

# Quelques remarques relatives à l'estimation de champs initiaux de température dans le cas de méthode flash en face avant avec diffusion dans le plan et observation par thermographie IR.

Vigen AYVAYZIAN, Christophe PRADERE, Jean-Christophe BATSALE

Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux, Département TREFLE  
Esplanade des Arts et Métiers 33405, Talence Cedex  
(auteur correspondant : jean-christophe.batsale@ensam.eu)

**Résumé** - Nous proposons de revisiter les méthodes d'estimation de champs de température initiaux à partir de l'observation de champs de température transitoires par thermographie IR au cours d'un processus de relaxation par diffusion. Une voie est de considérer le modèle analytique exact dans l'espace de Fourier et d'implémenter une méthode de type moindres-carrés linéaires, une autre voie consiste à débruiter et réduire l'ensemble de la rafale d'images en appliquant une double décomposition en valeurs singulière (SVD) des images, en séparant les directions  $x$  et  $y$ , puis  $x,t$  et  $y,t$ .

## Nomenclature succincte

$a$  diffusivité thermique,  
 $L, l, e$  longueur, largeur, épaisseur  
 $T$  température  
 $U, V, S$  fonctions, paramètres relatifs à la SVD  
 $x, y, z, t$  Variables d'espace et de temps

*Symboles grecs*  
 $\alpha_n, \beta_m$  fréquence spatiale  
 $\rho c_p$  Chaleur volumique  
 $\lambda$  Conductivité thermique  
 $\theta$  Transformée de Fourier de la température

## 1. Introduction

L'estimation d'un champ de température tridimensionnel initial à partir d'observations de température dans des cas de diffusion transitoire de chaleur est classiquement un problème mal posé. De plus, il nécessite de traiter de grandes quantités d'information (environ 300 000 observables par pas de temps) si on utilise une caméra infrarouge visant les faces externes de l'échantillon.

Nous proposons d'étudier un cas particulier simplifié : l'estimation d'un champ de température 2D au moment d'une excitation flash, à partir de l'observation du champ 2D transitoire en face avant, d'un matériau homogène de forme parallélépipédique auparavant isotherme de température nulle aux bords adiabatiques. Dans ce problème, la recherche du champ de température au moment du flash (uniquement 2D, car non perturbé en profondeur) est équivalent à la recherche de la répartition spatiale de densité de flux de chaleur instantané à une constante multiplicative près. On se place dans un cas où l'excitation est de forme géométrique « séparable » dans le plan  $x-y$ , c'est à dire pouvant se décomposer en un produit de 2 fonctions, l'une uniquement de  $x$  et l'autre uniquement de  $y$ . Le champ de température transitoire résultant est alors aussi séparable en un produit de trois champs de température relatifs à des problèmes de diffusion 1D. Ceci constitue une première approche exacte et simple pour l'étude ultérieure de problèmes tridimensionnels plus généraux.

Nous détaillons dans un premier temps l'approche classique de Fourier dans un cas 1D. Nous comparerons ensuite les différentes voies d'estimation d'une répartition 1D de température initiale par les méthodes de Fourier et par les méthodes SVD. Nous traiterons ensuite quelques exemples 2D dans des cas de transfert 2D ou 3D.

## 2. Position du problème :

On considère une plaque parallélépipédique d'épaisseur  $e$  de largeur  $l$  et de longueur  $L$ . On suppose les bords de la plaque ( $x=0$ ,  $x=L$ ,  $y=0$ ,  $y=l$ ) isolés. L'expérience consiste à observer le champ de température sur la face en  $z=e$  au cours du temps. Le but est de "remonter" au champ de température initial. Le problème direct est décrit par le système suivant:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Avec:  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  en  $x=0$  et  $x=L$ ;  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$  en  $y=0$  et  $y=l$ ;  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$  en  $z=0$  et  $z=e$ .

Si la condition initiale de ce système peut s'écrire:

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x) g(y) h(z) \quad (2)$$

Alors la solution du système peut se décomposer sous la forme d'un produit de trois fonctions (voir [1] *Carslaw et Jaeger, 1956*):

$$T(x, y, z, t = 0) = T_x(x) T_y(y) T_z(z) \quad (3)$$

Ceci revient à étudier 3 problèmes monodimensionnels et à les assembler par la suite. Nous allons donc étudier des cas particuliers monodimensionnels avant de revenir au problème complet.

