

Étude de la fracturation de météorites sous l'influence d'un cyclage de température ou vieillissement thermique

Mathieu NIEZGODA^{1,2*}, Benjamin RÉMY¹, Marco DELBO², Patrick MICHEL², Guy LIBOUREL³

¹Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique Appliquée (LEMTA), UMR CNRS 7563 - Université de Lorraine, 2 avenue de la Forêt de Haye, TSA 60604, 54518 Vandœuvre-lès-Nancy cedex

²Laboratoire J.L. Lagrange, Observatoire de la Côte d'Azur, UMR CNRS 7293 - Université de Nice Sophia-Antipolis, Boulevard de l'Observatoire, BP 4229, 06304 Nice cedex 4

³Centre de Recherche Pétrographiques et Géochimiques, UMR CNRS 7358 - Université de Lorraine, 15 rue Notre Dame des Pauvres, BP 20, 54501 Vandœuvre-lès-Nancy cedex

*(auteur correspondant : mathieu.niezgoda@univ-lorraine.fr)

Résumé - Le but de notre étude est d'étudier l'apparition de fissurations sur une météorite soumise à un cyclage thermique. L'évolution de la diffusivité thermique pourrait nous permettre de quantifier ces fractures. Ce papier présente ainsi la méthode d'estimation de la diffusivité thermique dans le sens du plan et de l'épaisseur de matériaux anisotropes subissant une rampe finie de flux à partir de mesures en face avant. Elle est basée sur l'utilisation de transformations intégrales. Cette méthode est validée sur des simulations numériques avant d'être appliquée sur un échantillon aux propriétés connues.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
c_P	capacité calorifique massique, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	α, β	paramètres des fonctions propres
e	épaisseur, m	γ	paramètre dépendant des diffusivités thermiques
f	forme spatiale de l'excitation du flash, $W \cdot m^{-2}$	λ	conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
F	forme spatiale de l'excitation dans l'espace de Laplace, $W \cdot m^{-2}$	ϕ	fonction d'excitation du flash, $W \cdot m^{-2}$
g	forme temporelle de l'excitation du flash	ρ	masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
G	forme temporelle de l'excitation dans l'espace de Laplace	θ	température dans l'espace de Fourier
h	coefficient d'échange, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$	Θ	température dans l'espace de Fourier-Laplace
L	longueur, m	<i>Indices et exposants</i>	
\mathcal{L}	transformation de Laplace	0	relatif à la face avant
p	paramètre de Laplace, s^{-1}	*	relatif à la température ramenée à celle de l'extérieur
r	fonction rampe	e	relatif à la face arrière
t	temps, s	l	relatif aux faces latérales
t_f	durée du flash, s	m, n	rang des harmoniques
T	température, K	ext	relatif à l'extérieur
u	fonction échelon	x, y, z	relatif aux coordonnées
x, y, z	coordonnées d'espace, m		

1. Introduction

Les corps célestes sans atmosphère, comme les astéroïdes, sont recouverts d'un sol, appelé régolithe, qui repose sur la roche mère brute. Ce régolithe est une couche de poussières dont les grains peuvent varier de fines particules inférieures au millimètre voire à des graviers de

taille supérieure au millimètre. La formation de ce régolithe résulte des collisions entre corps célestes qui éjectent des débris de matière rocheuse. En se réagglomérant par gravité à la surface des corps, elles forment le régolithe. Cependant, il a été démontré que cette explication n'est plus valable pour les plus petits d'entre eux. Une autre explication complémentaire serait le vieillissement thermique dû au cycle de température qui se reproduit par rotation du corps sur lui-même tandis qu'il se déplace. En effet, chaque partie du corps est soumise au rayonnement solaire par alternance jour-nuit : le jour, elle est d'abord exposée à ce rayonnement et se réchauffe (jusqu'à 170 °C) puis ne l'est plus la nuit et se refroidit (jusqu'à -30 °C) et ainsi de suite pour former un cycle de température — dont la plus petite période est de l'ordre d'une à deux heures — typique pour 90 % des astéroïdes. Le corps subissant cycliquement de forts gradients thermiques se fracture ce qui peut progressivement causer l'apparition du régolithe.

