

# Etude numérique du transfert thermique au sein d'une cavité carrée remplie d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéofluidifiant

Nabila LABSI, Youb Khaled BENKAHLA\*, Abdelkader BOUTRA

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés,  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene,  
B.P. 32 El-Alia Bab Ezzouar 16111 – Alger – Algérie.

\*(auteur correspondant : youbenkahla@yahoo.fr)

**Résumé** – Le présent travail consiste en l'étude numérique du transfert thermique en modes de convection mixte et naturelle au sein d'une cavité carrée entièrement remplie d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéofluidifiant. Les parois horizontales de la cavité sont fixes et adiabatiques alors que les parois verticales sont mobiles et différentiellement chauffées. L'analyse de l'influence du nombre de Herschel-Bulkley, sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement montre que la l'intensité de la viscoplasticité du fluide a un effet considérable sur le transfert thermique quelque soit le type de convection considéré.

## Nomenclature

|                   |  |                       |   |
|-------------------|--|-----------------------|---|
| $Bn$              | nombre de Bingham, $=\tau_0 H / \mu_0 v_p$   | $P$                   | pression, $Pa$  |
| $C_p$             | chaleur spécifique, $J kg^{-1} K^{-1}$   | $P$                   | pression réduite  |
| $H$               | dimension de la cavité, $m$  | $Pr$                  | nombre de Prandtl, $K C_p v_p^{n-1} / k H^{n-1}$  |
| $HB$              | nombre de Herschel-Bulkley, $=\tau_0 H^n / K v_p^n$  | $Re$                  | nombre de Reynomds, $=\rho_0 v_p^{2-n} H^n / K$   |
| $Gr$              | nombre de Grashof, $=\rho_0^2 g \beta H^3 (T_c - T_f) / K_0^2$   | $T$                   | température du fluide, $K$  |
| $k$               | conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$  | $T_c$                 | température de la paroi chaude, $K$   |
| $K$               | consistance du fluide, $kg m^{-1} s^{-n-2}$  | $T_f$                 | température de la paroi froide, $K$   |
| $m$               | paramètre de croissance exponentielle, $s$   | $U$                   | vitesse longitudinale réduite, $= u/v_p$  |
| $M$               | paramètre réduit de croissance exponentielle   | $V$                   | vitesse transversale réduite, $= v/v_p$   |
| $n$               | indice d'écoulement du fluide  | $v_p$                 | vitesse de la paroi mobile, $m s^{-1}$  |
| $Nu_c$            | nombre de Nusselt local relevé sur la paroi chaude, $= \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big _{x=0}$                 | $X$                   | coordonnée horizontale réduite, $= x / H$   |
| $Nu_f$            | nombre de Nusselt local relevé sur la paroi froide, $= \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big _{x=l}$                 | $Y$                   | coordonnée verticale réduite, $= y / H$   |
| $Nu_{moy}$        | nombre de Nusselt moyen, $= 0,5 (\overline{Nu}_c + \overline{Nu}_f)$   | <i>Symboles grecs</i> |   |
| $\overline{Nu}_c$ | nombre de Nu moyen évalué sur la paroi chaude, $= \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{x=0} dY$ | $\beta$               | coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$ , $= -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ |
| $\overline{Nu}_f$ | nombre de Nu moyen évalué sur la paroi froide, $= \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{x=l} dY$ | $\dot{\gamma}$        | taux de cisaillement, $s^{-1}$  |
|                   |  | $\dot{\gamma}^*$      | taux de cisaillement réduit   |
|                   |  | $\eta_{app}$          | viscosité effective adimensionnelle   |
|                   |  | $\mu_0$               | viscosité plastique, $kg m^{-1} s^{-1}$   |
|                   |  | $\rho_0$              | masse volumique de référence, $kg m^{-3}$   |
|                   |  | $\tau_0$              | contrainte seuil de cisaillement, $Pa$  |
|                   |  | $\theta$              | température réduite, $= (T - T_f) / (T_c - T_f)$  |

