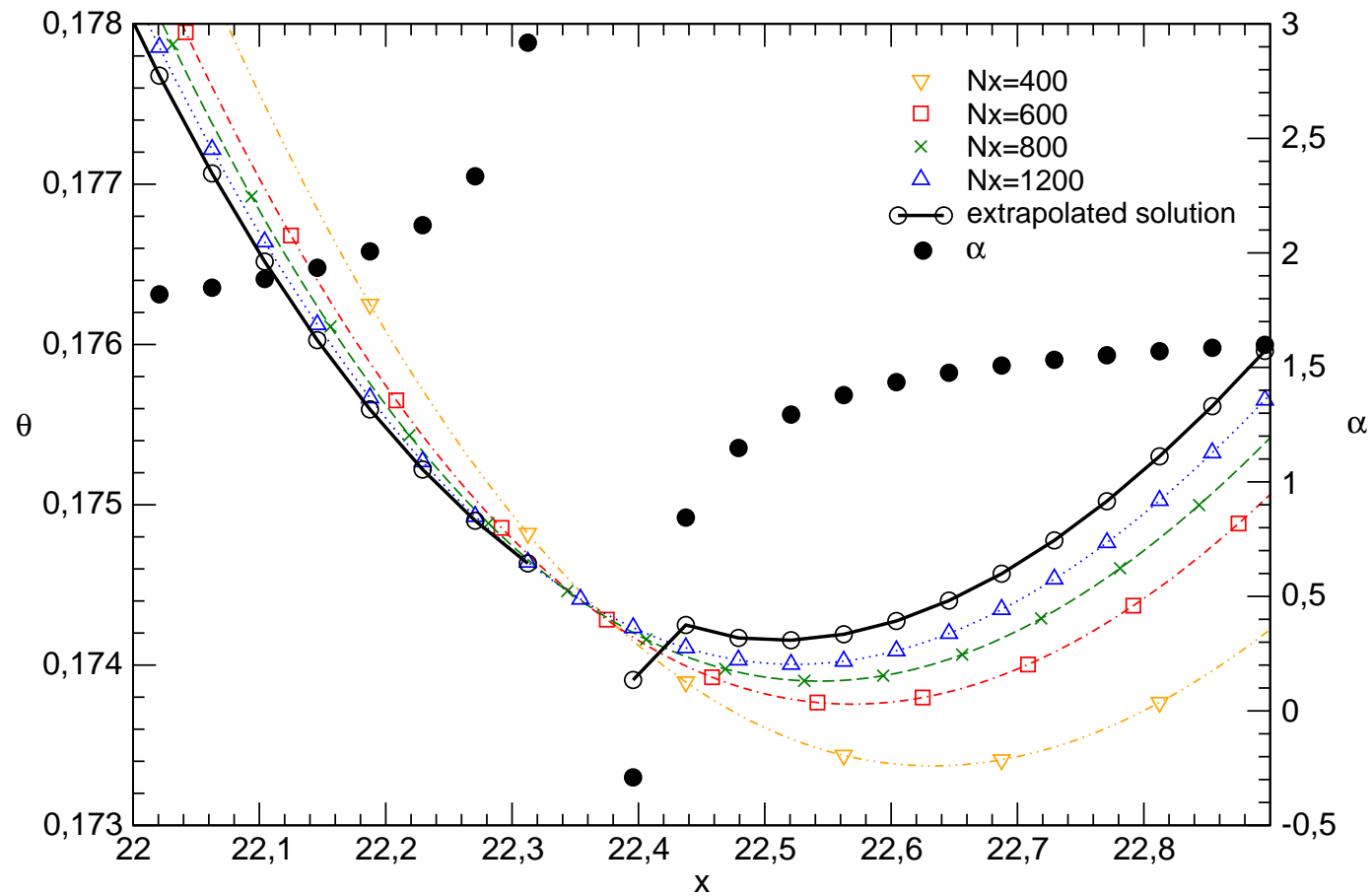
**Estimation d'erreur** C'est le terme dominant de l'erreur de troncature sur le maillage fin ;

**Vérification** Estimation des ordres de convergence.

# Démarche : Exemple sur un profil (XI)



*Démarche : Croisement des profils (XII)*



## *Démarche : Remarque sur l'utilisation de RE (XIII)*

De nombreux auteurs fixent le  $\alpha$  dans le développement de Taylor à l'ordre de consistance  $\alpha^\circ$  du schéma utilisé.