En collaboration avec l'Observatoire de Nice (OCA) et le Centre de Recherche Pétrographiques et Géochimiques (CRPG) de Nancy, le but de notre étude est d'étudier le vieillissement thermique de météorites — débris d'un corps céleste qui a atteint la Terre. En particulier, nous cherchons à caractériser la diffusivité thermique de météorites au cours du temps dans une expérience de cyclage thermique qui reproduit à l'échelle du laboratoire le comportement des corps dans l'espace. Au cours du cyclage thermique, des fractures apparaissent modifiant ainsi la diffusivité thermique du milieu (dans chacune des trois directions). Son évolution pourrait donc permettre de mieux comprendre l'apparition de ces fissurations sous l'effet du cyclage thermique en les quantifiant à la fois dans l'épaisseur et dans le plan de l'échantillon.

Ainsi, nous avons mis en place une expérience de cyclage thermique basée sur la méthode flash [1]. Un laser ou des lampes halogènes excitent un échantillon en face avant non pas de manière impulsionnelle mais sous la forme de créneaux cycliques. Pendant cette phase, l'échantillon se réchauffe. Puis, le laser s'arrête et l'échantillon refroidit. Un ventilateur permet éventuellement d'accélérer ce refroidissement et de raccourcir ainsi la durée des cycles (nous ne l'avons pas utilisé dans ce qui va suivre). Dans un premier temps, nous avons développé un modèle direct unidimensionnel pour estimer la diffusivité thermique transverse a_z sur chaque cycle par méthode inverse (algorithme des moindres carrés). Puis dans un second temps, nous avons développé un modèle bidirectionnel permettant d'estimer les deux diffusivités thermiques longitudinales a_x et a_y en face avant à l'aide de transformées intégrales de Fourier et de Laplace. Ce modèle est basé sur celui qui a déjà été développé sur le même principe en face arrière [2]. Ce modèle d'identification a d'abord été validé sur une simulation numérique issu d'un logiciel d'éléments finis FlexPDE[®] puis sur un échantillon de carbone anisotrope dont on connaît les propriétés.

2. Modélisation du problème direct

Cette section va montrer comment nous avons modélisé la température en face avant d'un échantillon anisotrope soumis un flux dont la forme temporelle est supposée être proche d'une rampe finie.

2.1. Principe de la mesure

Le principe de l'expérience est donné par la figure 1. Elle consiste à exciter un matériau parallélépipédique et opaque de faibles dimensions, typiquement 40 mm × 40 mm × 3 mm, initialement à l'équilibre thermique avec le milieu environnant dont la température T_{ext} est constante. L'échantillon anisotrope est soumis sur sa face avant à une excitation de forme temporelle une rampe d'une durée t_f (cf. figure 2) et de forme quelconque en espace par un laser ou une lampe flash : $\phi(x, y, t) = f(x, y)g(t)$ avec $g(t) = r(t) - r(t - t_f) - u(t - t_f)$ (r étant la fonction

rampe et u la fonction échelon). Notons que la forme temporelle est facilement ajustable dans le modèle. La réponse du matériau, le champ de température en face avant, est mesurée à l'aide d'une caméra infrarouge. À partir de son évolution temporelle, on va remonter aux propriétés thermiques du matériau selon ses directions d'anisotropie. Ses conductivités λ_x , λ_y et λ_z sont supposées constantes sur la gamme de variations des températures. On pose h_0 et h_e les coefficients d'échange de la face avant et arrière et h_l le coefficient d'échange des surfaces latérales. Si l'épaisseur e du matériau est faible devant la longueur L_x et la largeur L_y de l'échantillon, on pourra supposer les pertes latérales comme négligeables devant les échanges sur les faces avant et arrière ($\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = 0$).