## 1. Introduction

La convection mixte dans les cavités est un sujet de recherche de grande importance vue sa présence dans différentes applications industrielles telles que : le refroidissement des composants électroniques et les pertes thermiques dans les collecteurs solaires. Plusieurs

travaux ont traité de ce sujet, en particulier lorsqu'il s'agit d'un fluide newtonien. Par contre et à notre connaissance, peu de travaux ont traité du cas des fluides viscoplastiques. Frey et *al.* [1] ont entrepris une étude numérique par le biais de la formulation GLS (Galerkin least-squares) sur le transfert thermique au sein d'une cavité mobile remplie d'un fluide de Bingham. En considérant le même type de fluide, Turan et *al.* [2] ont examiné la convection naturelle au sein d'une cavité différentiellement chauffée. Ils ont analysé l'effet des nombres de Bingham, de Rayleigh et de Prandtl sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique.

L'objectif de la présente étude est d'analyser le transfert thermique en modes de convection mixte et naturelle au sein d'une cavité remplie d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéofluidifiant ( $n < 1$ ) et ce, en examinant, pour les deux modes de transfert thermique, l'effet de la viscoplasticité du fluide sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique.

## 2. Formulation mathématique

Considérons une cavité carrée différentiellement chauffée et à parois verticales mobiles (figure 1). Cette cavité, dont les parois horizontales sont adiabatiques, est entièrement remplie d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéofluidifiant. Les propriétés rhéologiques et physiques de ce fluide sont supposées constantes et uniformes à l'exception de la masse volumique dans le terme de poussée, pour laquelle l'approximation de Boussinesq est adoptée :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_c)] \quad (1)$$

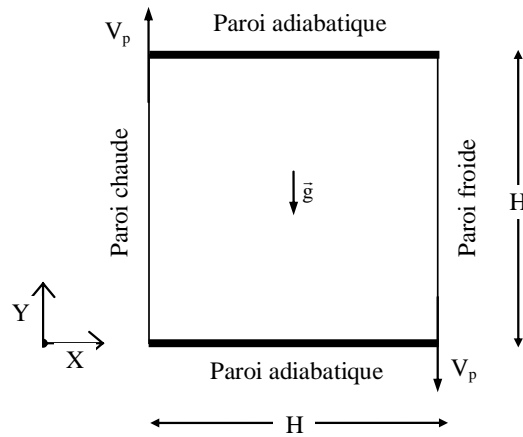


Figure 1 : Schématisation du problème physique.

Les équations générales de conservation à savoir, l'équation de continuité, les équations de l'impulsion suivant  $X$  et  $Y$  et l'équation de l'énergie, sont données sous leur forme adimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( 2\eta_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \eta_{app} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) \right) \quad (3)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \eta_{app} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 2\eta_{app} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + Ri \theta \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr Re} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (5)$$

Le fluide de Herschel-Bulkley est décrit par la loi rhéologique suivante :

$$\begin{cases} \tau = K \dot{\gamma}^n + \tau_0 & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (6)$$

Dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faible vitesse de cisaillement, les auteurs [3,4] recommandent d'utiliser la loi constitutive suivante proposée par Papanastasiou :

$$\eta_{app} = \dot{\gamma}^{*n-1} + \frac{HB}{\dot{\gamma}^*} \left[ 1 - \exp\left(-M \dot{\gamma}^*\right) \right] \quad (7)$$

M est un paramètre adimensionnel qui représente la croissance de l'exponentielle ( $M = mv_p/H$ ). Ces auteurs proposent de prendre  $m = 1000$  s.

Pour pouvoir résoudre les équations (2-5), des conditions aux limites sont prises en considération. Ces conditions sont données, sous leur forme adimensionnelle, comme suit :

Au niveau de la paroi adiabatique :  $U = V = 0, \partial\theta/\partial Y = 0$

Au niveau de la paroi chaude :  $U = 0, V = 1, \theta = 1$

Au niveau de la paroi froide :  $U = 0, V = -1, \theta = 0$

### 3. Modélisation numérique et validation du code de calcul

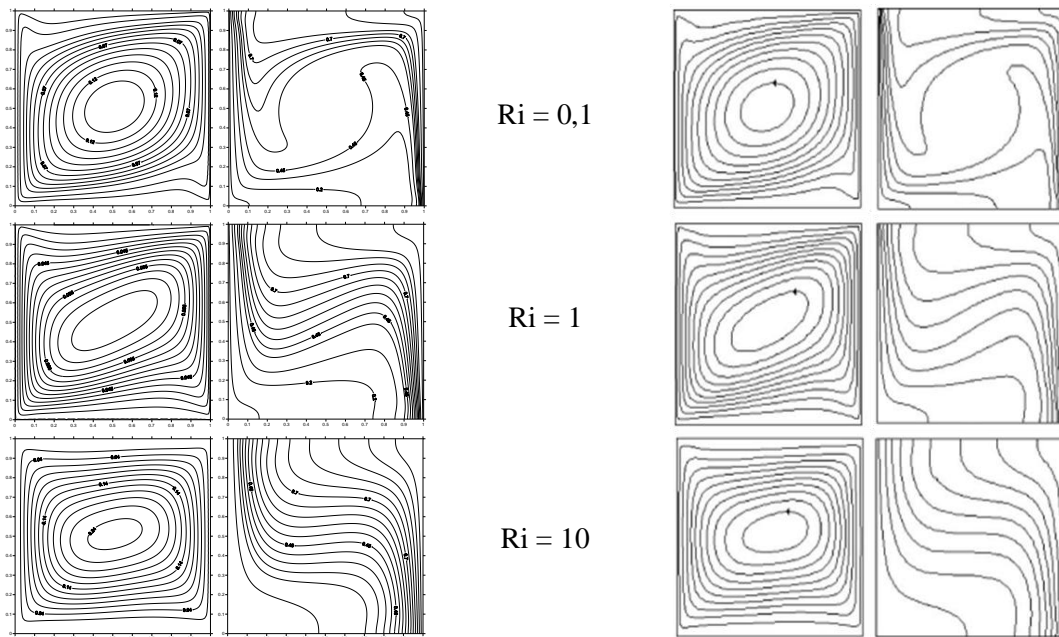
Les équations gouvernantes (2-5), en considérant les conditions aux limites associées, sont résolues par le biais de la méthode des volumes finis proposée par Patankar [5]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques, qui sont résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER et ce, en adoptant un maillage 111x111 suivant X et Y.

Le code de calcul élaboré est validé après comparaison de nos résultats avec ceux de Oztop et Dagtekin [6] pour le cas d'un fluide newtonien ( $n = 1, \tau_0 = 0$ ), l'air en l'occurrence, et avec ceux de Mitsoulis et Zisis [3] pour le cas du fluide de Bingham ( $n = 1, \tau_0 \neq 0$ ). Cette comparaison représentée sur les figures 2 et 3, respectivement, montre une bonne concordance entre les résultats.

### 4. Résultats et discussion

L'étude entreprise concerne l'analyse de l'effet de la viscoplasticité du fluide, représenté par le nombre de Herschel-Bulkley, sur la structure des lignes de courant, des isothermes et sur l'évolution du nombre de Nusselt relevé sur la paroi chaude. Cette analyse est effectuée pour le cas de la convection mixte ( $Ri = 1$ ) et celui de la convection naturelle dominante ( $Ri = 10$ ). Il est à rappeler que le nombre de Herschel-Bulkley représente le rapport entre la contrainte seuil et la contrainte de cisaillement.

Les figures 4 et 5 illustrent les lignes de courant (a) et les isothermes (b) pour, respectivement, le cas de la convection mixte ( $Ri = 1$ ) et le cas de la convection naturelle dominante ( $Ri = 10$ ) et ce, pour différentes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley. Les lignes de courant montrent l'entraînement du fluide dans un sens de rotation antihoraire, induit par le mouvement de translation rectiligne, uniforme et opposé des deux parois verticales (droite et gauche). Ce sens de rotation est également induit par le chauffage de ces deux parois qui entraînent, pour le cas de la convection naturelle dominante, un mouvement ascendant du fluide chaud (paroi gauche) et un mouvement descendant du fluide froid (paroi droite) et ce, sous l'effet des forces de poussée.