### **Avantages :**

- une grille en moins ;
- pas de problèmes quand les profils se croisent.

### **Inconvénient :**

- pas de vérification de l'ordre de convergence.



## Résultats : Quantités globales (I)

	FD1	FE2	FV3	FE4	References $f_{ref} \pm f_{marg}$ $f_{prec} = \frac{f_{marg}}{f_{ref}}$
$2E_c^{fg}$	1.292479	1.292452	1.292355	1.292461	<b>1.292453</b> $\pm 0.000008$ $6.19 \times 10^{-6}$
$2E_c^{ex}$	1.292446	1.292452	1.292455	1.292467 °	
$\alpha_{E_c}$	2.22	2.92	2.00	-1.92	
$d_{E_c}$	$2.55 \times 10^{-5}$	$2.35 \times 10^{-7}$	$-7.74 \times 10^{-5}$	$-5.34 \times 10^{-6}$ °	
$\Delta P_{io}^{fg}$	14.41210	14.40784	14.40235	14.40694	<b>14.40670</b> $\pm 0.00024$ $1.67 \times 10^{-5}$
$\Delta P_{io}^{ex}$	14.40647	14.40649	14.40678	14.40658 °	
$\alpha_{\Delta P_{io}}$	2.03	1.99	2.00	0.83	
$d_{\Delta P_{io}}$	$3.91 \times 10^{-4}$	$9.36 \times 10^{-5}$	$-3.08 \times 10^{-4}$	$2.55 \times 10^{-5}$ °	
$T_m^{fg}$	0.448490	0.448625	0.448725	0.448659	<b>0.448604</b> $\pm 0.000010$ $2.23 \times 10^{-5}$
$T_m^{ex}$	0.448594	0.448604	0.448606	0.448613	
$\alpha_{T_m}$	1.19	1.18	1.02	1.18	
$d_{T_m}$	$-2.32 \times 10^{-4}$	$4.68 \times 10^{-5}$	$2.65 \times 10^{-4}$	$1.04 \times 10^{-4}$	

## Résultats : Quantités locales (II)

	FD1	FE2	FV3	FE4	References
					$f_{\text{ref}} \pm f_{\text{marg}}$ $x_{\text{ref}} \pm x_{\text{marg}}$  $f_{\text{prec}} = \frac{f_{\text{marg}}}{f_{\text{ref}}}$
$u_1$	1.572726	1.572725	1.572713	1.572725	$(1572720 \pm 7) \times 10^{-6}$
$x_1$	0.950	0.945	0.944	0.941	$0.945 \pm 0.005$
$\alpha_1$	2.00	3.47	2.05	***	
$d_1$	$-1.2 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$3.2 \times 10^{-5}$		$4.5 \times 10^{-6}$
$Nu_{t2}$	0.60675	0.60658	0.60615	0.60657	$0.60645 \pm 0.00030$
$x_2$	28.085	28.085	28.074	28.081	$28.080 \pm 0.006$
$\alpha_2$	1.90	1.70	1.90	1.68	
$d_2$	$-2.5 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$4.9 \times 10^{-4}$
$Nu_{t2}^{\text{cons}}$				0.60666	
$x_2^{\text{cons}}$				28.077	

## *Résultats : Résumé des comportements observés (III)*

**Méthodes FD1 et FV3** RE “marche” avec un ordre observé  $\alpha = \alpha^\circ = 2$  pour la plupart des quantités (sauf  $T_m$ )