### 2.1. Cas 1D

Le cas direct présenté ici, consiste à étudier le champ de température dans une plaque mince soumise à un flux de chaleur de type flash, à l'instant initial, et de forme géométrique non uniforme selon  $x$ .

La plaque est supposée suffisamment mince que l'on puisse négliger les phénomènes de diffusion suivant  $z$  (temps d'observation grands devant les temps de diffusion selon  $z$ ). Le système à résoudre s'écrit alors:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

Avec:  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  en  $x=0$  et  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  en  $x=L$

Nous considérons par exemple, une condition de flux instantané imposé sur une des faces de l'échantillon, traduite par une condition initiale, telle que:

$$T=1 \text{ si } b_1 < x < b_2 \quad \text{et} \quad T=0 \text{ partout ailleurs}$$

Une transformée de Fourier spatiale (voir [2] *Maillet et al, 2000*) permet alors une analyse simple du problème, soit:

$$\theta(\alpha_n, t) = \int_0^L T(x, t) \cos(\alpha_n x) dx \quad \text{avec} \quad \alpha_n = n\pi / L ; n \geq 0 \quad (5)$$

Le système (4) devient après transformation:

$$-\alpha_n^2 \theta(\alpha_n, t) = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

La condition initiale devient

$$\theta(\alpha_n, 0) = (\sin(\alpha_n b_2) - \sin(\alpha_n b_1)) / \alpha_n \quad (6-b)$$

La solution du problème direct est alors:

$$\theta(\alpha_n, t) = \exp(-a\alpha_n^2 t) \theta(\alpha_n, 0) \text{ pour tout } n; \quad (7-a)$$

Ou encore dans l'espace réel :

$$T(x, t) = \frac{1}{e} \left[ \theta(\alpha_0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \theta(\alpha_n, 0) \exp(-a\alpha_n^2 t) \right] \quad (7-b)$$

Ou encore sous forme vectorielle dans l'espace de Fourier:

$$\begin{bmatrix} \theta(\alpha_0, t) \\ \theta(\alpha_1, t) \\ \vdots \\ \theta(\alpha_n, t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-a\alpha_0^2 t) & & & \\ & \exp(-a\alpha_1^2 t) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & \exp(-a\alpha_n^2 t) \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\alpha_0, 0) \\ \theta(\alpha_1, 0) \\ \vdots \\ \theta(\alpha_n, 0) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7-c)$$

Soit, encore sous une forme matricielle condensée dans l'espace de Fourier:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \text{diag}(\exp(-\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}^2 t)) \boldsymbol{\theta}(0) \quad (7-d)$$

On constate que la relation liant les deux vecteurs  $\boldsymbol{\theta}(t)$  et  $\boldsymbol{\theta}(0)$  est linéaire. On peut aussi considérer que le vecteur  $\boldsymbol{\theta}(0)$  est un vecteur "paramètre" que l'on cherche à estimer et le vecteur  $\boldsymbol{\theta}(t)$  est un vecteur observable. Le vecteur  $\boldsymbol{\theta}(0)$  peut aussi être rangé dans une observable, mais il est en général bruité et nous proposons d'utiliser la masse d'information contenue dans  $\boldsymbol{\theta}(t)$  pour améliorer l'estimation de  $\boldsymbol{\theta}(0)$ . Nous proposons alors deux voies pour l'estimation de  $\boldsymbol{\theta}(0)$  ou directement la répartition de température  $T(x_i, t = 0)$ . L'une prolonge le formalisme de Fourier qui a permis de présenter le problème direct, l'autre propose une décomposition en valeurs singulières de la masse d'informations en espace et en temps.