Présente étude Oztop et Dagtekin [6]  
 Figure 2 : Lignes de courant et isothermes pour différentes valeurs du nombre de Richardson.  $Pr = 0,7$  ;  $Gr = 10^4$  ;  $HB = 0$  ;  $n = 1$ .

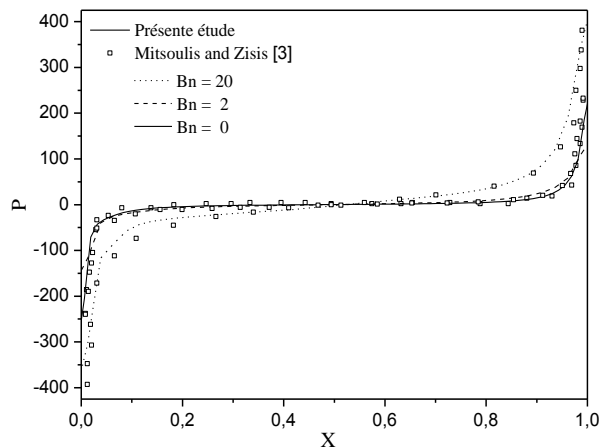
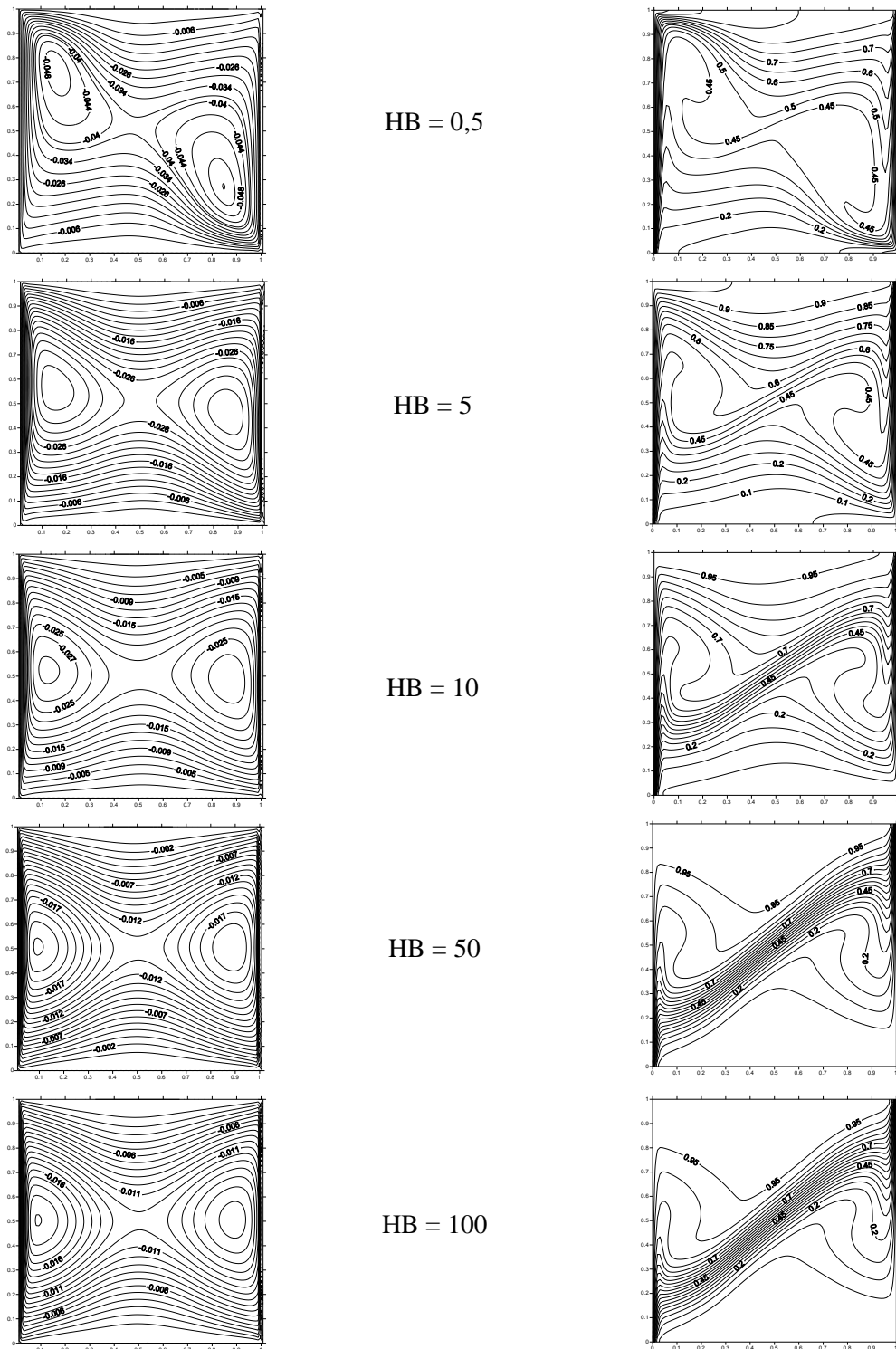