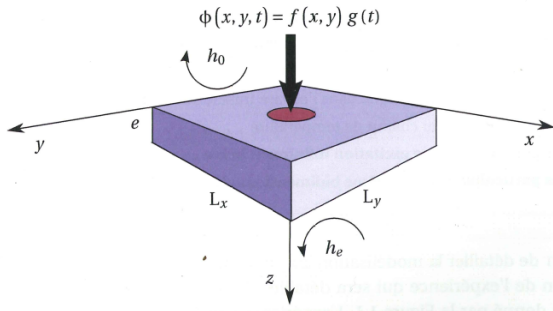


Figure 1 : Principe de l'expérience

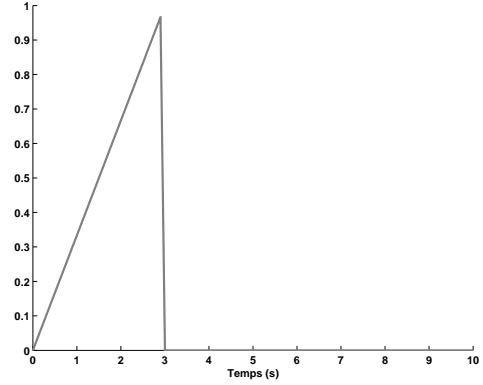


Figure 2 : Forme temporelle d'un flash en rampe finie

2.2. Mise en équation

Compte tenu de toutes ces hypothèses, en posant $T^* = T - T_{\text{ext}}$, l'équation de la chaleur et sa condition initiale s'écrivent :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \rho c_P \frac{\partial T^*}{\partial t} \quad (1)$$

$$T^*(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (2)$$

Concernant les conditions aux limites, l'échantillon est le siège d'échanges convecto-radiatifs avec son environnement. En linéarisant le flux radiatif, on peut se ramener à considérer un coefficient d'échange global h_l . Par ailleurs, on effectuant un bilan des pertes sur l'ensemble des frontières du système, on peut constater qu'on peut négliger les pertes latérales si $2h_l \left(\frac{e}{L_x} + \frac{e}{L_y} \right) \ll h_0 + h_e$, ce qui est le cas puisque $e \ll L_x$ et $e \ll L_y$. Dans ce cas, les conditions aux limites sont les suivantes :

$$-\lambda_z \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = -h_0 T^*_{z=0} + \phi(x, y, t) \quad (3)$$

$$-\lambda_z \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{z=e} = h_e T^*_{z=e} \quad (4)$$

$$\lambda_x \frac{\partial T^*}{\partial x} \Big|_{x=\{0, L_x\}} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_y \frac{\partial T^*}{\partial y} \Big|_{y=\{0, L_y\}} = 0 \quad (6)$$

2.3. Résolution

Pour déterminer $T(x, y, z, t)$, nous allons utiliser une transformation intégrale (Laplace en temps et Fourier en espace) définie par $\alpha_n = n\pi/L_x$ et $\beta_m = m\pi/L_y$ [3] :

$$\Theta(\alpha_n, \beta_m, z, p) = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{t=0}^{\infty} T^*(x, y, z, t) \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \exp(-pt) dt dy dx \quad (7)$$

En appliquant cette transformation intégrale au système d'équations (1-6), l'équation différentielle à résoudre dans l'espace transformée ne dépend plus que de z et peut être résolue aisément [3].