### 2.1.1. Estimation de la répartition initiale par la méthode de Fourier

Dans le cas d'expérimentation par thermographie infrarouge, on dispose d'un grand nombre d'images après l'instant initial, la relation matricielle entre le vecteur données à plusieurs instants  $t_j$  et le vecteur paramètres  $\boldsymbol{\theta}(0)$  peut alors s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(0) \\ \boldsymbol{\theta}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}(t_j) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \text{diag}(\exp(-\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}^2 t_1)) \\ \vdots \\ \text{diag}(\exp(-\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}^2 t_j)) \\ \vdots \end{bmatrix} [\boldsymbol{\theta}(0)] = \mathbf{X1} * [\boldsymbol{\theta}(0)] \quad (8)$$

La matrice  $\mathbf{X1}$  est appelée classiquement, matrice de sensibilité. On peut constater que le vecteur paramètre est inclus dans le vecteur de données. On ne peut pas alors pas parler de méthode inverse. Cependant, la technique d'inversion peut permettre de réduire le bruit de mesure sur le paramètre en traitant d'autres données. On suppose que la valeur mesurée  $\hat{\theta}(t_j)$  est reliée à la valeur réelle par la relation

$$\hat{\theta}(t_j) = \theta(t_j) + \mathbf{e}_{\theta(t_j)} \quad (9)$$

Où  $\mathbf{e}_{\theta(t_j)}$  est un vecteur de variables aléatoires "erreurs de mesure".

Si on suppose que  $\mathbf{e}_{\theta(t_j)}$  est de moyenne nulle pour tout  $j$ , si la matrice de covariance du vecteur  $[\mathbf{e}_{\theta(0)} \mathbf{e}_{\theta(t_1)} \dots \mathbf{e}_{\theta(t_j)}]^T$ ; est connue à une constante multiplicative près que l'on notera  $\mathbf{\Omega}$ , si les variables explicatives et le paramètre  $a$  supposé connu sans erreur, on peut appliquer le théorème de Gauss-Markov (voir [3] *Beck et Arnold 1977*) donnant l'estimateur optimal à variance minimale :

$$[\theta(0)]_{VM} = (\mathbf{X1}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X1})^{-1} \mathbf{X1}^T \mathbf{\Omega}^{-1} * [\hat{\theta}(0) \hat{\theta}(t_1) \dots \hat{\theta}(t_j)]^T \quad (10)$$

Le calcul de  $\mathbf{\Omega}$  nécessite de revenir au champ de température dans l'espace réel. Ce champ est mesuré à l'aide de la caméra en  $N_x$  différents points  $x_i$  compris entre 0 et  $L$ , simultanément à l'instant  $t_j$ . Si les erreurs de mesure de température  $T$  sur chaque point  $x_i$  et chaque instant  $t_j$  sont supposées indépendantes et de même écart-type  $\sigma$ , on peut alors exprimer les composantes  $\theta(\alpha_n, 0)_{VM}$ , pour tout  $n$ , du vecteur  $[\theta(0)]_{VM}$  par:

$$\theta(\alpha_n, 0)_{VM} = \frac{\sum_{j=0}^{N_t} \hat{\theta}(\alpha_n, t_j) \exp(-(\alpha_n^2) t_j)}{\sum_{j=0}^{N_t} \exp(-2(\alpha_n^2) t_j)} \quad (11)$$

On pourra vérifier que cette expression reste vraie même si la matrice  $\mathbf{D}$ , comporte des termes différents sur la diagonale. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire que le bruit de mesure soit d'écart-type constant sur chaque fréquence spatiale, par contre l'indépendance des mesures en temps ou en espace doit être vérifiée.

Les termes diagonaux de la matrice de covariance de l'estimateur précédent peuvent s'exprimer par :

$$\text{cov}(\theta(0,0)_{VM}) = \frac{\sigma^2 L^2}{N_x} \left( \frac{1}{N_t} \right) \text{ et } \text{cov}(\theta(\alpha_n, 0)_{VM}) = \frac{\sigma^2 L^2}{2 N_x} \left( \frac{1}{\sum_{j=0}^{N_t} \exp(-2(\alpha_n^2) t_j)} \right) \text{ si } n \text{ non nul.} \quad (12)$$

Ainsi, l'écart type des estimateurs de la température initiale  $\sigma_E$ , est dans l'intervalle suivant:

$$\sigma / \sqrt{N_t} < \sigma_E < \sigma \quad (13)$$

Avant même de présenter des exemples d'application, on peut tirer quelques remarques de ces expressions :

-Si les temps choisis sont proches de 0, on obtient une réduction de l'influence du bruit de mesure de  $\sigma$  à  $\sigma / \sqrt{N_t}$ , ce qui justifie l'utilisation de ce genre d'estimateur.