Figure 3 : Pression relative le long de la paroi mobile pour différentes valeurs de  $Bn$ .

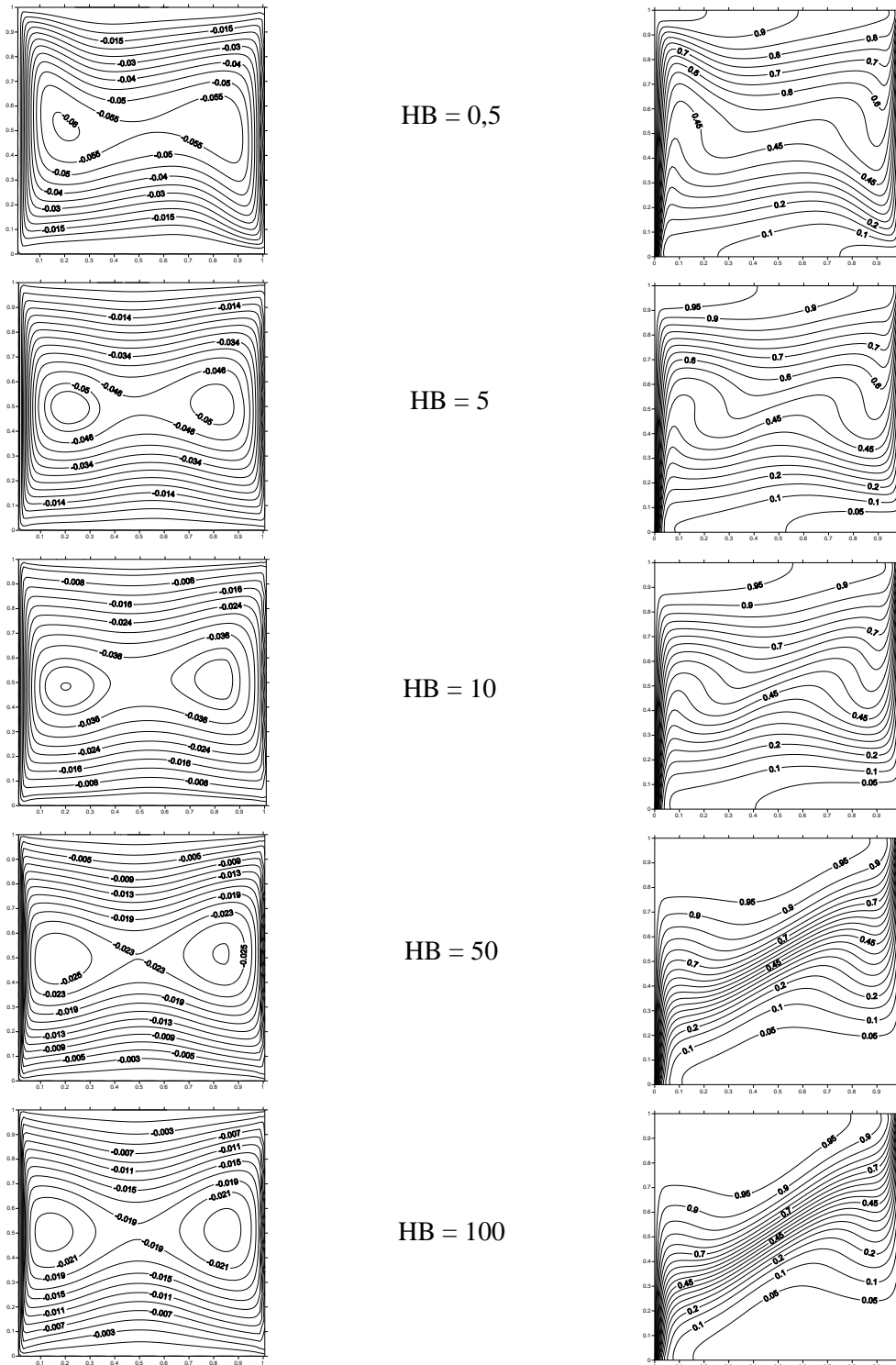
Pour les deux modes de convection considérés et quel que soit la valeur du nombre de Herschel-Bulkley, nous remarquons la formation de deux cellules adjacentes aux parois verticales. Ces deux cellules sont centrales pour toutes les valeurs du nombre de Herschel-Bulkley à l'exception du cas  $HB = 0,5$  relatif à la convection mixte (figure 4-a) pour lequel, ces cellules sont tirées vers le haut du côté gauche de la cavité et vers le bas du côté droit de celle-ci. Ceci pourrait être expliqué par le fait que la viscoplasticité du fluide n'est pas très importante pour  $HB = 0,5$  et aussi que dans le cas de la convection mixte, l'effet du mouvement des parois verticales reste assez considérable.

