

Performance énergétique dans le processus de charge / décharge d'énergie dans un Matériau à Changement de Phase en géométrie sinusoïdale.

Jean BATINA*, Serge BLANCHER, Tarik KOUSKSOU

Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et l'Electricité (SIAME). Université de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue de l'Université, 64000 Pau, France.

(*auteur correspondant : jean.batina@univ-pau.fr)

Résumé - On considère une cellule bidimensionnelle fermée contenant un matériau à changement de phase (MCP) dont la paroi supérieure est refroidie ; la paroi inférieure chauffée est de forme sinusoïdale avec une amplitude variable et les parois verticales latérales sont thermiquement isolées. Ses performances énergétiques sont comparées à celles d'une cellule rectangulaire de même masse et de même longueur, contenant le même MCP et supportant les mêmes conditions aux limites. Ce problème est résolu numériquement en espace par une méthode spectrale – collocation, et en temps par un schéma de Crank - Nicolson.

Nomenclature

c_p	capacité calorifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	z	abscisse, m
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	Symboles grecs	
H_I	hauteur de l'interface solide/liquide, m	β	coefficient de dilatation, K^{-1}
H_L	hauteur de la paroi inférieure de la cellule MCP, m	μ	viscosité dynamique, Nsm^{-2}
H_S	hauteur de la paroi supérieure de la cellule MCP, m	ν	viscosité cinématique ($= \mu/\rho$), $m^2.s^{-1}$
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	θ	temperature, K
L	demi-longueur du domaine, m	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
La	chaleur latente Jkg^{-1}	ω	fonction vorticité s^{-1}
T	polynôme de Chebyshev	ψ	fonction courant $m^2.s^{-1}$
t	temps, s	Indices	
u	vitesse selon z , $m.s^{-1}$	F	Fusion
v	vitesse selon y , $m.s^{-1}$	I	Interface Solide/Liquide
y	ordonnée, m	L	Phase Liquide
		S	Phase Solide
		O	Condition Initiale

1. Introduction

Dans beaucoup d'industries (agro-alimentaire, pharmaceutique, bâtiment, etc.), les MCP sont utilisés pour minimiser les variations de température des denrées alimentaires, médicaments ou tout produit sensible à la chaleur, par exemple dans le transport du sang, ou plus généralement pour stocker de l'énergie et la restituer ensuite. Ils se présentent principalement sous la forme de petites capsules en plastique contenant un MCP approprié. Ces capsules sont placées au voisinage immédiat du produit devant être conservé. La forme de ces capsules et la nature des conditions aux limites appliquées sur les parois extérieures du MCP conditionnent leurs performances énergétiques. L'objectif de ce travail est de simuler numériquement les performances énergétiques d'un MCP donné, dans le cadre simple d'une capsule dont la paroi inférieure chauffée est de forme sinusoïdale (Fig.1).

2. Modèle physique et mathématique

2.1. Équations

Une coupe du domaine d'étude permet de travailler en coordonnées cartésiennes dans un domaine bidimensionnel plan (z, y) (Fig.1). Les écarts de températures considérés sont supposés suffisamment faibles pour justifier l'hypothèse de Boussinesq. Les fluides sont newtoniens, isotropes, et les écoulements laminaires et incompressibles. Les équations du mouvement en formulation (ω, ψ) et les équations d'énergie s'écrivent:

- **Phase solide du MCP.** équation de l'énergie :

$$\rho_s C_{P_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

- **Phase liquide du MCP.** équations de Navier-Stokes et de l'énergie :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - g\beta \frac{\partial \theta_L}{\partial z} \quad \text{avec : } \omega = -\Delta \psi \quad (2)$$

$$\rho_L C_{P_L} \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_L}{\partial z} + v \frac{\partial \theta_L}{\partial y} \right) = k_L \left(\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

- **Interface solide/liquide du MCP.** L'évolution temporelle de la hauteur H_I de l'interface solide/liquide du MCP est donnée par :

$$\rho_s La \frac{\partial H_I}{\partial t} = \alpha_I / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial H_I}{\partial z} \right)^2} \quad \text{avec } \alpha_I = k_L \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial y} \right)_I - k_s \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial y} \right)_I \quad (4)$$

2.2. Conditions aux limites

Les frontières du domaine sont soumises aux conditions aux limites suivantes:

- Adhésion du fluide sur tous les parois solides (phase liquide).
- Interface solide/liquide : $\theta = \theta_F$
- Parois verticales thermiquement isolées
- Paroi supérieure soumise à une température θ_{Haut} constante, avec $\theta_{Haut} < \theta_F$.
- Paroi inférieure chauffée à une température θ_{Bas} constante, avec $\theta_{Bas} > \theta_F$.