-Hélas, il est nécessaire de connaître de manière exacte ou avec une estimation préalable, la diffusivité thermique du matériau visé.

-Il est a fortiori nécessaire de ne pas commettre d'erreur de modèle. En général, ce genre de situation expérimentale nécessite pour le moins de considérer des pertes latérales à la plaque (non prises en compte ici).

### 2.1.2. Estimation de la répartition initiale par une décomposition en valeurs singulières

Pour éviter les remarques précédentes, une voie possible est d'utiliser une décomposition en valeurs singulières sur la rafale de température observée directement dans l'espace réel. Ce type de méthode a été appliqué en Contrôle Non-Destructif thermique (voir [4] Rajic, 2002, [5] Bamford et al, 2008).

Considérons une rafale de température  $\hat{T}(x_i, t_j)$  observée à des pas d'espace  $x_i$  et des temps  $t_j$ . On peut considérer que ces données constituent une matrice rectangulaire dont on peut obtenir la décomposition en valeurs singulières, telle que :

$$\hat{T}(x_i, t_j) = \sum_{r=1}^{r_0} U_r^x(x_i) S_r^x V_r^x(t_j) \quad \text{ou de la forme} \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (14)$$

Les propriétés de cette décomposition sont nombreuses (matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  orthogonales, séparation des variables  $x$  et  $t$  donnant une décomposition similaire à la décomposition de Fourier (7-b), très forte décroissance des valeurs singulières contenues dans la matrice  $\mathbf{S}$  rangées par ordre décroissant).

Nous utiliserons ici uniquement les propriétés de filtrage optimal de cette décomposition en tronquant la décomposition à un ordre  $k$  tel que les valeurs singulières prises en compte sont supérieures à la variance du bruit de mesure :  $\sigma^2$ . Il est alors possible d'obtenir une estimation de la distribution initiale:  $\hat{T}(x_i, t_1)$ , filtrée de manière optimale sans aucune connaissance physique du modèle de transfert. Il est à noter que ce genre de filtre a de meilleures performances qu'un filtre qui ne prendrait en compte que la seule distribution spatiale à l'instant initial (moyenne mobile par exemple), puisqu'il tient compte, comme la méthode précédente, des observations transitoires suivant l'instant initial.

## 2.2. Cas 2D

Si on se place dans un cas de condition initiale séparable selon l'expression (2), la solution du problème 2D qui est en général une série double devient alors un produit des deux séries dépendant uniquement de  $x$  et  $t$  pour la première et de  $y$  et  $t$  pour la seconde, telle que :

$$T(x, y, t) = \frac{1}{L} \frac{1}{l} \left[ \theta(\alpha_0, 0, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \theta(\alpha_n, 0, 0) \exp(-a \alpha_n^2 t) \right] \left[ \theta(0, \beta_0, 0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m y) \theta(0, \beta_m, 0) \exp(-a \beta_m^2 t) \right] \quad (15-a)$$

Avec  $\beta_m$  fréquence spatiale équivalente à  $\beta_m$  dans la direction  $y$ .

L'expression (17-a) peut encore s'écrire de manière séparable dans l'espace de Fourier telle que :

$$\theta(\alpha_n, \beta_m, t) = \exp(-a(\alpha_n^2 + \beta_m^2)t) \theta(\alpha_n, \beta_m, 0) = \exp(-a \alpha_n^2 t) \theta(\alpha_n, 0, 0) \exp(-a \beta_m^2 t) \theta(0, \beta_m, 0) = \theta(\alpha_n, 0, t) \theta(0, \beta_m, t) \quad (15-b)$$

L'estimateur dans l'espace de Fourier 2D analogue à l'expression (11) est aussi séparable et donne alors :

$$\theta(\alpha_n, \beta_m, 0) = \frac{\sum_{j=0}^{Nt} \hat{\theta}(\alpha_n, 0, t_j) \exp(-a\alpha_n^2 t_j)}{\sum_{j=0}^{Nt} \exp(-2a\alpha_n^2 t_j)} \frac{\sum_{j=0}^{Nt} \hat{\theta}(0, \beta_m, t_j) \exp(-a\beta_m^2 t_j)}{\sum_{j=0}^{Nt} \exp(-2a\beta_m^2 t_j)} \quad (16-a)$$