L'effet constaté sur les lignes de courant se répercute sur la structure des isothermes, illustrées sur les figures 4-b et 5-b. En effet, l'intensité de la convection naturelle entraîne l'élévation de grandes quantités de fluide chaud qui seront, par la suite, transportées vers la face opposée (froide). Il en résulte une déformation des isothermes qui se déportent vers le côté droit et pénètrent profondément au sein du fluide froid. Inversement, le fluide froid migre vers la partie inférieure gauche de la cavité et se déporte ensuite vers la face opposée.



(a) Lignes de courant  
 (b) Isothermes  
 Figure 4 : Lignes de courant et isothermes pour différentes valeurs du nombre de HB.  
 $Pr = 20$  ;  $Gr = 10^4$  ;  $n = 0,5$  ;  $Ri = 1$ .

Il est intéressant de noter que les isothermes relatives au cas de la convection mixte forment un paquet de lignes parallèles qui se confine sur la diagonale de la cavité. Ces lignes deviennent de plus en plus nombreuses et concentrées dans une partie de la cavité lorsque le nombre de Herschel-Bulkley augmente. En revanche, pour le cas de la convection naturelle, les isothermes sont plus distantes et tendent à occuper un grand espace de la cavité.



(a) Lignes de courant (b) Isothermes  
 Figure 5 : Lignes de courant et isothermes pour différentes valeurs du nombre de HB.  
 $Pr = 20$  ;  $Gr = 10^4$  ;  $n = 0,5$  ;  $Ri = 10$ .

Pour ce qui est de l'effet du nombre de Herschel-Bulkley, nous remarquons que son augmentation entraîne la diminution de l'intensité des cellules centrales des lignes de courant et ce, suite à l'existence du bouchon dont l'étendu augmente avec l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley. Cet effet se reflète aussi sur les isothermes présentées sur les figures 4-b et 5-b où l'on constate que l'intensité des forces de poussées est plus importante pour les faibles valeurs du nombre de Herschel-Bulkley.