On obtient alors :

$$\Theta(\alpha_n, \beta_m, z, p) = \frac{eF(\alpha_n, \beta_m)G(p)}{\lambda_z} \frac{\left(\text{ch}(\gamma e) + \frac{h_e e \text{sh}(\gamma e)}{\lambda_z \gamma e} \right) \text{ch}(\gamma z) - \left(\text{sh}(\gamma e) + \frac{h_e e \text{ch}(\gamma e)}{\lambda_z \gamma e} \right) \text{sh}(\gamma z)}{\gamma e \text{sh}(\gamma e) + \left(\frac{h_0 e}{\lambda_z} + \frac{h_e e}{\lambda_z} \right) \text{ch}(\gamma e) + \left(\frac{h_0 e h_e e}{\lambda_z \lambda_z} \right) \text{sh}(\gamma e)} \quad (8)$$

avec : $\gamma = \sqrt{p/a_z + \alpha_n^2(a_x/a_z) + \beta_m^2(a_y/a_z)}$.

$F(\alpha_n, \beta_m)$ représente la transformée de Fourier de la forme spatiale $f(x, y)$ du flux exciteur et $G(p)$ la transformée de Laplace de sa forme temporelle $g(t)$. En $z = 0$, on trouve :

$$\Theta(\alpha_n, \beta_m, z = 0, p) = \frac{eF(\alpha_n, \beta_m)G(p)}{\lambda_z} \frac{\text{ch}(\gamma e) + \frac{h_e e \text{sh}(\gamma e)}{\lambda_z \gamma e}}{\gamma e \text{sh}(\gamma e) + \left(\frac{h_0 e}{\lambda_z} + \frac{h_e e}{\lambda_z} \right) \text{ch}(\gamma e) + \left(\frac{h_0 e h_e e}{\lambda_z \lambda_z} \right) \text{sh}(\gamma e)} \quad (9)$$

Il est facile de voir que $\bar{\theta}(z = 0, t) = \theta(0, 0, z = 0, t) = \mathcal{L}^{-1}(\Theta(0, 0, z = 0, p))$ obtenu en posant $\alpha_{n=0} = \beta_{m=0} = 0$ dans (7) et (8) représente la température moyenne en face avant et ainsi la réponse en face avant au problème 1D (selon z) avec pertes du matériau dans l'espace de Laplace ($\gamma = \sqrt{p/a_z}$). Une première estimation de paramètres en résolvant le problème inverse (par la méthode des moindres carrés) correspondant à ce problème 1D permet d'obtenir la diffusivité thermique transverse a_z , les coefficients d'échanges h_0 et h_e (qu'on peut choisir de prendre égaux [3]), la durée du créneau t_f et son amplitude $F(0, 0)$. Puis, dans un second temps, en prenant d'une part la moyenne de la température selon y ($m = 0$) et d'autre part la moyenne de la température selon x ($n = 0$) et en résolvant le problème inverse (par la méthode des moindres carrés) pour un certain nombre d'harmoniques, on identifie respectivement les diffusivités a_x et a_y (ainsi que l'amplitude du signal dans chacun des cas).

3. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental que nous avons utilisé est décrit sur la figure 3. Il est composé d'un laser CO2 continu d'une puissance de 130 W (classe IV) qui va exciter l'échantillon et émettant dans l'infrarouge (10,6 μm). La puissance et la durée sont contrôlées par un interrupteur électro-optique. Le diamètre du faisceau est de 4 mm et sa divergence de 4,5 μrad . L'échantillon, situé sur un porte-échantillon, est placé à 45° par rapport au plan perpendiculaire à la ligne de tir, ce qui permet à la caméra infrarouge de l'observer de face. La figure 4 résume le schéma du montage. Il s'agit d'une caméra infrarouge matricielle haute résolution Cedip/FLIR®. La matrice de grande dimension permet une très bonne résolution du champ de température, ce qui permet d'obtenir des transformées intégrales de bonne qualité. Les 640 \times 512 détecteurs, refroidis à 77 K à l'aide d'un compresseur Stirling, sont en InSb à gamme spectrale élargie (Broad-Band), sensibles à des longueurs d'onde comprises entre 1,5 et 5,1 μm . La température équivalente

à un niveau de bruit (NETD) est de 25 mK à température ambiante. Le temps d'acquisition (temps de collecte des photons) a été choisi à 750 μ s. L'objectif retenu pour cette expérience est de 72 mm de focale utilisé avec une bague allongée de 5 mm fin que l'échantillon apparaisse en bonne taille sur les images. Cette caméra a été étalonnée entre 20 et 100 °C dans le cadre de cette expérience. Elle est reliée à un ordinateur afin d'acquérir les images de l'échantillon sur sa face avant à partir desquelles on obtient le champ de température au cours du temps et par suite le thermogramme en face avant.

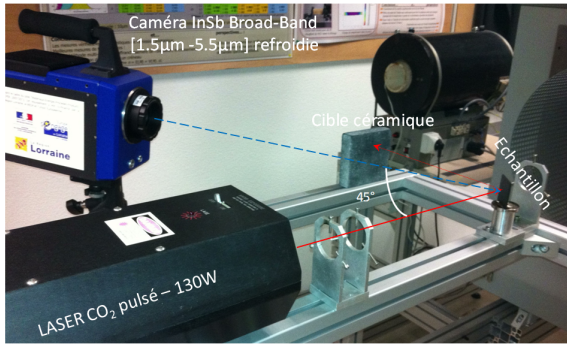


Figure 3 : Dispositif expérimental

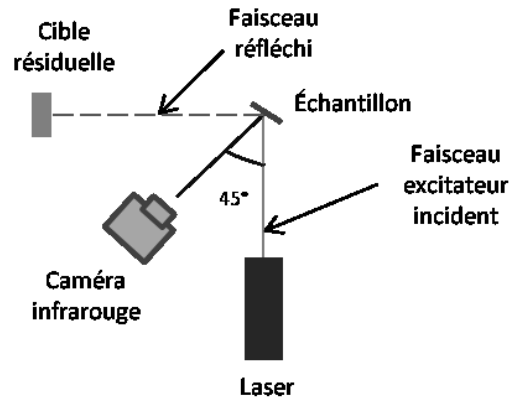


Figure 4 : Schéma du montage

4. Résultats sur des simulations numériques

Pour valider la méthode d'identification proposée, nous avons simulé une expérience à l'aide du code d'éléments finis FlexPDE[®] dans le cas où $h_0 = h_e = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Pour simplifier, nous nous sommes ramenés à un cas 2D en nous affranchissant de la variable y , c'est à dire en prenant le champ de température moyen selon y (on pose donc $\beta_{m=0} = 0$), ce qui revient à mener l'étude jusqu'à l'estimation de a_x . L'estimation de a_y étant faite de la même façon de celle de a_x et celle-ci pouvant être réalisée en tournant l'échantillon d'un quart de tour, la validation sera néanmoins complète. Nous avons choisi une excitation dont la forme spatiale est un faisceau de rayon 5 mm et dont la forme temporelle est un créneau d'une durée de 420 ms. Le matériau est carré de 40 mm de côté et de 2,5 mm d'épaisseur, de conductivité thermique $\lambda_x = 7,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\lambda_z = 0,75 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de capacité calorifique volumique $\rho c_P = 1,5.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, d'où les diffusivités thermiques : $a_x = 5.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ et $a_z = 5.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$. La durée de la simulation a été choisie égale au double du temps de réponse dans l'épaisseur $\tau = e^2/a_z = 8 \text{ s}$. Comme $\lambda_x/\lambda_z = 10$, la diffusion dans l'épaisseur n'est pas négligeable devant la diffusion dans le plan. Les profils de température obtenus en face avant sont donnés sur la figure 5 et les résultats de l'estimation sont donnés sur les figures 6 et 7.

La valeur de la diffusivité thermique a_z obtenue en utilisant un modèle 1D est très proche de la valeur nominale utilisée pour la simulation. De même, les valeurs de la diffusivité thermique a_x pour plusieurs harmoniques différentes sont en bon accord, très proches aussi de la valeur nominale utilisée pour les simulations. On peut remarquer cependant que l'estimation n'est pas correcte pour les premières harmoniques. En effet, les phénomènes étant rapides, ce sont les harmoniques d'ordre élevé qui seront les plus sensibles à la diffusivité thermique. D'autre part, la petite erreur commise sur les temps courts et qui ne perturbe pas l'estimation est dû au fait que le logiciel d'éléments finis ne génère pas un créneau parfait comme on le suppose pour l'estimation.

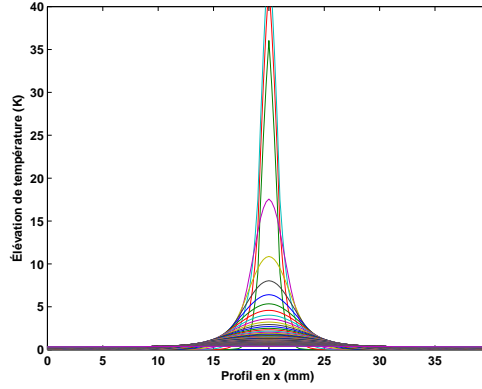


Figure 5 : Profils de température selon x

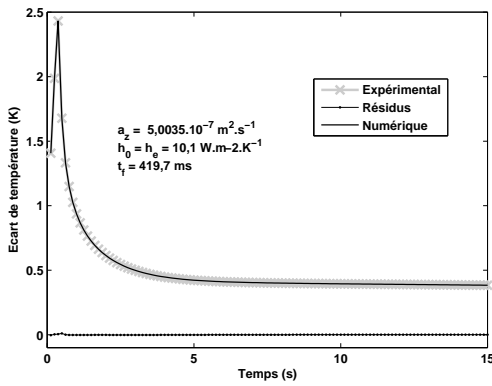


Figure 6 : Thermogramme et identification de a_z

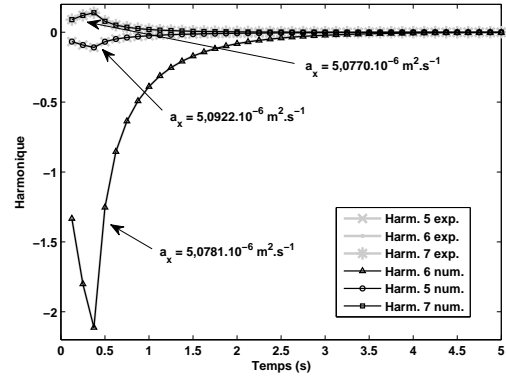


Figure 7 : Harmoniques et identification de a_x

5. Résultats sur un échantillon de carbone anisotrope

Avant de travailler sur nos échantillons de météorites, nous avons cherché à valider notre méthode en caractérisant un matériau dont nous connaissons la diffusivité thermique dans les trois directions. Il s'agit d'un échantillon de carbone anisotrope carré de 40 mm de côté et de 2,5 mm d'épaisseur. Ses conductivités thermiques valent $\lambda_x = 7,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_y = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_z = 0,75 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et sa capacité calorifique volumique $\rho c_P = 1,5.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, d'où les diffusivités thermiques : $a_x = 5.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$, $a_y = 6,7.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ et $a_z = 5.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$. La figure 8 montre le thermogramme obtenu en face avant et l'estimation que nous en avons faite par moindres carrés à partir de (9) avec $\alpha_{n=0} = \beta_{m=0} = 0$. Nous constatons que la valeur de la diffusivité thermique a_z ainsi que celles des autres paramètres estimés sont très proches de celles attendues.

À partir de la connaissance de la valeur de ces paramètres, nous sommes capables de prédire l'évolution de la température moyenne (en x et en y) de l'échantillon dans toute son épaisseur, comme le montre la figure 9 pour quelques valeurs de z . De plus, nous sommes capables de reproduire la vitesse de chauffe $\partial T / \partial t$ également dans toute l'épaisseur du matériau (cf. figure 10). Connaître cette grandeur et la relier à l'apparition des fissurations dans le matériau par l'intermédiaire de sa diffusivité thermique permettra de mieux comprendre ce phénomène dû au cyclage thermique.

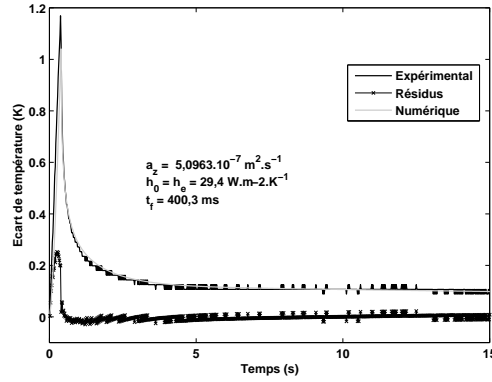


Figure 8 : Thermogramme et identification de a_z

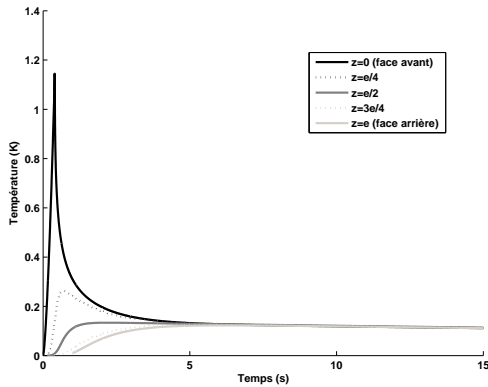


Figure 9 : Température dans l'échantillon

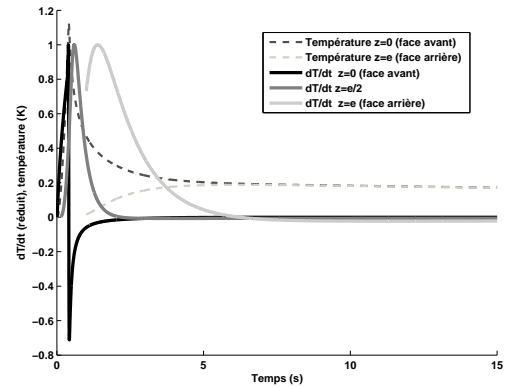


Figure 10 : $\partial T / \partial t$ en fonction du temps

En fixant à présent ces valeurs et en considérant les profils de température en face avant selon x (champ de température moyenné selon y) d'une part et selon y (champ de température moyenné selon x) dont on calcule les transformées de Fourier (harmoniques), on estime par méthode inverse les valeurs des diffusivités thermiques dans le plan de l'échantillon. Notons que l'estimation a été réalisée sur la partie descendante du thermogramme car la montée du thermogramme est mal estimée. En effet, la forme temporelle du flash, un créneau d'après le fabricant, est mal connue et nous l'avons représentée par une rampe finie car, la durée de l'excitation étant très faible, le laser n'atteint pas son régime stationnaire. Réaliser l'estimation de cette manière limite ainsi les erreurs d'estimation des paramètres. Les figures 11 et 12 montrent l'identification sur trois harmoniques dans chacune des deux directions du plan et donnent les valeurs des diffusivités thermiques que nous avons identifiées. Elles sont conformes aux valeurs connues et nous validons ainsi notre méthode pour déterminer les diffusivités thermiques de météorites. Cependant, l'estimation n'est pas satisfaisante en ce qui concerne certaines harmoniques (notamment les premières et quelques unes de rang élevé). Nous l'expliquons par la forme temporelle du flash approximative.