Au lieu de :

$$\theta(\alpha_n, \beta_m, 0) = \frac{\sum_{j=0}^{Nt} \hat{\theta}(\alpha_n, \beta_m, t_j) \exp(-a(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t_j)}{\sum_{j=0}^{Nt} \exp(-2a(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t_j)} \quad (16-b)$$

Si les expressions analytiques sont séparables en  $x$  et  $y$  à chaque instant  $t$ , il est alors tentant d'effectuer une Séparation en Valeurs Singulières en  $x$  et  $y$  sur chaque image instantanée telle que :

$$\hat{T}(x_i, y_j, t) = \sum_k U_k(x_i, t) S_k(t) V_k(y_j, t) \quad (17)$$

Dans le cas où l'image ou le champ de température est séparable en  $x$  et  $y$ , la décomposition (19) doit avoir uniquement un terme prépondérant. On peut alors effectuer une seconde décomposition en espace et en temps suivant les directions  $x$  et  $y$  telle que:

$$U_1(x_i, t_j) = \sum_{r=1}^{r_0} U_r^x(x_i) S_r^x V_r^x(t_j) \quad \text{et} \quad V_1(x_i, t_j) = \sum_{r=1}^{r_0} U_r^y(y_i) S_r^y V_r^y(t_j) \quad (18)$$

L'avantage de cette double décomposition est de permettre une réduction de la quantité de données à traiter et d'offrir un spectre plus étalé de valeurs singulières formées du produit :  $S_r^x S_r^y$ .

### 3. Quelques exemples

Même si les méthodes présentent des similitudes (décompositions en séries séparables tronquées) elles sont difficilement comparables en termes de performances vu la quantité de paramètres de réglages dans la méthode de Fourier (par exemple, le choix du nombre de termes de la série de Fourier). On peut se borner à constater que la mise en œuvre de la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) est beaucoup plus pratique et directe que la méthode de Fourier, par le simple fait qu'elle ne nécessite que très peu d'étapes intermédiaires (pas de connaissance de la diffusivité  $a$  ou même du modèle de transfert) et que l'observation du spectre de valeurs singulières par une double décomposition offre une information importante pour les choix de troncatures (séparabilité selon  $x$  et  $y$ , rapport signal-bruit ou rapport de « débruitage »). Les exemples qui suivent sont tirés de [6] (*Ayvayzyan, 2012*).

Considérons le problème décrit en (1) avec  $L=l=10cm$  ;  $\Delta x=\Delta y=L/50$  ;  $b_l=0,3 L,l$  ; ,  $b_l=0,8 L,l$  ;  $\Delta t=0,04s$  ;  $N_t=200$  ;  $n,m \in [1,100]$  ;  $\lambda=1W/m/K$  ;  $\rho c_p=0,1 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/K$  ;  $\sigma=Tmax/10$ . Quelques résultats relatifs à ces conditions sont présentés sur la figure 1.