Les figure 6-a et 6-b illustrent l'effet du nombre de Herschel-Bulkley sur l'évolution du nombre de Nusselt relevé le long de la paroi chaude et ce, pour le cas de la convection mixte et de la convection naturelle dominante, respectivement.

Nous remarquons que les valeurs du nombre de Nusselt diminuent du bas vers le haut de la paroi chaude. Ceci est dû à la diminution suivant l'axe vertical Y du gradient de température entre les couches fluides pariétales et la paroi chaude. En effet, le fluide en contact avec la paroi froide (côté droit de la cavité) est refroidi puis transporté vers le bas de la cavité, jusqu'à la paroi chaude, sous l'effet à la fois, de l'augmentation de sa masse volumique et du mouvement descensionnel de la paroi droite. Cette quantité de fluide froid transportée est ensuite remplacée en haut de la cavité par le fluide chaud, sous l'effet à la fois, de la diminution de sa masse volumique et du mouvement ascensionnel de la paroi mobile gauche, qui sera ensuite refroidi.

Concernant l'effet du nombre de Herschel-Bulkley, nous constatons que l'augmentation de ce dernier entraîne la diminution du nombre de Nusselt côté chaud. Néanmoins, un comportement différent est noté pour les faibles valeurs du nombre de Herschel-Bulkley dans le cas de la convection mixte (figure 6-a). En effet, nous remarquons une inversion du comportement entre  $HB = 0,5$  et  $HB = 5$  à partir de la position  $Y = 0,54$  vers le haut de la cavité et de même, entre  $HB = 5$  et  $HB = 10$  à partir de la position  $Y = 0,32$  vers le haut de la cavité. Au-dessous de ces positions respectives, le transfert thermique est favorisé par l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley. Ce comportement est différent de celui observé dans les travaux antérieurs qui ont traité du cas limite, à savoir celui du fluide de Bingham [7,8]. Ceci pourrait être lié à la valeur de l'indice d'écoulement qui est prise égale à 0,5 dans la présente étude.

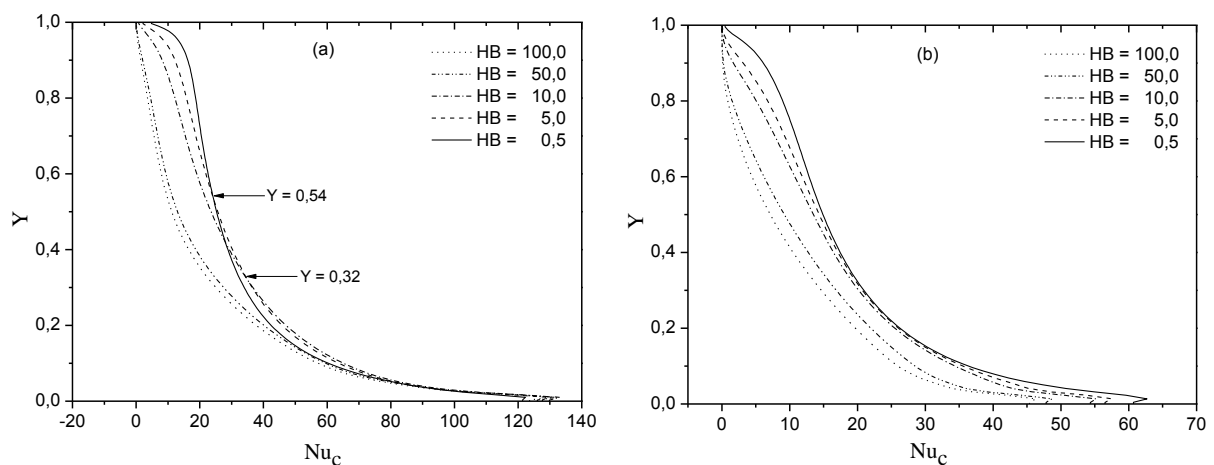


Figure 6 : Evolution du nombre de Nusselt le long de la paroi chaude pour différentes valeurs de HB.  $Pr = 20$  ;  $Gr = 10^4$  ;  $n = 0,5$ . (a)  $Ri = 1$  (b)  $Ri = 10$ .

L'impact de la variation du nombre de Herschel-Bulkley sur le transfert thermique dans l'ensemble de la cavité, représenté par l'évolution du Nusselt moyen, est illustré sur la figure 7. Nous remarquons d'une part, que l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley défavorise le transfert thermique et d'autre part, que les plus grandes valeurs du nombre de Nusselt moyen sont obtenues pour le cas de la convection mixte. Il est intéressant de noter également que cette décroissance des valeurs du nombre de Nusselt moyen est aigue pour les valeurs relativement faibles du nombre de Herschel-Bulkley. Néanmoins, cette décroissance s'estompe pour des valeurs très élevées de ce dernier et les courbes tendent vers un palier. Ce qui signifie que la viscoplasticité du fluide n'a plus d'effet sur le transfert thermique à partir d'une certaine valeur du nombre de Herschel-Bulkley.

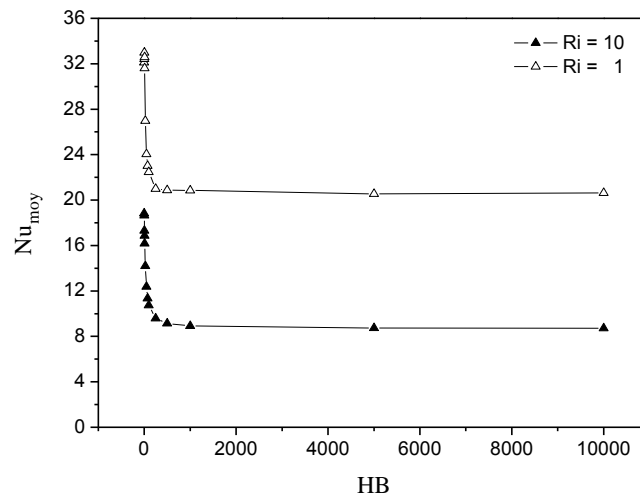


Figure 7 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de HB et pour différentes valeurs de Ri.  $Pr = 20$  ;  $Gr = 10^4$  ;  $n = 0,5$ .

## 5. Conclusion

La présente étude numérique concerne l'analyse de l'effet du nombre de Herschel-Bulkley sur la structure de l'écoulement et du transfert thermique au sein d'une cavité à parois mobiles et différentiellement chauffée, remplie entièrement d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéofluidifiant. A l'issu des résultats obtenus, il est intéressant de noter que le transfert thermique au sein de la cavité est plus important pour le cas de la convection mixte en comparaison avec celui relatif au cas de la convection naturelle dominante. De plus, l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley entraîne une modification remarquable des caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement au sein de la cavité. Ce qui entraîne une décroissance aigüe des valeurs du nombre de Nusselt moyen. Cette décroissance s'affaiblit pour les valeurs relativement élevées du nombre de Herschel-Bulkley et le nombre de Nusselt moyen devient, par conséquent, insensible aux variations de ce dernier.

## Références

- [1] S. Frey, F. S. Silveira, F. Zinani, Stabilized mixed approximations for inertial viscoplastic fluid flows, *Mech. Res. Comm.*, 37 (2010), 145-152.
- [2] O. Turan, N. Chakraborty, R. J. Poole, laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with differentially heated side walls, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 165 (2010), 901-913.
- [3] E. Mitsoulis, Th. Zisis, Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101 (2001), 173-180.
- [4] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [5] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw, New York (1980).
- [6] H. F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 47 (2004), 1761-1769.
- [7] S. S. Moali, Y. K. Benkahla, N. Labsi, A. Boutra, Etude numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une cavité carrée, *Congrès Français de Thermique-Energie Solaire et Thermique* (Perpignan-France, 24-27 mai 2011).
- [8] S. S. Moali, Y. K. Benkahla, N. Labsi, A. Boutra, Caractérisation de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une cavité à parois mobiles, *20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique* (Besançon-France, 29 août au 2 sep. 2011), <http://hdl.handle.net/2042/46216>