

# Etude numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une cavité carrée.

Salim Sofiane MOALI, Youb Khaled BENKAHLA\*, Nabila LABSI, Abdelkader BOUTRA

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
BP 32 El Alia, Bab Ezzouar 16111, Alger  
\*(auteur correspondant : youbenkahla@yahoo.fr)

**Résumé** - Le présent travail consiste en l'étude numérique du transfert thermique en mode de convection forcée, mixte et naturelle, lors de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de Bingham. Ce fluide est placé dans une cavité bidimensionnelle à section carrée. Les parois horizontales de cette dernière sont fixes et adiabatiques alors que les parois verticales sont mobiles et maintenues à des températures constantes mais différentes. L'effet des nombres de Bingham et de Richardson sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique sera analysé.

## Nomenclature

$Bn$	nombre de Bingham, $=\tau_0 H / \mu_0 v_p$	$Ri$	nombre de Richardson, $=Gr / Re^2$
$C_p$	chaleur spécifique, $J kg^{-1} K^{-1}$	$T_c$	température de la paroi chaude, $K$
$H$	dimension de la cavité, $m$	$T_f$	température de la paroi froide, $K$
$Gr$	nombre de Grashof, $=\rho_0^2 g \beta H^3 \Delta T / \mu_0^2$	$U$	vitesse longitudinale adimensionnelle
$I_{\dot{\gamma}}$	second invariant du tenseur des taux de cisaillement	$V$	vitesse transversale adimensionnelle
$k$	conductivité thermique, $W m^{-2} K^{-1}$	$v_p$	vitesse de la paroi mobile, $m s^{-1}$
$m$	paramètre de croissance exponentielle, $s$	$X$	coordonnée axiale adimensionnelle
$Nu_f$	nombre de Nusselt local froid,	$Y$	coordonnée verticale adimensionnelle
$M$	paramètre réduit de croissance exponentielle	<i>Symboles grecs</i>	
$p^*$	pression, $Pa$	$\beta$	coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
$P^*$	pression réduite	$\gamma$	taux de cisaillement, $s^{-1}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $=\mu_0 C_p / k$	$\eta$	viscosité effective, $kg m^{-1} s^{-1}$
$Re$	nombre de Reynolds, $=\rho_0 v_p H / \mu_0$	$\eta_{eff}$	viscosité effective adimensionnelle
		$\mu_0$	viscosité plastique, $kg m^{-1} s^{-1}$
		$\rho_0$	masse volumique de référence, $kg m^{-3}$
		$\tau_0$	contrainte seuil de cisaillement, $Pa$
		$\varphi$	température adimensionnelle

## 1. Introduction

La convection mixte dans les espaces rectangulaires est un sujet d'investigation de grande importance, vue sa présence dans différentes applications industrielles telles que : le refroidissement des composants électroniques, les pertes thermiques dans les collecteurs solaires et la ventilation des locaux. Au cours des dernières années, plusieurs travaux ont traité de ce sujet, citons notamment celui de Oztop et Dagtekin [1] et Basak [2] qui ont étudié le transfert thermique en mode de convection mixte dans une cavité carrée avec parois mobiles, et l'étude numérique entreprise par Mitsoulis et Zisis [3] qui porte sur l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une cavité carrée dont l'une des parois horizontales est mobile et ce, pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds.

L'objectif de ce travail est d'étudier le transfert thermique en mode de convection mixte lors de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une cavité carrée, en examinant l'effet des

nombres de Richardson et de Bingham, sur la structure de l'écoulement et la distribution de la température au sein de la cavité, ainsi que sur l'évolution du nombre de Nusselt.

## 2. Présentation et mise en équations du problème physique

La configuration étudiée est schématisée à travers la figure 1. Il s'agit d'une cavité de section carrée. Les parois horizontales sont adiabatiques alors que les parois verticales sont portées à des températures constantes mais différentes et sont animées d'un mouvement ascendant pour la paroi de droite (paroi chaude) et descendant pour la paroi de gauche (paroi froide). Les parois mobiles ont la même intensité de vitesse. Cette cavité est entièrement remplie d'un fluide de Bingham, à propriétés rhéologiques constantes. On suppose que l'écoulement et le transfert thermique sont bidimensionnels et que l'approximation de Boussinesq est valide.

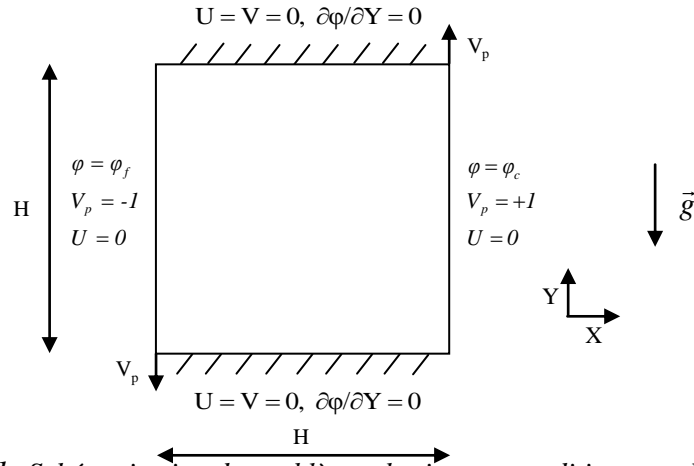


Figure 1: Schématisation du problème physique et conditions aux limites.

Les équations générales de conservation sont respectivement, l'équation de continuité, les équations de l'impulsion suivant X et Y et l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 2\eta_{eff} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \eta_{eff} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) \right] \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 2\eta_{eff} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 2\eta_{eff} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{Gr}{Re^2} \varphi \quad (3)$$

$$U \frac{\partial \varphi}{\partial X} + V \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \frac{1}{Pr Re} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right] \quad (4)$$

L'équation constitutive du fluide de Bingham, proposée par Papanastasiou [4], est jugée satisfaisante par plusieurs auteurs [3,5] et représentative d'un fluide de Bingham idéal.

$$\eta_{eff} = 1 + \frac{Bn}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-M \dot{\gamma})) \quad (5)$$

M étant un paramètre adimensionnel qui représente la croissance exponentielle ( $M = mv_p/H$ ). Des chercheurs [3,5,6] recommandent de prendre  $m = 1000$  s.

La résolution des équations citées précédemment, est effectuée par le biais de la méthode des volumes finis développée par Patankar [7] et ce, en adoptant un maillage 61x61 suivant X et Y, respectivement.

### 3. Validation du code de calcul

Le code de calcul que nous avons élaboré, pour résoudre les équations de base, est validé après comparaison de nos résultats avec ceux de Oztop et Dagtekin [1] et ce, pour l'écoulement de l'air en mode de convection mixte. La figure 2, qui illustre cette comparaison, montre une bonne concordance entre les lignes de courant et les isothermes obtenues par notre code de calcul et celles établies par ces auteurs [1].

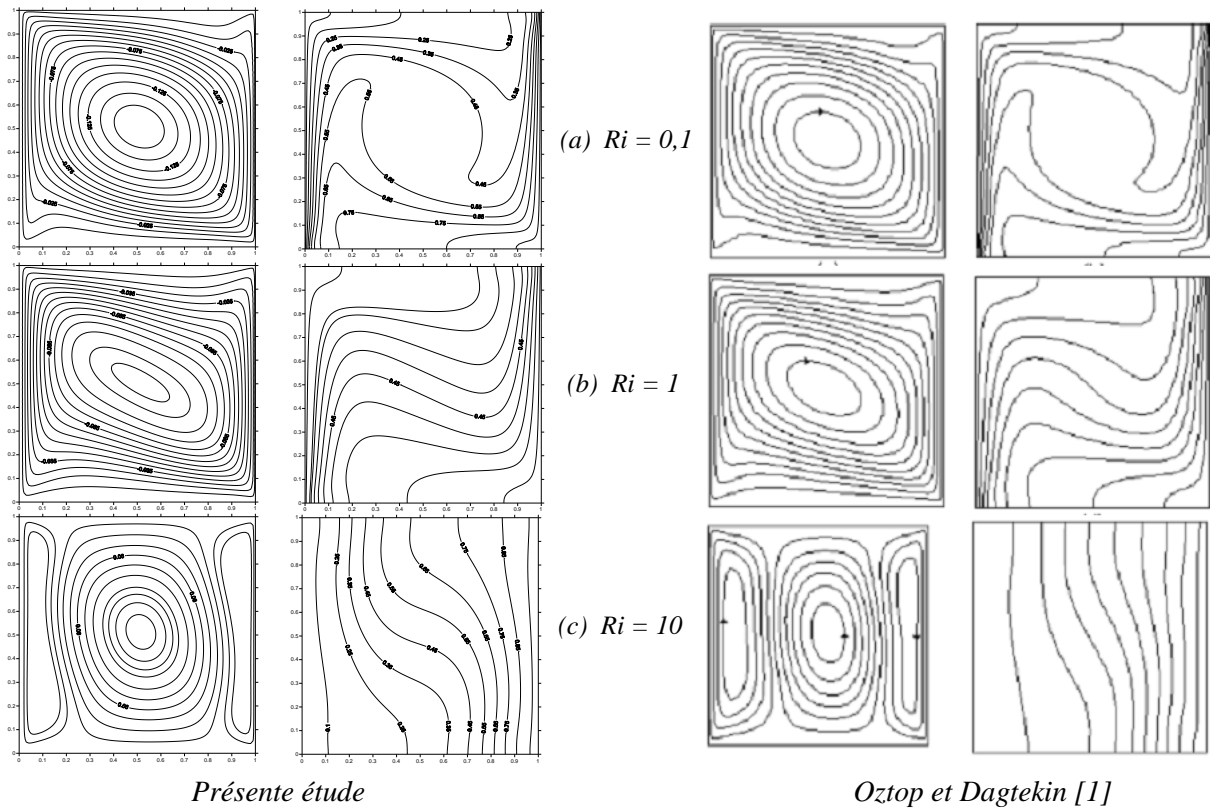


Figure 2: Lignes de courant et isothermes pour différentes valeurs du nombre de Richardson.  $Pr = 0,7$  ;  $Bn = 0$  ;  $Gr = 10^4$ .

### 4. Résultats et discussion

Dans cette partie, seront présentés les différents résultats concernant l'effet du nombre de Richardson (traduisant le rapport des effets de la convection naturelle à ceux de la convection forcée) et celui de Bingham (représentant le rapport entre la contrainte seuil et la contrainte de cisaillement) sur la structure hydrodynamique de l'écoulement ainsi que sur le champ thermique.

#### 4.1. Influence des nombres de Richardson et de Bingham sur les lignes de courant et sur les isothermes

Les figures 3 (a) et 3 (b) représentent les lignes de courant et isothermes pour différentes valeurs du nombre de Richardson :  $Ri = 0,01$  (convection forcée dominante),  $Ri = 1$  (convection mixte) et  $Ri = 10$  (convection naturelle dominante). On peut observer sur les figures 3 (a), l'entraînement de la masse fluide dans un sens de rotation antihoraire, induit par le mouvement de translation rectiligne, uniforme et opposé des deux parois de droite et de gauche. Pour un nombre de Richardson égal à 10, correspondant au cas d'une convection naturelle dominante, nous remarquons la formation de deux cellules centrales. En effet, le mouvement de translation des parois mobiles génère l'apparition de deux cellules dans un

mouvement de rotation antihoraire, qui est dû à l'intensité du mouvement ascendant du fluide chaud (paroi droite) et à celle du mouvement descendant du fluide froid (paroi gauche) sous l'effet des forces de poussée.

L'effet constaté sur les lignes de courant, se répercute sur la structure des isothermes, illustrées sur la figure 3(b) pour  $Ri = 10$ . En effet, l'intensité de la convection naturelle entraîne l'élévation de grandes quantités de fluide chaud qui seront, par la suite, transportées vers la face opposée (froide). Il en résulte une déformation des isothermes qui se déportent vers le côté gauche et pénètrent profondément au sein du fluide froid. Inversement, le fluide froid migre vers la partie inférieure droite de la cavité et se déporte ensuite vers la face opposée. Notons également que sur la figure 3(b) pour  $Ri = 0,01$ , la région centrale se trouve être à une température uniforme et seul le voisinage des parois subit un échange thermique. En effet, le transfert thermique dans ce cas n'est dû qu'au mouvement vertical des parois.

Le nombre de Bingham est un nombre adimensionnel qui représente l'extension de la zone d'écoulement en forme de bouchon du fluide de Bingham ; l'élévation de ce nombre sera synonyme de l'extension de cette zone.

Les figures 4 (a) et 4 (b) illustrent l'effet du nombre de Bingham sur la structure hydrodynamique et thermique, respectivement. Nous remarquons que l'augmentation du nombre de Bingham entraîne la diminution de l'intensité des cellules centrales des lignes de courant. Cet effet se reflète aussi sur les isothermes présentées sur les figures 4 (b).

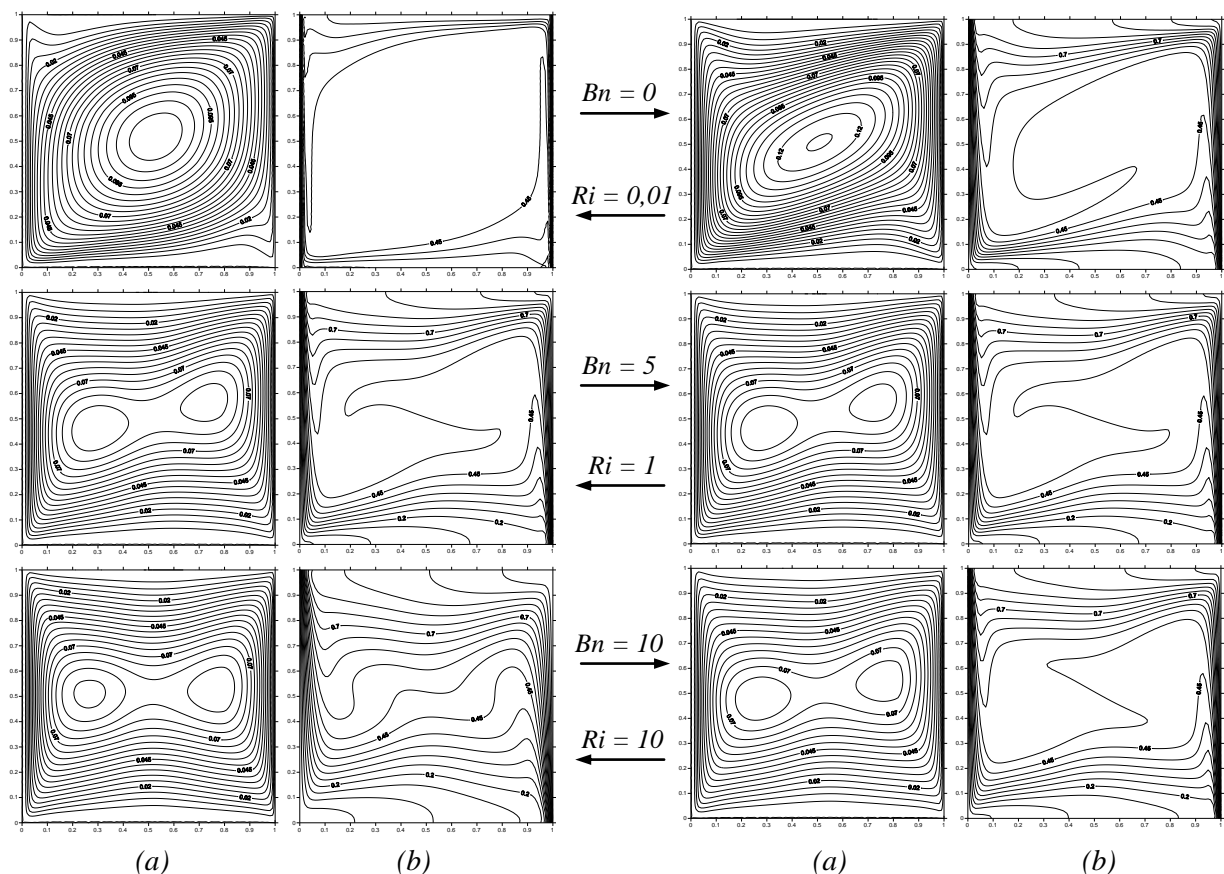


Figure 3 : Lignes de courant (a) et isothermes (b) pour différentes valeurs du nombre de Richardson.  $Pr = 10$ ,  $Bn = 5$ ,  $Gr = 10^4$

Figure 4 : Lignes de courant (a) et isothermes (b) pour différentes valeurs du nombre de Bingham.  $Pr = 10$ ,  $Ri = 1$ ,  $Gr = 10^4$

## 4.2. Influence des nombres de Richardson et de Bingham sur l'évolution du nombre de Nusselt

Les figures 5 (a), 5 (b) et 5 (c) traduisent l'évolution du nombre de Nusselt local relevé le long de la paroi froide (paroi gauche de la cavité) pour différentes valeurs du nombre de Bingham et ce, pour  $Ri = 0,01$ , 1 et 10, respectivement.

Nous remarquons clairement sur ces figures, que les valeurs du nombre de Nusselt local croissent suivant l'axe vertical de la cavité, c'est-à-dire, du bas vers le haut. Ceci est dû à l'augmentation suivant l'axe vertical  $Y$  du gradient de température entre les couches fluides pariétale et la paroi refroidie. En effet, le fluide en contact avec la paroi chaude (côté droit de la cavité) y est chauffé puis transporté vers le haut de la cavité sous l'effet à la fois, de la diminution de sa masse volumique du fluide et du mouvement ascensionnel de la paroi droite mobile. La quantité de fluide chaud transportée est ensuite remplacée en bas de la cavité par le fluide froid, sous l'effet à la fois, de l'augmentation de sa masse volumique et du mouvement descendant de la paroi mobile gauche, qui sera ensuite chauffé. Nous remarquons également que l'augmentation du nombre de Bingham provoque une augmentation du nombre de Nusselt excepté pour les cas de la convection mixte et naturelle, pour lesquels aucun effet significatif n'est observé.

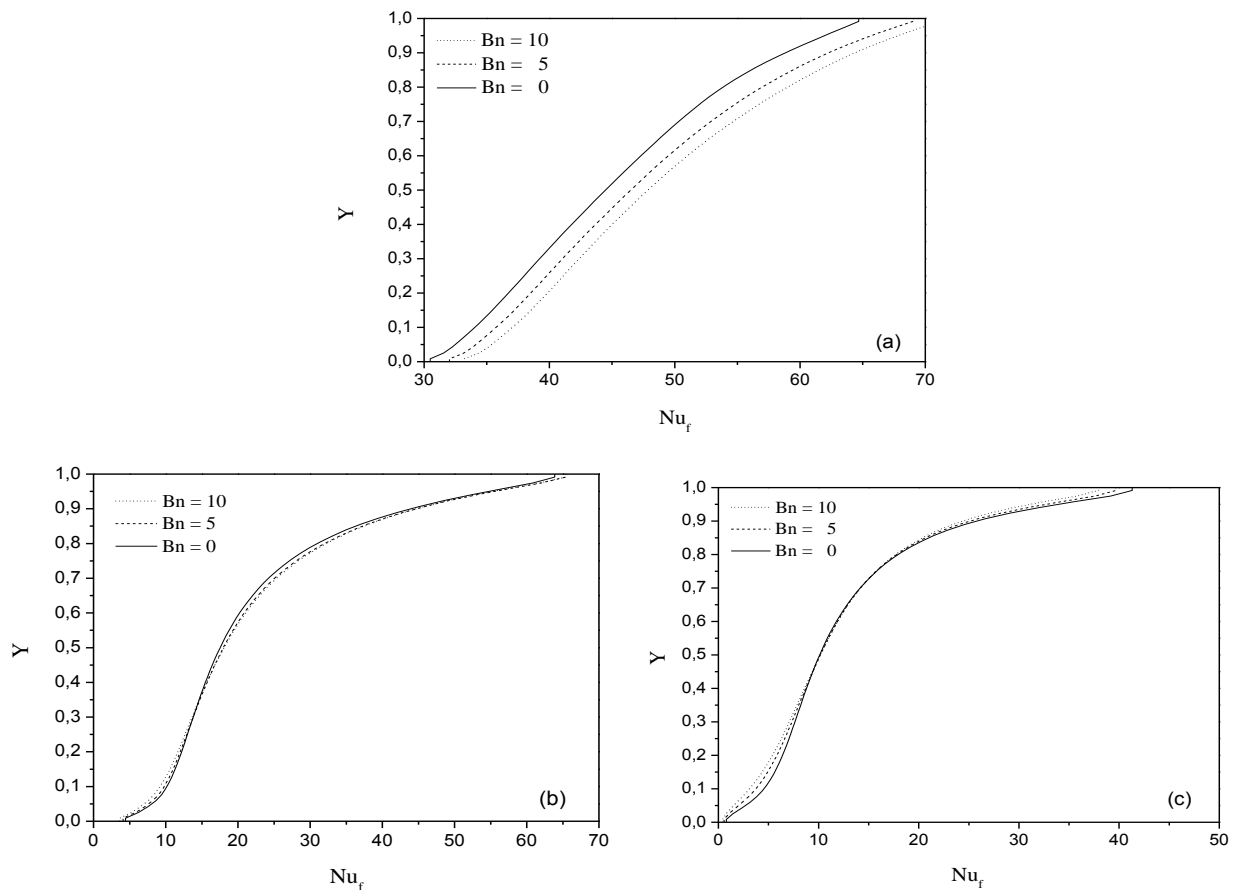


Figure 5: Evolution axiale de  $Nu_f$  pour différentes valeurs du nombre de Bingham.  $Pr = 10$ ,  $Gr = 10^4$ ,  
(a)  $Ri = 0,01$  (b)  $Ri = 1$  (c)  $Ri = 10$ .

Comme illustré sur la figure 6, qui représente l'effet de la variation du nombre de Richardson sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt local pour un fluide de Bingham, les valeurs maximales du nombre de Nusselt sont observées dans le cas du transfert thermique par mode de convection forcée ( $Ri = 0,01$ ). Ceci peut être expliqué par les valeurs élevées du nombre de Reynolds, qui représente l'effet prédominant du mouvement des parois

( $Ri = 0,01$  ;  $Re = 1000$ ). Par conséquent, l'augmentation de la vitesse de translation de la paroi gauche entraîne l'apparition d'un fort cisaillement près de celle-ci, améliorant ainsi le transfert thermique.

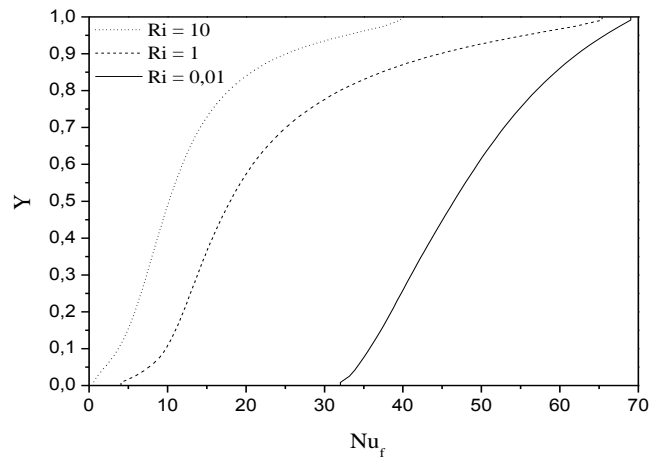


Figure 6 : Evolution axiale de  $Nu_f$  pour différentes valeurs du nombre de Richardson.  $Pr = 10$ ,  $Gr = 10^4$ ,  $Bn = 5$ .

## 5. Conclusion

La présente étude numérique porte sur l'écoulement d'un fluide de Bingham au sein d'une cavité carrée. Les parois horizontales sont fixes et adiabatiques. Toutefois, les parois verticales mobiles sont soumises à des températures constantes mais différentes (température froide et chaude). Les forces de poussée ainsi que le mouvement de translation des parois verticales, conduisent à des modifications considérables de la structure des lignes de courant et des isothermes et par conséquent, à la variation du nombre de Nusselt. Ces modifications sont très appréciables dans le cas de la convection naturelle dominante ( $Ri = 10$ ).

Concernant l'influence de la viscoplasticité (traduite par la variation du nombre de Bingham), nous observons une diminution des cellules centrales ainsi qu'une modification de l'évolution du nombre de Nusselt, due à l'augmentation du nombre de Bingham. En effet, l'augmentation de ce dernier améliore le transfert thermique par mode de convection forcée. Cependant, ce nombre n'a pas d'effet significatif sur l'évolution du nombre de Nusselt dans le cas des convections naturelle et mixte.

## Références

- [1] H. F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 47 (2004), 1761-1769.
- [2] T. Basak, S. Roy, P. K. Sharma, I. Pop, Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side wall(s), *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 52 (2009), 2224-2242.
- [3] E. Mitsoulis, Th. Zisis, Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity, *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101 (2001), 173-180.
- [4] T. C. Papanastasiou, Flows of materials with yield, *J. of Rheology*, 31 (1987), 385-404.
- [5] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [6] E. Mitsoulis, On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects. *Chem. Eng. Sci.*, 59 (2004), 789-800.
- [7] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw, New York (1980).