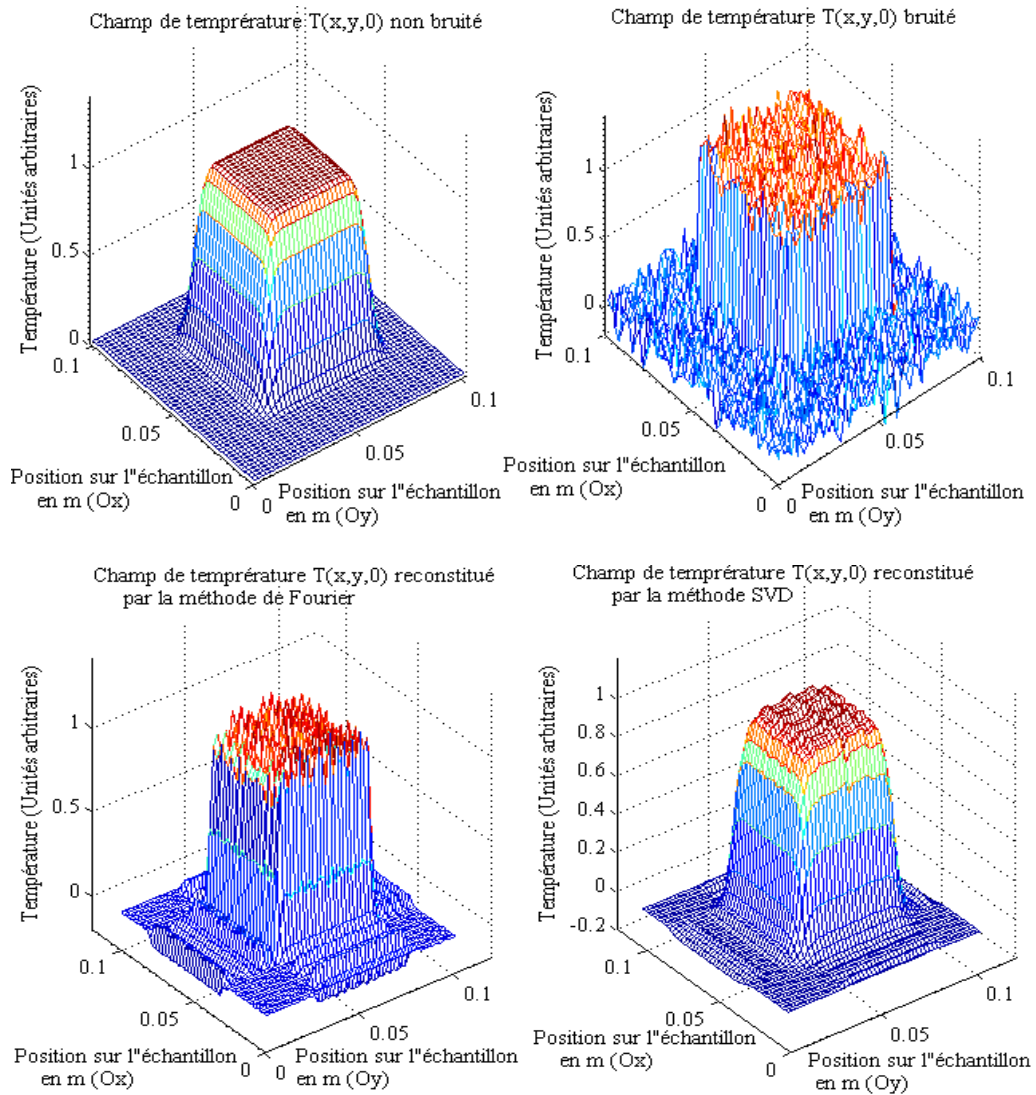


Figure 1 : a-Champ de température initial non-bruité, bruité et estimé par les méthodes de Fourier et SVD avec  $r_0=1$ .

Un exemple extrême où les méthodes de Fourier sont difficilement applicables est le cas du point source qui nécessite un trop grand nombre de termes aux séries, surtout aux temps très courts. On peut considérer la solution 3D transitoire, séparable, du point source impulsionnel en face avant d'un milieu semi-infini telle que :

$$T(x,y,t) = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\exp\left(\frac{-(x-L/2)^2}{4at}\right)}{\sqrt{\pi at}} \frac{\exp\left(\frac{-(y-l/2)^2}{4at}\right)}{\sqrt{\pi at}} \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \quad (19)$$

Les figures 2-a à 2-c montrent que dans un cas où le niveau de bruit est de l'ordre de grandeur du signal, les méthodes SVD peuvent permettre une détection et une reconstruction du profil initial lié à l'amplitude et à la localisation de la source. Ceci plaide pour l'utilisation de méthodes d'imagerie pour la détection bolométrique de très faibles sources radiatives ponctuelles et impulsionnelles, même dans des cas de forts niveaux de bruit.