2.3. Transformations des variables

Chaque problème est résolu par la méthode spectrale-collocation, en utilisant la méthode de Landau [1, 2, 3] pour transformer le domaine d'étude \mathcal{D} , avec les variables (z, y) , en un domaine carré $\Delta = [-1, 1] \times [-1, 1]$, avec les variables (x, r) .

2.4. Résolution numérique par la méthode spectrale-collocation

Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie sont résolues numériquement en espace par les méthodes spectrales-collocation et intégrées en temps par le schéma de Crank-Nicolson.

La méthode spectrale-collocation [1, 2, 3] consiste à projeter toute fonction inconnue $f(x, r, t)$ sur les bases de fonctions d'essais $(P_j(r), Q_i(x))$ comme suit :

$$f(x, r, t) = \sum_{j=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_r} f_{ij}(t) P_j(r) Q_i(x) \quad (5)$$

où N_x et N_r représentent respectivement les ordres du développement selon les axes x et r .

Pour notre étude, $f(x, r, t)$ représente ψ ou θ . Nous avons choisis des fonctions de base construites à partir des polynômes de Chebyshev [1, 2, 5, 6]. Les bases $P_j(r)$ ou $Q_i(x)$ sont automatiquement générées comme combinaison linéaire des polynômes de Chebyshev [2] :

$$P_j(r) = T_j(r) + \sum_{l=1}^n \alpha_l T_{j+l}(r) \text{ et } Q_i(x) = T_i(x) + \sum_{l=1}^m \beta_l T_{i+l}(x) \quad (6)$$

où n et m représentent respectivement le nombre de conditions aux limites dans les directions verticales r et horizontales x , et $T_i(x)$ est le polynôme Chebyshev de degré i . Les coefficients α_l et β_l sont déterminés par les conditions aux limites. En substituant dans les équations du problème ψ , ω et θ par leurs développements en polynômes de Chebyshev, nous obtenons un système d'équations non linéaires. La méthode de collocation consiste à écrire ces équations en des points spécifiques $(x = x_i, r = r_j)_{\substack{0 \leq j \leq N_r \\ 0 \leq i \leq N_x}}$ du carré $\Delta = [-1, 1] \times [-1, 1]$, appelés points de collocation. Nous avons choisi les points de Chebyshev-Gauss-Lobatto [1, 2]. Le système non linéaires obtenu est linéarisé en espace par l'algorithme de Newton et intégré dans le temps par la méthode de Crank - Nicolson [2].

2.5. Transfert Convectif

Dans le cas d'une température pariétale constante, le coefficient de transfert local s'écrit :

$$\tau_p(x, t) = \frac{\Phi_p(x, t)}{\theta_{Bas} - \theta_F} \quad (7)$$

où Φ_p représente le flux thermique pariétal. Le transfert thermique convectif le long de la paroi chauffée peut être formellement défini par le nombre de Nusselt local $Nu_p(x, t)$ basé sur la demi - hauteur $h_L = \frac{H_I - H_L}{2}$ du domaine liquide. Son expression est donnée par la relation:

$$Nu_p(x, t) = \frac{h_L(x, t) \tau_p(x, t)}{k_L} \quad (8)$$

3. Résultats numériques

Le MCP utilisé correspond à de la paraffine ($\theta_F = 17^\circ C$), initialement sous forme d'un bloc solide, de température uniforme : $\theta_{S_0} = 16^\circ C$. La paroi supérieure du MCP est maintenue à la température constante $\theta_{Haut} = 16^\circ C$ et la paroi inférieure est chauffée à température

constante uniforme $\theta_{Bas} = 22^\circ C$. Les dimensions de la cellule témoin rectangulaire sont : $L = 10^{-2} m$, $H_{s_0} = 5.10^{-3} m$. Les autres cellules à paroi inférieure sinusoïdale, de masse identique à la cellule témoin, ont la même longueur $2L$ que cette dernière ; leur paroi inférieure est représentée par une fonction sinusoïdale H_L , définie par :

$$H_L(z) = \frac{A}{2} [1 + \cos(\pi n_o (z/L))] \quad (9)$$

où n_o est le nombre d'ondulations, égal à 3 ici. Nous faisons varier l'amplitude des ondulations A : $A = eH_{s_0}$, avec e variant de 0% à 60% par pas de 10%.

Pour éviter toute aberration numérique, on suppose à l'instant initial $t = 0$ l'existence d'un film liquide de faible épaisseur parallèle à la paroi inférieure de la cellule.

3.1. Comportement dynamique et thermique du MCP

Dans les premiers instants de chauffage, le comportement spatio-temporel des grandeurs dynamique et thermique est conforme aux résultats classiques du problème de Rayleigh-Bénard. Cependant, cette étude met en évidence un résultat important : le régime conductif est de durée d'autant plus courte que l'amplitude des ondulations sinusoïdales est plus grande. La présence des corrugaisons a donc tendance à stabiliser l'écoulement. Nous analysons ci-après ces différents régimes dans le cas particulier $e = 20\%$.

Le régime conductif

Dans les premiers instants de chauffage ($t < 1500 s$), le transfert de chaleur à travers le fluide se fait uniquement par conduction. Les isothermes sont des lignes parallèles à la paroi inférieure, comme on peut vérifier sur la figure 2. On détecte cependant un faible écoulement dû à la présence des corrugaisons. Il s'agit ici d'une stratification potentiellement instable, ce qui représente l'essentiel du problème classique de Rayleigh-Bénard. Tant que le gradient de température dans le fluide demeure purement vertical, le terme source $g\beta \frac{\partial \theta}{\partial z}$ dans l'équation (2) est petit et l'écoulement observé est la conséquence directe de la forme de la géométrie.

Le régime convectif

A mesure que la température moyenne augmente, le nombre de Rayleigh Ra interne augmente. La stratification devient instable lorsque Ra atteint un seuil critique, de sorte que la moindre perturbation mécanique ou thermique s'amplifie et initie la convection en rompant l'équilibre thermique horizontal. Ce phénomène débute approximativement à l'instant $t = 1500 s$. L'écoulement a pour effet de déformer les isothermes (Fig.2). Au début de cette phase convective, on assiste à une variation brutale, de courte durée, de la température dans tout le fluide, et la cavité présente 6 rouleaux de Bénard quelle que soit la phase considérée : un rouleau dans chaque demi-ondulation. La dynamique de ces rouleaux est la conséquence de l'augmentation de la température moyenne du liquide. La rotation des rouleaux de convection force le liquide à absorber de la chaleur en longeant le bas de la cavité avant de remonter pour la céder ensuite aux couches liquide supérieures [3].

Le régime stationnaire

Conformément à l'évolution classique du problème Rayleigh-Bénard, la température moyenne du fluide caloporteur finit par se stabiliser dans le temps : le MCP atteint le régime

stationnaire, aux environs de $t = 4000 \text{ s}$ (Fig.2). Nous constatons une fois de plus que le nombre et la position des rouleaux au sein la cellule varient peu : un rouleau par demi – ondulation. Seule leur intensité varie dans le temps. Cependant, ce phénomène n'est valable que pour $e \leq 40\%$. Au-delà de cette valeur, la forte profondeur des corrugaisons crée une zone de fluide mort : les rouleaux deviennent plus instables et leur nombre devient variable au cours du temps, comme on le voit sur la figure 3.

3.2. Comparaison avec la cellule témoin et performance énergétique

Nous venons de voir que le comportement temporel dynamique et thermique dans le MCP à paroi chauffée sinusoïdale suit une évolution classique. Les 3 phases thermiques : conductive, convective et stationnaire se succèdent, avec une phase conductive très courte. En revanche, pour la cellule rectangulaire ($e = 0$), les tracés des isothermes et des lignes de courants montrent que le régime conductif dure beaucoup plus longtemps que pour le cas $e > 0$ (Fig.4). Ce résultat est confirmé par la figure 5 montrant l'évolution de la fraction liquide dans le MCP : la présence des ondulations a pour effet de lisser les effets brutaux de changement de régime qui apparaissent pour la cellule rectangulaire. De plus, pour de faibles valeur de e , le changement de pente de la fraction liquide lors du passage de la phase conductive à la phase convective est atteint beaucoup plus loin dans le temps, avec une variation de la fraction liquide beaucoup plus forte. Cet effet de lissage est aussi confirmé par l'étude du nombre de Nusselt (figure 6). La figure 5 montre que la performance énergétique du MCP augmente progressivement avec e , pour atteindre asymptotiquement son maximum lorsque $e = 60\%$. Dans le régime transitoire la cellule rectangulaire est énergétiquement moins efficace. Cependant, l'augmentation brutale de l'énergie cinétique des rouleaux dans la phase convective fait qu'en régime stationnaire, cette dernière dépasse en efficacité toutes les cellules corruguées, comme le prouve également l'étude du transfert convectif (Fig.5).

En définitive, nous voyons que globalement dans le temps, les cellules MCP sont d'autant plus efficaces que la profondeur des corrugaison e est plus grande, avec un effet de stagnation au-delà de $e > 40\%$. Cependant, en régime stationnaire, la cellule rectangulaire témoin est énergétiquement plus efficace.

4. Conclusion

Dans ce travail, des études numériques ont été réalisées afin de comparer les performances énergétiques des cellules MCP chauffées par le bas par le biais de leur géométrie. La méthode numérique spectrale - collocation utilisée appelle les remarques suivantes:

- la précision du présent modèle est élevée
- le code de calcul est relativement simple à mettre en œuvre par rapport aux codes de type différences finies, volumes finis ou éléments finis, par exemple
- le coût de la méthode en terme de temps calcul est très bas.

Cette étude a également permis de mettre en évidence qu'en matière d'efficacité énergétique, la présence des ondulations est bénéfique en régime transitoire. Cependant, à cause d'une dynamique de rouleaux plus grande et plus brutale, la cellule témoin rectangulaire est plus efficace en régime stationnaire.

En dernière analyse, la méthode numérique proposée ici offre l'avantage d'une grande précision. Une de ses originalités est le choix de la base spectrale formée des polynômes de

Chebyshev dans les deux directions, horizontale et verticale. La construction automatique de cette base polynomiale est d'un intérêt certain.

Références

- [1] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral methods in fluids dynamics*, Springer-Verlag, (1988).
- [2] J. Batina, M. Batchi, S. Blancher, R. Creff, C. Amrouche, *Convective Heat Transfer augmentation through vortex shedding in sinusoidal constricted tub*, Num. Methods For Heat and Fluid Flow, n° 3/4, pp. 374-394, (2009).
- [3] A. Hernandez-Guerrero, S.M. Aceves, E. Cabrera-Ruiz, J.C. Baltazar-Cervantes, *Modelling of the charge and discharge processes in energy storage cells*, Energy Conversion and Management, vol.40 U.K., pp. 1753-1763, (1999).
- [4] A.Y. Gelfgat, *Stability and slightly supercritical oscillatory regimes of natural convection in a 8:1 cavity: solution of the benchmark problem by a global Galerkin method*, International Journal of Numerical Methods in Fluids, vol. 44, pp. 135-146, (2004).
- [5] J. Shen, *Efficient spectral-Galerkin method I: direct solvers for the second and fourth order equations using Legendre polynomials*, SIAM J.Sci.Comput, vol.15, n°6, pp. 1489-1505, (1994)
- [6] J. Shen, *Efficient spectral-Galerkin methods II: direct solvers of second and fourth order equations by using Chebyshev polynomials*, SIAM J. Sci. Comput, vol.16, n° 8, pp. 74-87, (1995).
- [7] J. Shen, , *Efficient spectral-Galerkin methods III: polar and cylindrical geometries*, SIAM J. Sci. Comput, vol.18, n°6, 1583-1604, (1997).

5. Présentation des figures

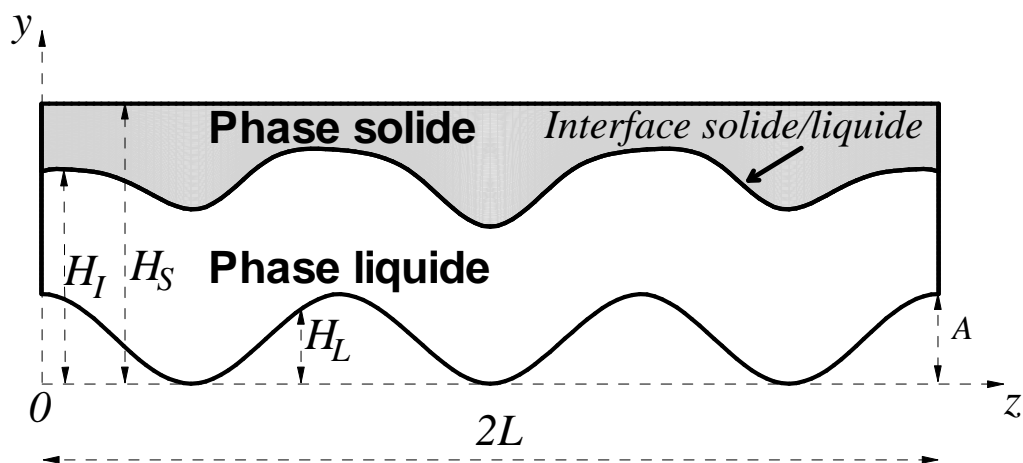


Figure 1: Géométrie d'étude

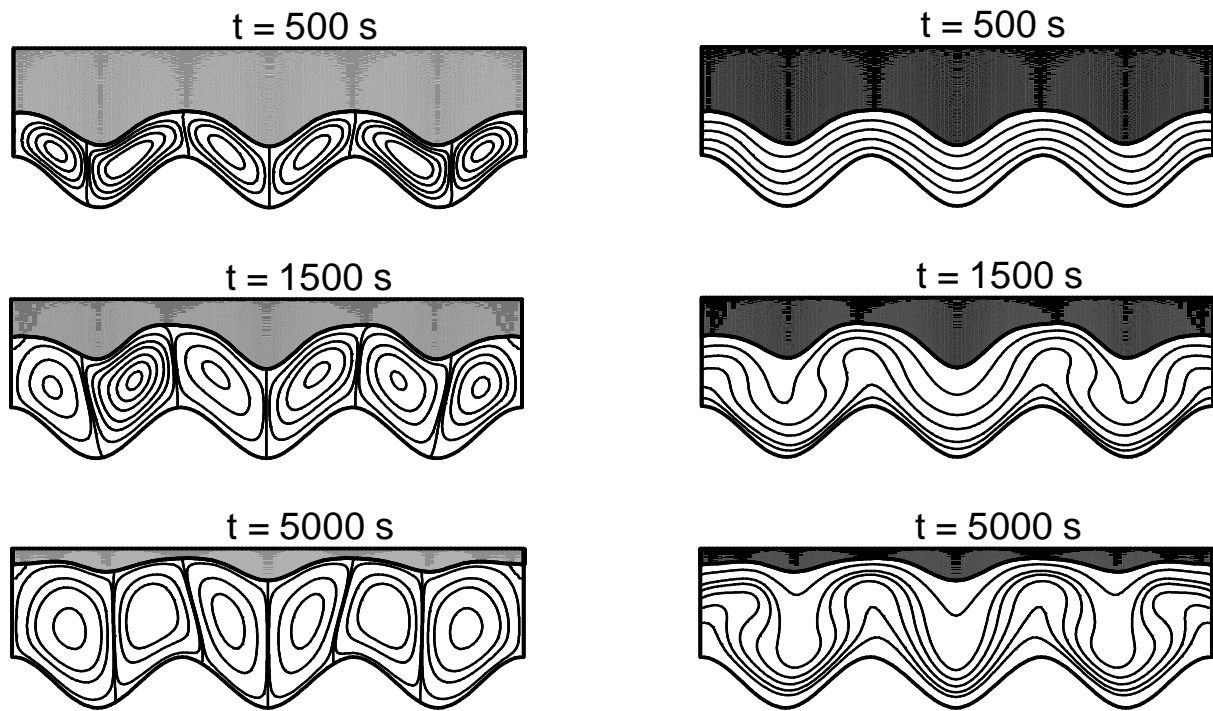


Figure 2 : Evolution temporelle des lignes de courants (à gauche) et des isothermes correspondants (à droite) dans le MCP ($e = 0.2$).

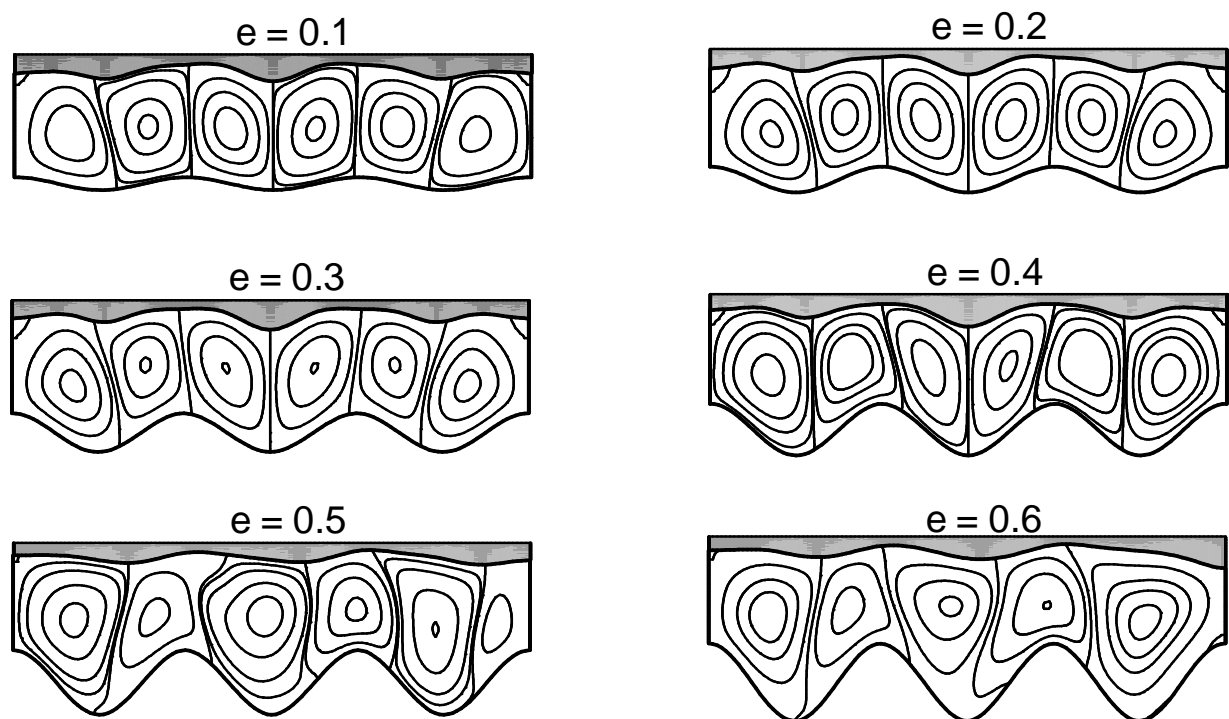


Figure 3 : Lignes de courants à $t = 5000$ s pour différentes amplitudes des ondulations.

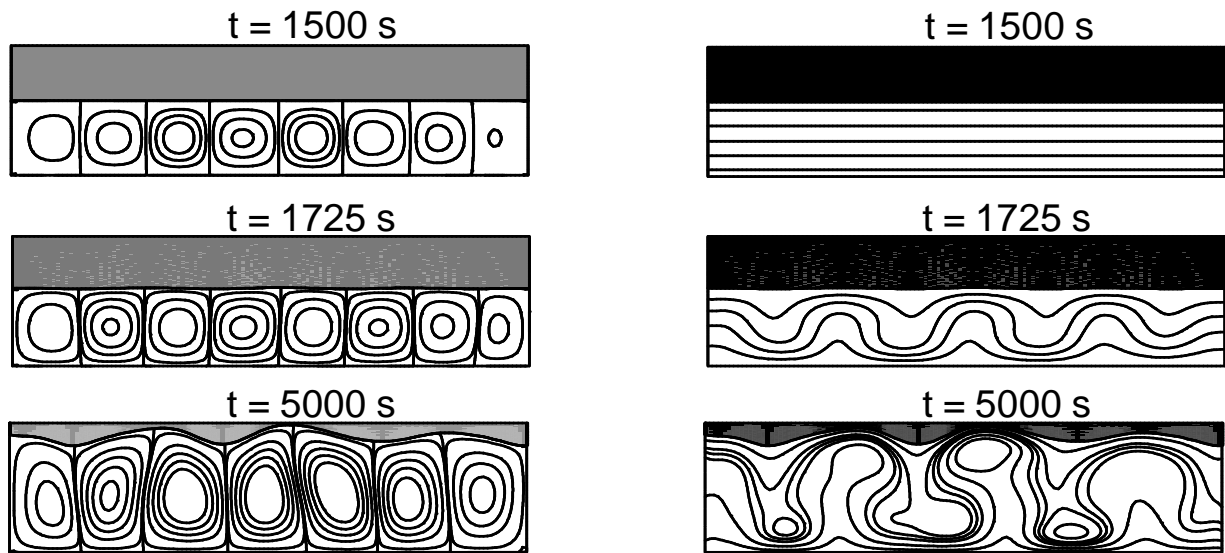


Figure 4 : Evolution temporelle des lignes de courants (à gauche) et des isothermes correspondants (à droite) dans le MCP ($e = 0$).

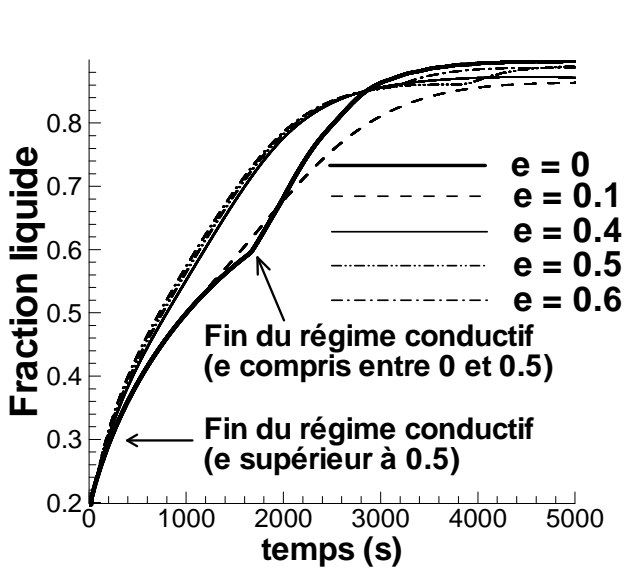


Figure 5 : Evolutions temporelles de la fraction liquide pour différentes amplitudes des ondulations

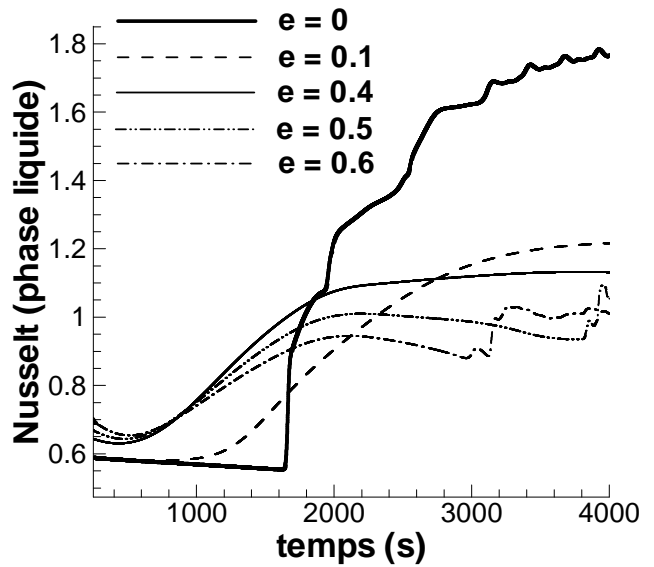


Figure 6 : Evolutions temporelles du Nombre de Nusselt dans le domaine liquide pour différentes amplitudes des ondulations