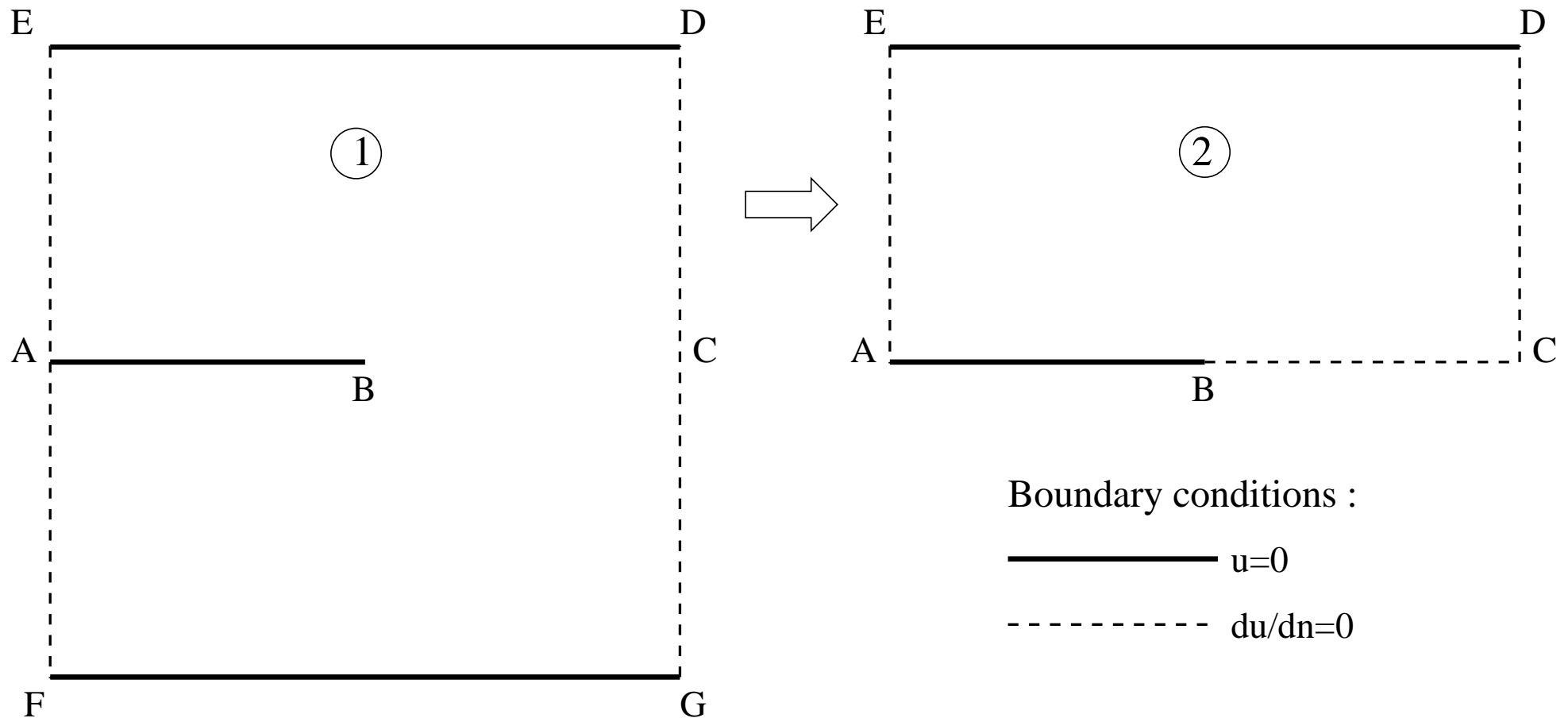
**Méthodes FD1 et FV3** Solution extrapolée relativement éloignée de la solution sur la grille fine

**Méthodes FE2 et FE4** Application de RE plus difficile, surtout pour **FE4**, exception faite de  $T_m$  et  $Nu$  (les quantités les plus imprécises)