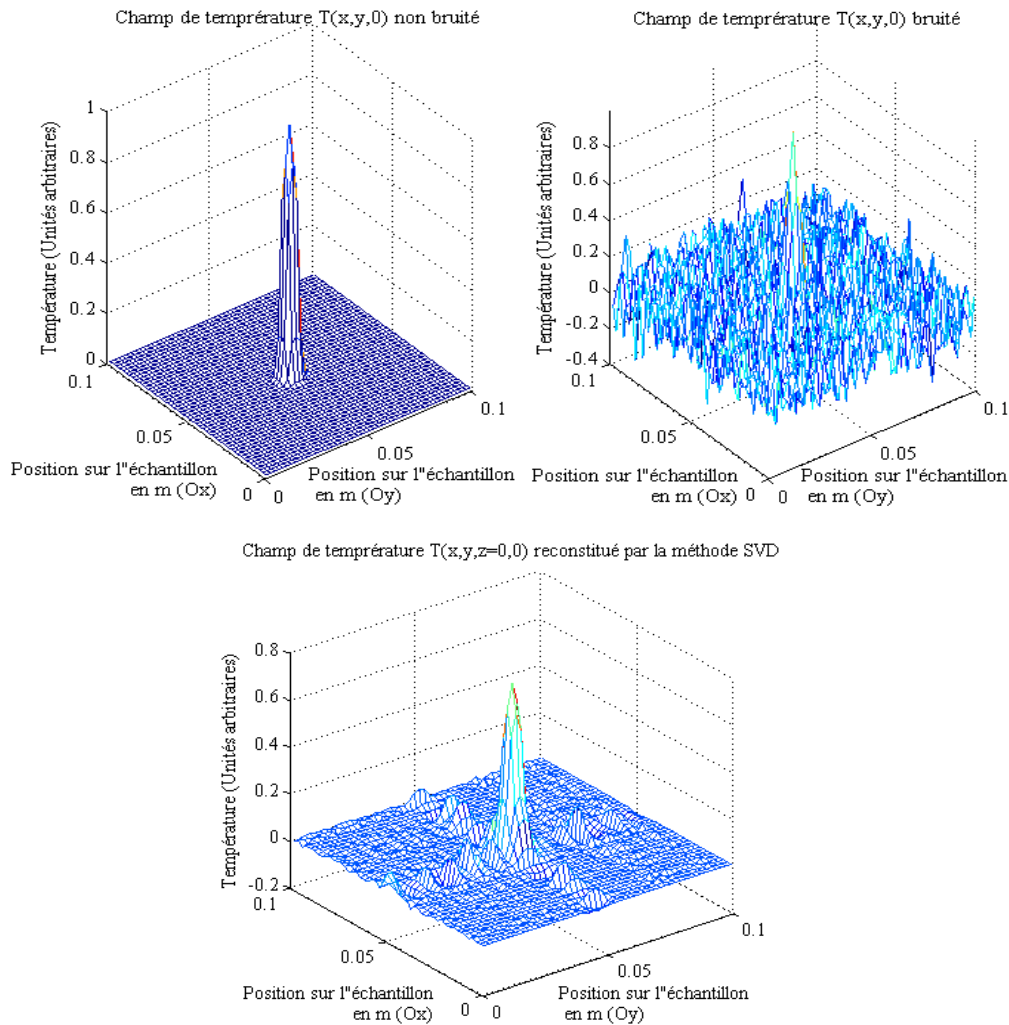


Figure 2 : Champ de température initial (expression (19) avec les propriétés précédentes) non-bruité, bruité (avec une rapport signal/bruit de 1), et estimé par SVD avec  $r_0=3$ .

## Références

- [1] Carslaw HS. et Jaeger JC. ,1959, Conduction of Heat in solids, Oxford Clarendon Press Ed.
- [2] Maillet D., André S., Batsale J.C., Degiovanni A. et Moyne C. 2000 Thermal Quadrupoles – Solving the Heat Equation through Integral Transforms, John Wiley and Sons Ed.
- [3] Beck J. et Arnold A. , 1977, Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley and Sons Ed.,
- [4] Rajic N., 2002, Principal component thermography for flaw contrast enhancement and flaw depth characterisation in composite structures- Composite structures 58(4) , 521-528.
- [5] Bamford M., Batsale J.C., Fudym O., 2008 Nodal and Modal Strategies for Longitudinal Thermal Diffusivity Profile Estimation. Application to the Non Destructive Evaluation of SiC/SiC composites under uniaxial tensile tests, Infrared Physics & Technology, pp 1-13
- [6] Ayvayzyan V., 2012, Etude de champs de températures séparables avec une double décomposition en valeurs singulières. Quelques applications à la caractérisation de propriétés thermophysiques et au contrôle non-destructif, Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux.