# Introduction d’une variation aléatoire de température dans le modèle de dégradation thermodynamique d’Arrhenius

**Lambert PIERRAT[1*], Michel FEIDT[2]**

[1]Laboratoire Jean Kuntzmann , (LJK), Dépt. Proba-Stat, UMR CNRS 5224, Université de Grenoble & LJ-Consulting, 21, Allée Jean Wiener, 38 400 Saint Martin d’Hères Cedex, France
[2]Laboratoire LEMTA ,URA CNRS 7563, Université de Lorraine, 2 avenue de la forêt de Haye, B.P. 160,54504 Vandoeuvre Cedex , France
[*](auteur correspondant : <e_zainescu@yahoo.com>

**Résumé –** La loi d’*Arrhenius* détermine la fiabilité des composants électroniques en fonction de la température. Pour estimer leur durée de vie, on réalise des essais de durée limitée. Le facteur d’accélération correspondant est le rapport entre une température d’essai constante, et une température de fonctionnement prévisionnelle. Celle-ci est une variable aléatoire qui, introduite dans le modèle d’*Arrhenius,* conduit à définir une température moyenne statistique. L’approche proposée permet d’améliorer la prévision de durée de vie actuellement basée sur des considérations déterministes.

## 1. Introduction et objectifs

La loi d’*Arrhenius* est à la base des modèles thermodynamiques activés par la température. Celle-ci influence l'évolution des caractéristiques de nombreux matériaux, qu'il s'agisse par exemple de conducteurs métalliques, d'isolants électriques ou de semi-conducteurs. L'évolution de leurs caractéristiques est assimilée à une modification des performances fonctionnelles et plus généralement à une dégradation entraînant une réduction de leur durée de vie. En ce qui concerne les composants électroniques, la vitesse de réaction du processus thermique est assimilée à leur taux de défaillance et ce dernier à l’inverse de leur durée de vie. A cet effet, on réalise des essais dits « accélérés », à des niveaux de température constants afin d'identifier les deux paramètres structurels du modèle d'*Arrhenius* et de quantifier la durée de vie en fonction d'un profil de mission spécifié [1]. Si le profil de température est caractérisé par une distribution statistique indépendante du temps, seul le choix d'une température d'essai « équivalente » (au sens de la dégradation), égale à la température moyenne statistique, permet d'assurer la représentativité de l'essai, à savoir l'égalité des durées de vie moyennes. Dans le domaine de la fiabilité des composants électroniques, on présente un exemple concernant l’estimation du facteur d’accélération permettant de calibrer la durée des essais accélérés représentatifs du profil statistique de température auquel est soumis un composant au cours de son cycle de vie prévisionnel.

## 2. Loi d'Arrhenius

La loi formulée initialement par *Arrhenius* [2], puis étendue ultérieurement par *Eyring* [3], caractérise l’influence déterminante de la température sur la plupart des processus thermodynamiques irréversibles : activation, diffusion, forçage d’une contrainte. Compte tenu de sa généralité, sa genèse apparaît sous diverses formes, dans des domaines aussi différents que la thermodynamique, l’énergétique, la mécanique statistique, la physique moléculaire, etc. En électronique, lorsque la contrainte est uniquement thermique, il s’agit d’un processus de diffusion de particules au sein d’un semi-conducteur, correspondant au franchissement de la barrière d’énergie qui sépare les réactants du matériau lui-même [4]. Au cours du processus temporel, la dégradation initiale est assimilable à une dérive paramétrique assez lente, puis son évolution présente le caractère catastrophique d'une défaillance, lorsque la fonction assignée au composant est compromise. Sous l'angle phénoménologique, si la contrainte thermique est constante et le mécanisme de défaillance unique, on peut relier ce dernier à une caractéristique de fiabilité: le taux de défaillance instantané est proportionnel au taux de réaction du processus [5], lequel s'identifie à l'inverse de la durée de vie [6]. Toutefois, ce qui est valable dans un cadre déterministe ne l'est plus nécessairement lorsque les paramètres de la loi d'*Arrhenius*, en particulier la température, sont des variables aléatoires. L'analyse et les interprétations deviennent alors beaucoup plus complexes et il n'est plus possible de raisonner sur un modèle simple lorsque les conditions précédentes ne sont plus réunies [7]. Dans le secteur des composants électroniques, ces différentes facettes de la loi d'*Arrhenius* entretiennent une confusion sous-jacente, ceci même lorsqu'il s'agit du modèle le plus simple auquel on s'intéresse ici [8].

## 3. Problématique

### 3.1. Formulation de la loi d'*Arrhenius*

Nous considérons le modèle suivant qui, sous l'angle déterministe, relie la durée de vie d'un composant à sa température de fonctionnement:

$$D(T) = D_r \cdot \exp(T_a / T) \quad (1)$$

La forme compacte de cette expression, dictée par un souci de généralité, regroupe l'influence de 3 paramètres :

- ($D_r$) : durée de vie de référence, assimilable à un facteur d'échelle, spécifique du composant considéré,
- ($T_a$) : température d'activation, paramètre caractérisant la cinétique de dégradation thermique,
- ($T$) : température de fonctionnement, imposée au composant par son environnement thermique;

Les deux premiers paramètres du modèle ont un caractère structurel, le troisième un caractère fonctionnel. Les deux températures thermodynamiques sont exprimées en température absolue (*Kelvin*), celle d'activation étant directement liée à l'énergie d'activation du processus par l'intermédiaire de la constante de *Boltzmann*. Le choix d'une température d'activation est naturel dans la mesure où l'argument de l'exponentielle doit être sans dimension. En outre, il évite d'introduire dans la formulation la constante de *Boltzmann*, sachant que dans le domaine électronique, l'énergie d'activation est généralement exprimée en ($eV$), ce qui débouche sur la relation d'équivalence : $E_a = 1\,eV \equiv T_a \approx 11\,605\ K$

### 3.2. Variabilité fonctionnelle

Si dans ce modèle, la température de fonctionnement est une variable aléatoire caractérisant les fluctuations d'un environnement réel, il en sera de même de la durée de vie du composant. Bien qu'en toute généralité, un profil temporel de température réaliste corresponde à un processus stochastique, il est difficile, voire impossible d'en définir la structure et les paramètres au stade préliminaire des spécifications. La pratique en vigueur consiste à idéaliser un profil prévisionnel en une succession de phases, d'amplitudes et de durées différentes [9]. En admettant que le processus stochastique de température est stationnaire et si le temps de corrélation qui le caractérise est nettement plus élevé que la constante de temps thermique du composant, on peut le ramener à une distribution statistique indépendante du temps: en d'autres termes, la température du composant peut "suivre" sans retard celle de son environnement thermique.

En toute généralité, pour une distribution quelconque de la température, la relation fortement non linéaire entre la durée de vie et la température, ne permet pas d'obtenir analytiquement la distribution statistique de la durée de vie ou de son inverse (le taux de réaction du processus thermodynamique), parce que la variable apparaît au dénominateur de l'argument exponentiel. Certains ont tenté de contourner cette dernière difficulté en modifiant la structure du modèle afin de faire apparaître la température au numérateur de l'argument [10] mais il s'agit d'une transformation quelque peu artificielle dont la précision est discutable. Plus récemment, une transformation du type puissance a été proposée [11] certes plus précise, mais dont les applications potentielles restent à explorer.
En pratique, dans le contexte d'estimation de la fiabilité prévisionnelle des composants électroniques, les profils statistiques de température sont associés à deux types de contrainte:

- une contrainte physique: l'environnement thermique correspond à un problème à température finie, ce qui exclut de représenter un profil de mission par des distributions à support infini (loi normale) ou semi -infini (lois exponentielle, de *Weibull*, lognormale, ou autres),
- une contrainte d'information: généralement, au stade des spécifications d'un avant-projet, par manque d'information et/ou parce que la durée de vie assignée est importante, il est difficile, voire illusoire, de préciser la répartition de température dans la plage considérée ;

Il en résulte, qu'une distribution statistique suffisamment générale d'un profil réaliste de température, appartient nécessairement à une famille de lois bornées et unimodales. Il est alors possible de justifier par des considérations d'entropie maximale, le choix d'une distribution uniforme, assurant l'équiprobabilité des valeurs entre les deux bornes [12].

## 4. Moyenne statistique et durée de vie

Les conditions précédentes étant réunies, on peut déterminer analytiquement, à partir de la densité de probabilité $f(T)$ de la température, la densité de probabilité, la fonction de répartition et la valeur moyenne de la durée de vie [13]. On verra plus loin que, dans le cadre de la définition et de la mise en œuvre des essais accélérés, cette valeur moyenne statistique suffit à déterminer une température « équivalente » qui nous intéresse.

### 4.1 Solution analytique exacte

Considérons que la température à laquelle est soumis le composant est une variable aléatoire qui fluctue statistiquement de manière équiprobable entre deux bornes $(T_1, T_2)$ dont le support est défini comme suit :

$$\Delta T = (T_2 - T_1) > 0 \qquad (2)$$

La densité de probabilité correspondante est celle d'une loi uniforme:

$$f(T) = (\Delta T)^{-1} \text{ pour } T \in [T_1, T_2] \quad \& \quad f(T) = 0 \quad \text{pour } T < T_1 \ \& \ T > T_2 \qquad (3)$$

La moyenne statistique de la durée de vie du composant est définie par l'intégrale bornée :

$$\overline{D} = \int_{T_1}^{T_2} D(T) \cdot f(T) \cdot dT \qquad (4)$$

Ce qui en y introduisant (1) & (3) conduit à résoudre :

$$\overline{D} = D_r \cdot (\Delta T)^{-1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \exp(T_a / T) \cdot dT \qquad (5)$$

Cette intégrale peut être transformée de la façon suivante :

$$\overline{D} = D_r \cdot T_a \cdot (\Delta T)^{-1} \cdot \int_{(T_a/T_2)}^{(T_a/T_1)} T^{-2} \cdot \exp(T) \cdot dT \qquad (6)$$

ce qui permet d'obtenir une solution exacte sous la forme:

$$\overline{D} = D_r \cdot T_a \cdot (\Delta T)^{-1} \cdot \left\{ T_a^{-1} \left[ T_2 \cdot \exp(T_a/T_2) - T_1 \cdot \exp(T_a/T_1) \right] + Ei(T_a/T_1) - Ei(T_a/T_2) \right\} \qquad (7)$$

Dans laquelle intervient la fonction « Exponentielle – Intégrale » $Ei(z)$ qui ne s'exprime pas rigoureusement sous forme explicite et dont la manipulation n'est pas toujours aisée [14]. Bien qu'une solution numérique soit toujours envisageable, une solution analytique, lorsqu'elle peut être trouvée, présente l'avantage d'une interprétation plus simple en matière d'analyse des influences paramétriques.

### 4.2. Solution analytique approchée

Dans le cadre des applications pratiques relevant du domaine des composants électroniques, la température d'activation est de l'ordre de $1\,eV$ (soit environ $10^4 K$) et les températures de fonctionnement dépassent rarement 175°C (environ $450\,K$). Il en résulte que l'argument $(T_a/T) >> 1$ , ce qui permet d'utiliser une expression asymptotique de la fonction « Exponentielle – Intégrale » telle que si $z >> 1$ :

$$Ei(z) = z^{-1} \cdot \exp(z) \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \cdot n \cdot \Gamma(n) \right] \qquad (8)$$

La série corrective étant rapidement convergente, on peut introduire dans (7) une approximation limitée au premier ordre, ce qui permet d'obtenir une expression explicite plus facilement exploitable et de précision satisfaisante :

$$\overline{D} \approx D_r \cdot (T_a \cdot \Delta T)^{-1} \cdot \left\{ \left[ 1 + (2T_1/T_a) \right] \cdot T_1^2 \cdot \exp(T_a/T_1) - \left[ 1 + (2T_2/T_a) \right] \cdot T_2^2 \cdot \exp(T_a/T_2) \right\} \qquad (9)$$

Lorsque l'écart de température ( $\Delta T \rightarrow 0$ ), on peut vérifier que l'expression (9) tend uniformément vers (1) par valeurs inférieures, ce qui permet de retrouver la solution correspondant à une information purement déterministe.

Une approximation nettement plus simple est obtenue lorsque l'intervalle de variation de la température est suffisamment large (cas d'une information incertaine), c'est-à-dire lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$(T_2/T_1)^2 \cdot \exp - (T_a \cdot \Delta T / T_1 \cdot T_2) << 1 \qquad (10)$$

Ce qui permet de négliger dans (9) l'influence de la température maximale ( $T_2$ ) par rapport à la température minimale ( $T_1$ ). Alors, par suite de la forte non -linéarité du modèle d'*Arrhenius*, la moyenne statistique de la durée de vie peut s'écrire pratiquement :

$$\overline{D} \approx D_r \cdot (T_a \cdot \Delta T)^{-1} \cdot \left\{ \left[ 1 + (2T_1/T_a) \right] \cdot T_1^2 \cdot \exp(T_a/T_1) \right\} \qquad (11)$$

La précision de cette approximation est meilleure que 2% dès que :
$(T_a \cdot \Delta T / T_1 \cdot T_2) > 4$

$$(T_a \cdot \Delta T / T_1 \cdot T_2) > 4 \qquad (12)$$

## 5. Moyenne statistique de la température

Dans le cadre des essais de fiabilité accélérés [15], il n'est pas justifié de mettre en œuvre des moyens d'essais qui permettraient de synthétiser un profil thermique aléatoire. Il suffit de soumettre les composants à une température constante, supérieure à celle qui correspond à la moyenne statistique de la durée de vie prévisionnelle [16]. Le rapport de ces températures s'identifie à un « facteur d'accélération », scalaire supérieur à l'unité dont l'inverse représente une contraction de l'échelle temporelle [5].
La moyenne statistique de la température à laquelle on se réfère doit assurer une équivalence entre les durées de vie correspondant au modèle d'*Arrhenius*, l'une au profil thermique aléatoire prévisionnel, l'autre à une température d'essai, constante donc déterministe.
Ceci conduit à identifier la solution statistique (9), ou éventuellement (11) si la condition (12) est satisfaite, à la solution déterministe (1), dans laquelle est introduite une température « équivalente » noté ($T_e$). Cette identification permet d'éliminer naturellement le facteur d'échelle ($D_r$) qui apparaît simultanément dans les deux équations:

$$T_e = f(T_a, T_1, T_2) = \left[(T_a) / Ln\left(\overline{D}/D_r\right)\right] \tag{13}$$

Cette température « équivalente » ne dépend plus que d'un paramètre structurel spécifique du composant (température d'activation $T_a$) et de deux paramètres fonctionnels (les bornes $T_1, T_2$ qui définissent l'intervalle de variation statistique de la température).

## 6. Exemple d'application

La partie active d'un composant électronique, caractérisé par une énergie d'activation ($E_a = 0.862\,eV \equiv T_a \approx 10\ 000\,K$), sera soumise au cours de son cycle de vie prévisionnel, à un profil thermique aléatoire stationnaire qui peut se réduire à une distribution statistique indépendante du temps. Au cours des phases de repos, la température minimale est proche de l'ambiante ($\theta_1 = 27°C / T_1 = 300K$) et, au cours des phases d'activité par une température maximale ($\theta_2 = 87°C / T_2 = 360K$). Puisqu'on ne dispose que de cette information minimale, on peut justifier l'hypothèse d'équiprobabilité entre ces deux bornes. La solution analytique approchée (9) qui consiste à limiter la série (8) au premier ordre se traduit par une erreur relative négligeable, soit environ ($\varepsilon \approx 0.2\%$). D'autre part, l'écart de température est suffisamment important ($\Delta T = 60K$) pour justifier l'approximation (11), laquelle se traduit compte tenu de (10), par une erreur relative admissible ($\varepsilon \approx 0.6\%$).
Dans ces conditions, en introduisant (9) dans (13), la température équivalente est égale à ($T_e \approx 317.5K / \theta_e \approx 44.5°C$). Un essai de fiabilité accéléré [17] permet d'assurer l'invariance de la probabilité de défaillance, donc une contraction temporelle, à condition que le mécanisme de dégradation physique reste indépendant de la température [18]. Une contrainte de réalisation consiste à limiter la température d'essai ($T_t$) à une valeur telle que l'hypothèse d'invariance de l'énergie d'activation soit approximativement respectée, ce qui limite pratiquement la valeur maximale du facteur d'accélération ($AF > 1$) si ($T_t > T_e$). Celui-ci est défini comme suit :

$$AF = \exp\left[(T_a) \cdot \left(\frac{T_t - T_e}{T_t \cdot T_e}\right)\right] \tag{14}$$

Si le composant est soumis à une température d'essai constante ($T_t = 398K / \theta_t = 125°C$), on obtient d'après (14): $AF \approx 584$
Ce qui signifie, en terme de dégradation, qu'une durée d'essais de l'ordre de 170 heures (environ une semaine) est représentative d'une durée de vie fonctionnelle de l'ordre de 100 000 heures (environ 11.4 ans).
On notera qu'en l'absence de considération de la température moyenne statistique telle que définie ci-dessus, un choix arbitraire (malheureusement assez habituel) consiste à lui substituer la moyenne arithmétique de la température sur l'intervalle borné, soit ($T_m = 330K / \theta_m = 57°C$). Il en résulterait que le facteur d'accélération serait considérablement minoré ($AF \approx 177$), ce qui conduirait à une durée d'essais excessive (plus de 3 semaines) et consécutivement à une prévision de fiabilité erronée, nettement plus pessimiste.

## 7. Durée de vie et taux de défaillance

La relation simple permettant de d'assimiler le taux de défaillance instantané à l'inverse de la durée de vie, valable lorsque le modèle d'*Arrhenius* est utilisé sous l'angle déterministe est mise en défaut lorsque la température est une variable aléatoire [5]. En effet, on peut vérifier qu'un changement de signe de l'argument exponentiel dans la relation (1) conduit à une solution qui ne s'identifie pas à l'inverse de l'expression (7). En remarquant que les intégrales relatives à la durée de vie et à son inverse correspondent respectivement à une moyenne arithmétique $M(1)$ et à une moyenne harmonique $M(-1)$, un argument plus mathématique résulte d'une application de l'inégalité de *Hölder* [19] à ces moyennes généralisées :

$$\left\{ \frac{1}{<(1/D)>} \right\} = M(-1) < \{ < D > \} = M(1) \qquad (15)$$

Il arrive qu'on trouve dans la littérature une utilisation inconsidérée de cette relation inverse entre durée de vie et taux de défaillance, ce qui peut conduire à des résultats numériques contestables [20].

## 8. Conclusions et prolongements

Lorsque la température est associée à une autre contrainte physique, le modèle de base d'*Arrhenius* intervient toujours dans un modèle de dégradation étendu. En ce qui concerne la variabilité des paramètres fonctionnels, il existe des modèles climatiques plus sophistiqués basés sur des informations suffisantes, dans lesquels sont considérées des variations temporelles périodiques associées à des variations aléatoires de température et d'humidité [21]. L'approche proposée est à la fois plus simple dans la mesure où elle est plus parcimonieuse (quantité d'information minimale) et différente au sens de l'indépendance temporelle (processus statistique et non stochastique). En matière de fiabilité des composants électroniques, sa mise en œuvre permet d'améliorer l'estimation du facteur d'accélération relatif à des essais accélérés combinant température et humidité [17], lorsque ces deux paramètres climatiques sont affectés simultanément et indépendamment d'une variabilité naturelle [22]. Afin de mieux estimer le facteur d'accélération, on a montré la nécessité de tenir compte de la moyenne statistique de la température au lieu de la moyenne arithmétique, cette dernière conduisant à des écarts de prévision erronés. Cette approche lève une difficulté à laquelle les praticiens se trouvent habituellement confrontés lorsqu'ils doivent définir des plans d'essais à la fois efficaces (fournissant des informations statistiquement acceptables) et économiques (une durée minimale associée à un facteur d'accélération maximal).Le développement du modèle statistique a permis de mettre en évidence les limites de l'approche déterministe actuellement en vigueur [9], en particulier l'impossibilité d'assimiler un taux de défaillance instantané à l'inverse de la durée de vie lorsque la température est une variable aléatoire. Les prolongements envisagés sont d'ordres différents : d'une part introduire simultanément dans le modèle de base des variabilités à la fois fonctionnelle (température) et structurelle (énergie d'activation), d'autre part introduire dans le modèle étendu la variabilité de la contrainte associée.

**Références**

[1] L. Pierrat, F. Bayle, « Validation et personnalisation de la fiabilité prévisionnelle : apports conjoints des essais et du retour d'expérience », *Essais Industriels*, N° 44, 15-19, 2008

[2] S. Arrhenius, « Über die Reaktion-geschwindigkeit bei der Inversion vor Rhorzucker durch Sauren », *Z. Phys. Chem.* , 4, 1889

[3] S.Glasstone, K.J.Laidler, H.E.Eyring, *«The Theory of Rate Processes»*, Mc Graw Hill, 1941

[4] R.E. Weston, H.A. Schwarz, *«Chemical Kinetics »*, Prentice Hall, Engl. Cliffs, New York, 1972

[5] D.J. Klinger, « Failure time and rate constant of degradation : an argument for the inverse relationship », *Microelectr. Reliab.*, Vol. 32, N° 7, 987-994, 1992

[6] W. Siebrand, *«Nonradiative Processes in Molecular Systems»*, Part A, Dynamics of Molecular Collisions, W.H. Miller (ed), Plenum, New York, 1976

[7] I. Oppenheim, K.E. Schuler, G.H. Weiss, « Stochastic and Deterministic Formulation of Chemical Rate Equations », *Journ. of Chem. Physics*, Volume 50, Number 1, 460-466, January 1969

[8]M. Ostermann, « We still have a headhache with Arrhenius », (technical brief), *Electronics Cooling*, Volume7, N°1, 53-54, February 2001

[9] Guide FIDES, *«Méthodologie de fiabilité pour les systèmes électroniques »* , Délégation Générale pour l'Armement (DGA), version 2009

[10] V.M. Montsinger, " Loading Transformers by Temperature", *AIEE Transactions*, Volume 49, 293-297, April 1930

[11] L. Pierrat, F. Bayle, « Transformation puissance pour la forme exponentielle de la loi d'Arrhenius », Session modèles de dégradation, *JFMS 2012*, Aix les Bains, 4-5-6 Juin 2012

[12] A.Papoulis, *«Probability,Random Variables and Stochastic Processes »*, 2nd Edit., Chapter 15, 500 -544, Mc Graw-Hill Int. Edit., 1984

[13] L. Pierrat, « Probabilistic analysis of the *Arrhenius* model subjected to a statistically bounded temperature distribution », (short communication), to be submitted for publication in *IJPE*, 2013

[14] Jahnke, Emde, Lösch, *«Tafel Höherer Funktionen »*, Ab.II, B.G. Teubner, Verlag, Stuttgart, 1960

[15] W. Nelson, *«Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis »*, Wiley, New York, 1990

[16] « Accelerated Testing of Systems and Assemblies », System Reliability Center, *Alion Science and Technology*, 1- 4, 2004

[17] « Application Specific Qualification using Knowledge Based Test Methodology », JEDS 04, *Jedec Solid State Technology Association*, January 2004

[18] I.M. Sedjakin, « A physical principle in the reliability theory », (in Russian), *Izv. Akad. Nauk. Tekh. Kibernetika* (USSR), N° 3, 80-87, 1966

[19] M. Abramowitz, *«Elementary Analytical Methods »*, in Handbook of Mathematical Functions, M. Abramowitz & I.Stegun (edit), Applied Mathematics, NBS Series 55, 10th.edition, 1972

[20] A. Bronfman, « Influence of the fluctuation of the ambient temperature on the lifetime of metal oxide arresters », (correspondence), *IEE Proc. C*, Vol. 136, N°4, 55-56, January 1989

[21] D. Bresse, M. Chaplain, A. Marache, « Random temperature and humidity models in Atlantic environment », (preprint), submitted for publication (*Eur. J. of Envir. & Civil Engng,*), 2011

[22] L. Pierrat, « Estimation du facteur d'accélération température-humidité dans le cas d'un profil climatique aléatoire », Papier N° 80, Climatic Session, *Vishno Symp.*, Clamart (France), July 2012