**Méthodes FE2 et FE4** Solution extrapolée relativement proche de la solution sur la grille fine

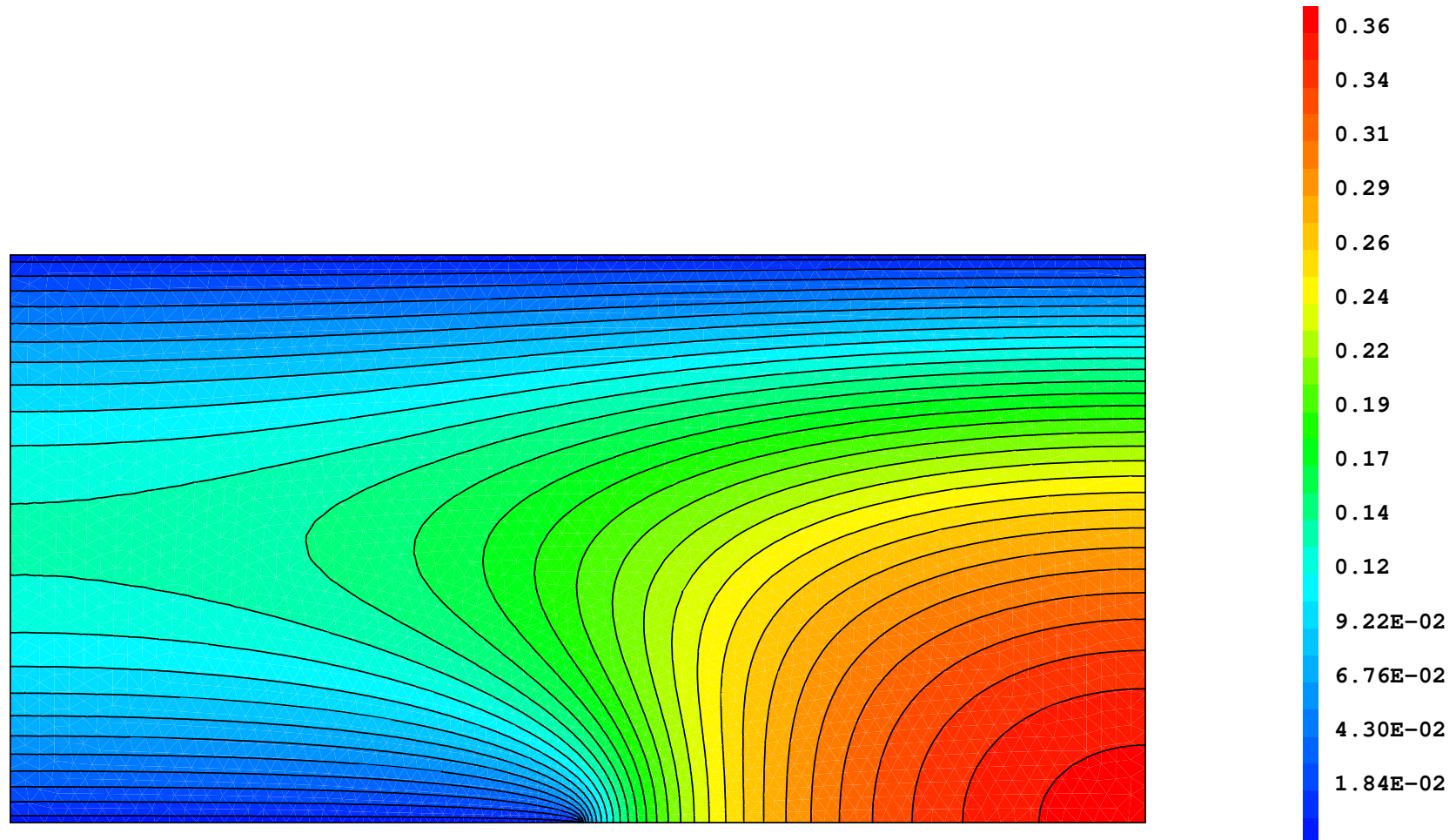
**Toutes les méthodes** ordre  $\approx 1$  pour  $T_m$

# *Singularité : changement de conditions aux limites (I)*



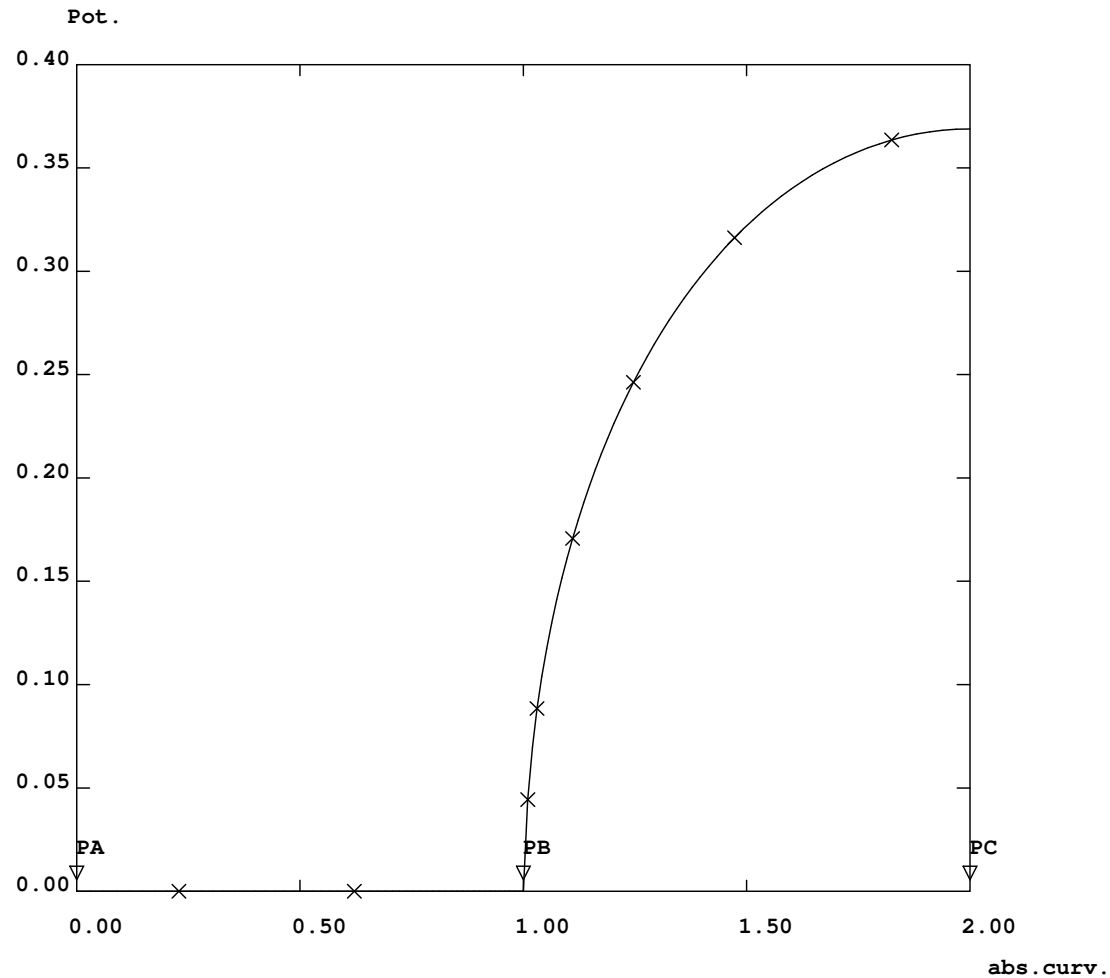
Singularité de pointe [Strang and Fix, 1988]

# *Singularité : exemple de solution (II)*



Solution approchée de  $-\Delta T = 1$ .

# Singularité : exemple de profil (III)



Profil de  $T$  sur la paroi du bas.

## *Singularité : dégradation de l'ordre de convergence (IV)*

[Strang and Fix, 1988] nous dit (estimation **a priori**) :

$$f_h = f_{exact} + C_\beta h^\beta + O(h^{\beta+1})$$

où :

$$\beta = \min(r, \alpha^\circ)$$

$$\text{Ici } r = 1 \text{ et } \alpha^\circ = 2 \text{ ou } 3 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

**Note** : la plupart des benchmarks présentent une singularité plus ou moins marquée : cavité à paroi défilante, marche descendante, cavité différentiellement chauffée.

*Singularité : problèmes soulevés (V)*

**Problème 1** : à part pour  $T_m$ , on a des ordres observés différents de 1, proches de  $\alpha^\circ$  donc pas dans la zone de convergence asymptotique. Malgré tout, l'extrapolation de Richardson semble améliorer les résultats, particulièrement pour les méthodes d'ordre 2.

**Problème 2** : comment définir la solution de référence ?



## Analyse RE : Développement de Taylor (I)

**Idée 1** : garder deux termes dans le développement de l'erreur

$$f_h(h, C_{\alpha^\circ}, \alpha^\circ, C_r, r) = f_{exact} + C_{\alpha^\circ} h^{\alpha^\circ} + C_r h^r + O(h^{1+\max(\alpha^\circ, r)})$$

où :

- $C_{\alpha^\circ} h^{\alpha^\circ}$  terme dominant de l'erreur d'approximation de la partie **régulière** de la solution ;
- $C_r h^r$  terme dominant de l'erreur d'approximation de la partie **singulière** de la solution.

**Idée 2** :  $h \not\rightarrow 0$ , i.e. travailler avec  $h_i$  fixées  $\{h_1; h_2; h_3\} = \left\{h_1; \frac{h_1}{\tau}; \frac{h_1}{\tau^2}\right\}$  et examiner le comportement du processus d'extrapolation de Richardson lorsque  $C_{\alpha^\circ}/C_r$  varie.

## Analyse RE : fonction modèle (II)

**Adimensionnement**  $\tilde{f}_h = \frac{f_h}{f_{exact}}$  et  $\tilde{h} = \frac{h}{h_1}$

**Fonction modèle**

$$\tilde{f}_h(\tilde{h}, \tilde{C}_{\alpha^\circ}, \alpha^\circ, \tilde{C}_r, r) = 1 + \tilde{C}_{\alpha^\circ} \tilde{h}^{\alpha^\circ} + \tilde{C}_r \tilde{h}^r$$

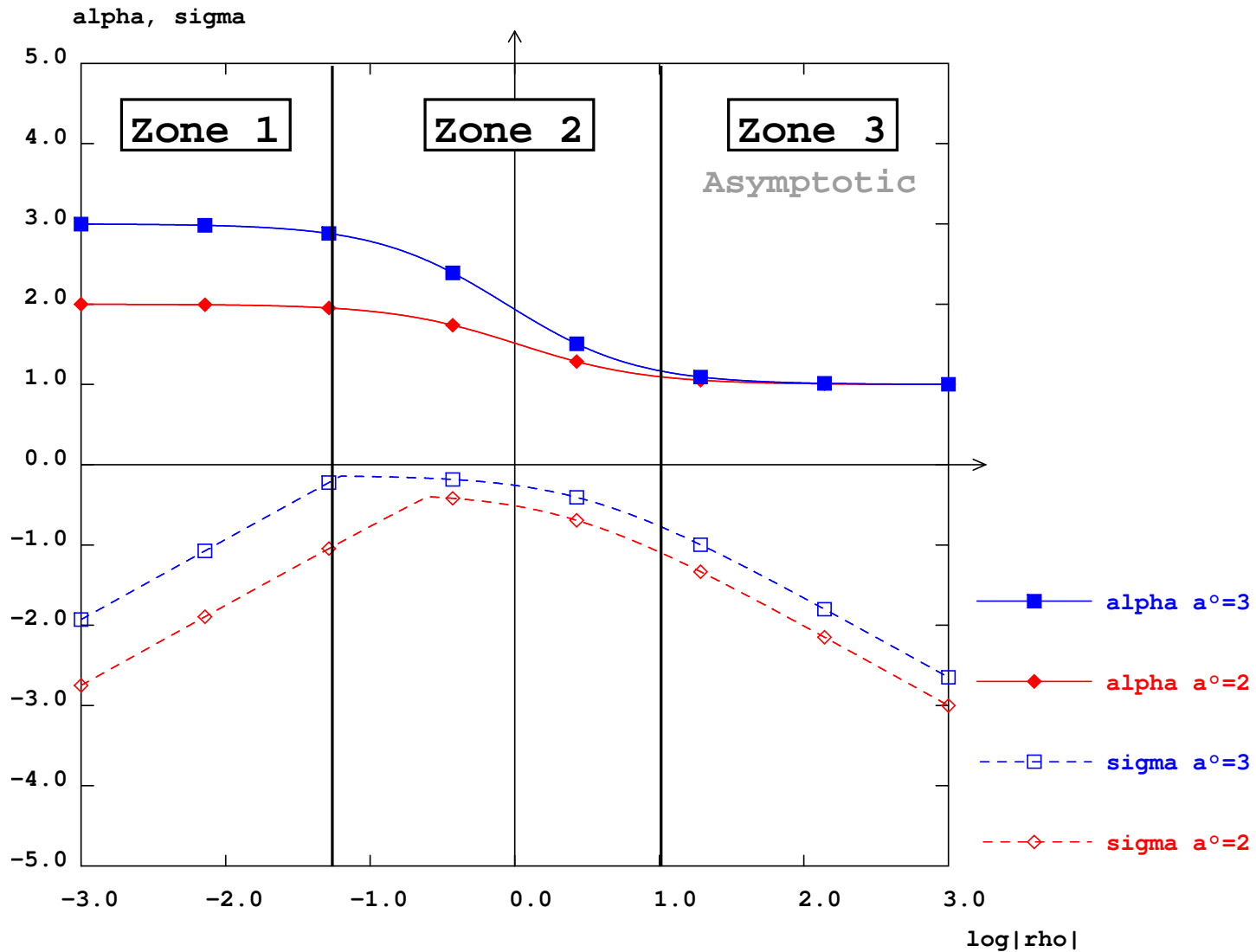
**Paramètres fixés**  $\{h_i\} = \left\{1; \frac{1}{\tau}; \frac{1}{\tau^2}\right\}$ ,  $\tau = 2$ ,  $C_{\alpha^\circ} = 10^{-4} \ll 1$ ,  $r = 1$  ;

**Paramètres variables**  $\rho = C_r / C_{\alpha^\circ}$ ,  $\alpha^\circ = 2$  ou  $3$  ;

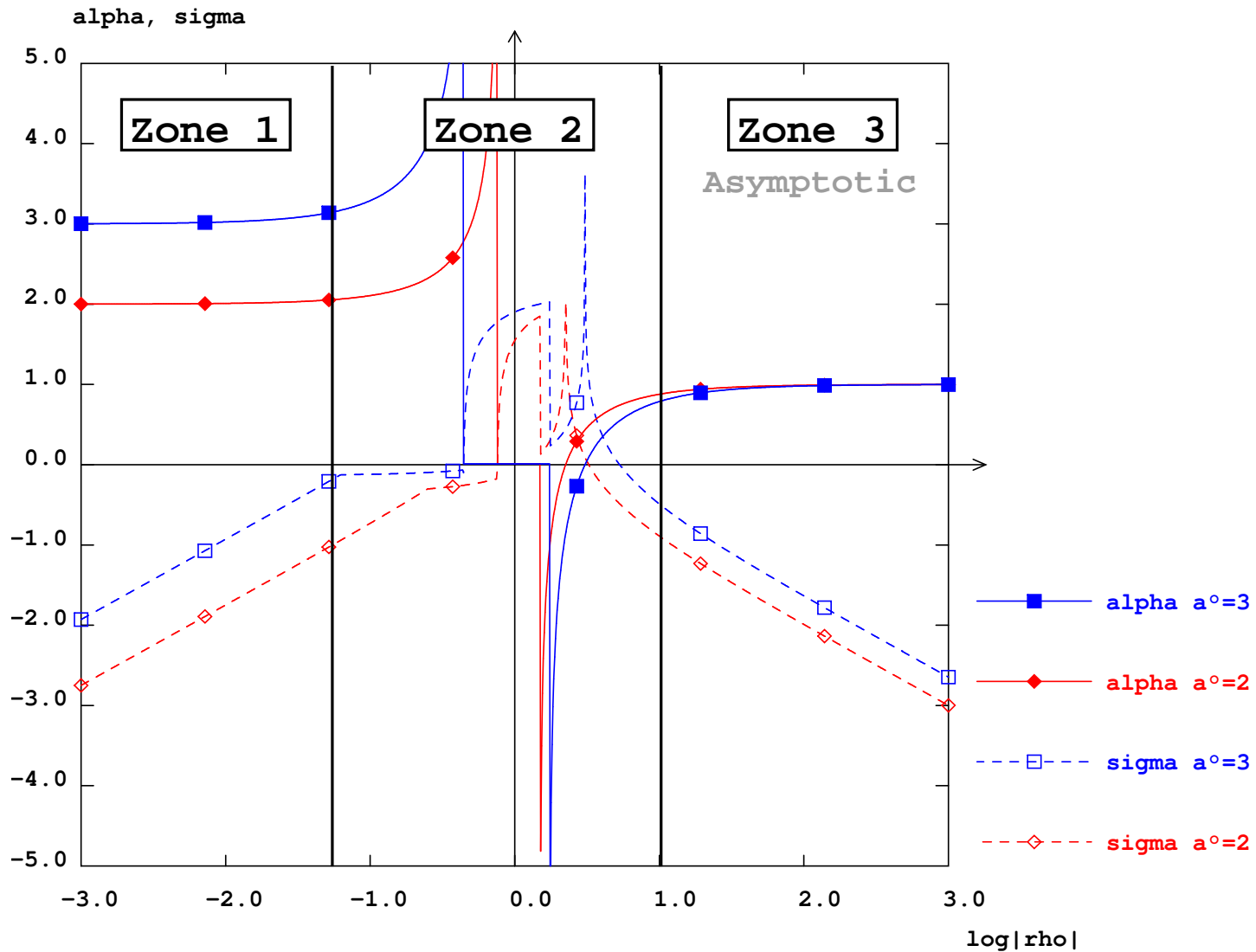
**Quantités regardées**  $\alpha$ , Richardson efficiency ratio  $\sigma$

$$\sigma = \log \frac{|f^{ex} - f_{exact}|}{\max(|C_{\alpha^\circ} h_3^{\alpha^\circ}|, |C_r h_3^r|)}$$