6. Conclusion

La méthode de mesure proposée est une méthode qui va permettre la caractérisation thermique de matériaux *a priori* anisotropes tels que des météorites. En effet, l'utilisation des

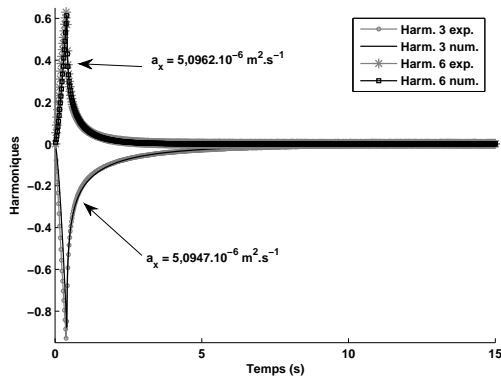


Figure 11 : Harmoniques et identification de a_x

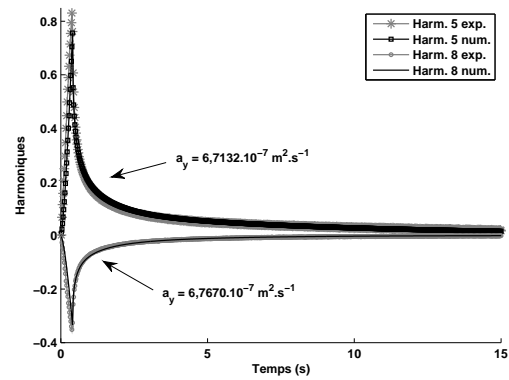


Figure 12 : Harmoniques et identification de a_y

moyens optiques à la fois pour l'excitation (lampes flash ou laser) et pour la mesure de température (caméra infrarouge) rend le dispositif peu intrusif. Le principe de la mesure s'inspire de la méthode flash et des méthodes basées sur le même principe mais en face arrière. Cette méthode permet ainsi, à partir d'une seule expérience, de caractériser avec précision la diffusivité thermique de matériaux de petites dimensions (i.e avec des faibles temps de réponse dans le plan) non seulement dans la direction transverse mais aussi dans les directions longitudinales au cours d'un cycle de chauffage-refroidissement. Elle est intrinsèque et ne nécessite aucun échantillon de référence. Cependant, comme les élévations de température générées par le flash peuvent être assez élevées en face avant (plusieurs dizaines de degrés, jusqu'à 300 °C), un étalonnage de la caméra infrarouge est nécessaire.

En travaillant dans l'espace de Fourier pour l'estimation de la diffusivité thermique, la fonction d'identification a une forme analytique simple et permet d'identifier rapidement et indépendamment les diffusivités thermiques dans le plan en s'affranchissant de la connaissance de la forme spatiale du flux. Cependant, la forme temporelle de l'excitation flash (en théorie un créneau dans les expériences sur météorites mais plutôt une rampe fine sur notre banc d'essai) est nécessaire pour mener une estimation satisfaisante des diffusivités thermiques. Des expériences sont en cours pour tenter de déterminer sa forme exacte à chaque expérience à l'aide d'une photodiode.

La suite de cette étude est de quantifier le taux de fissuration au cours du cyclage thermique afin d'étudier le vieillissement thermique de météorites. Ce taux de fissuration sera relié à d'autres paramètres tant expérimentaux (telle que la vitesse de chauffe $\partial T/\partial t$) qu'intrinsèques aux matériaux (propriétés mécaniques, etc.) et nous serons alors en mesure d'expliquer l'apparition de ces fissures résultant d'un cyclage thermique à l'origine de la formation du régolite.

7. Bibliographie

Références

- [1] W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler, G.L. Abbott, Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity, *J. App. Phys.*, 32-9 (1961) 1679-1684.
- [2] B. Rémy, A. Degiovanni, D. Maillet, Mesure de la diffusivité thermique de matériaux anisotropes de petites dimensions par thermographie infrarouge et transformations intégrales *Actes du congrès annuel de la Société Française de Thermique* (Île des Embiez, 29 mai-1^{er} juin 2007).
- [3] D. Maillet, S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal quadrupoles : an efficient method for solving the heat equation through integral transforms*, John Wiley and Sons (2000).