*Analyse RE :  $\rho = C_r/C_{\alpha^{\circ}} > 0$  (III)*



*Analyse RE :  $\rho = C_r/C_{\alpha^0} < 0$  (IV)*



## *Analyse RE : Analyse des graphes (V)*

1. RE réduit efficacement les erreurs dans la zone 3, **mais aussi dans la zone 1** ;
2. En zone 2, le comportement de RE dépend du signe de  $\rho$ , mais l'éventuelle réduction d'erreur est faible ;
3. La zone 2 est plus large pour les méthodes d'ordre 3 que pour les méthodes d'ordre 2 ;
4. RE réduit plus efficacement l'erreur pour les méthodes d'ordre 2 que pour celles d'ordre 3.

## *Analyse RE : Explication des comportements observés (VI)*

- Remarque 1 : **FD1** et **FV3** en zone 1, sauf pour  $T_m$  ;
- Remarque 3 : application de RE plus difficile pour **FE2** et **FE4** (zone 2 large), mais moins d'améliorations à attendre (remarque 4) ;
- Remarque 2 : explication possible du meilleur comportement de **FE2** par rapport à **FE4** pour appliquer RE.

## *Analyse RE : Définition de la solution de référence (VII)*

- Utilisation de la valeur extrapolée si  $1 \leq \alpha \leq 2.5$  pour **FD1** et **FV3** et  $1 \leq \alpha \leq 4$  pour **FE2** et **FE4** ;
- sinon utilisation de la valeur obtenue sur la grille la plus fine ;
- la valeur de référence est définie comme la moyenne arithmétique des 4 valeurs et la marge d'incertitude par la demi-différence des valeurs extrêmes.

## *Conclusion*

- Solution de référence bien documentée, pour un écoulement de convection mixte 3D ;
- Analyse du rôle de la singularité sur l'utilisation pratique de l'extrapolation de Richardson.



## *Perspectives*

- Vérifier que l'analyse effectuée est correcte  $\Rightarrow$  maillages plus fins ;
- Appel à benchmark [Medale and Nicolas, 2006] : cas instationnaire avec une condition de sortie libre plus difficile (2D, 3D ?) ;

$$Pr = 7 \quad Re = 0.1 \quad Ra = 2500$$

- Quantification des erreurs sur  $Nu^{\text{cons}}$ .

*Fin*

Merci de votre attention.

## Bibliographie

- [Strang and Fix, 1988]** Strang, W. and Fix, G. (1988). *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, 2nd edition. chapter 8.
- [Medale and Nicolas, 2006]** Medale, M. and Nicolas, X. (2006). Call for contributions: Towards numerical benchmark solutions for 3d mixed convection flows in rectangular channels heated from below. *International Journal of Thermal Sciences*, 45(4):331 – 333.
- [Nicolas et al., 2011c]** Nicolas, X., Medale, M., Glockner, S., and Gounand, S. (2011c). Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow, part 1: Reference solutions. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 60(5):325–345.
- [Nicolas et al., 2011a]** Nicolas, X., Gounand, S., Medale, M., and Glockner, S. (2011a). Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow, part 2: Analysis of richardson extrapolation in the presence of a singularity. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 60(5):346–369.
- [Nicolas et al., 2011b]** Nicolas, X., Medale, M., Glockner, S., and Gounand, S. (2011b). Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow—detailed technical report. Technical report. [http://www.sft.asso.fr/Local/sft/dir/user-3775/documents/DocumentsDivers/SFT\\_Report\\_benchmark\\_PRB\\_2011.pdf](http://www.sft.asso.fr/Local/sft/dir/user-3775/documents/DocumentsDivers/SFT_Report_benchmark_PRB_2011.pdf).