

Contrôle thermique par retour d'état avec un modèle réduit : Application à l'écoulement le long de la marche descendante

Yassine ROUIZI^{1*}, Yann FAVENNEC², Manuel GIRAULT¹, Daniel PETIT¹

¹Institut P² CNRS-ENSMA-Université de Poitiers, UPR 3346, Département Fluides, Thermique, Combustion. ENSMA - Téléport 2. 1, avenue Clément Ader, BP 40109, F86961 FUTUROSOCPE CHASSENEUIL Cedex.

²LTN UMR CNRS 6607, Polytech² Nantes, La chantrerie - 44306 NANTES Cedex 3, France

* (auteur correspondant : yassine.rouizi@ensma.fr)

Résumé – Dans des travaux précédents [1-3], nous avons montré comment construire des Modèles d'Ordre Faibles (MOF) en utilisant la Méthode d'Identification Modale. Cette méthode s'appuie sur l'estimation des paramètres d'un MOF sous forme de représentation d'état. Dans cette étude, nous allons mettre à profit ces MOF pour résoudre des problèmes de commande optimale. L'application proposée concerne un écoulement chauffé en amont d'une marche descendante où la consigne est appliquée sur un profil de température, en aval de la marche.

1. Introduction

De nos jours, la nécessité d'optimiser les performances des systèmes est devenue essentielle pour réduire, par exemple, des coûts de production ou encore des taux de pollution. Le contrôle optimal d'un système permet d'atteindre un objectif tout en respectant un certain nombre de contraintes.

La modélisation classique de phénomènes physiques en thermique et en mécanique des fluides revient souvent à une discrétisation des équations aux dérivées partielles. Cette discrétisation, qui devient de plus en plus fine pour obtenir des résultats de simulation plus précis, mène à des modèles (systèmes matriciels) de grande taille. Ces modèles sont inappropriés pour résoudre des problèmes de contrôle. Les méthodes de réduction présentent donc un intérêt indéniable pour l'ingénieur.

2. Contrôle optimal

On s'intéresse aux systèmes dynamiques MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) d'ordre n à p entrées, q sorties et décrits par une représentation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathcal{R}^q$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathcal{R}^{(n,n)}$, $B \in \mathcal{R}^{(n,p)}$ et $C \in \mathcal{R}^{(q,n)}$ sont les trois matrices caractérisant le système. Cette représentation a pour but de fournir une loi d'évolution de la variable d'état $x(t)$ en fonction des entrées $u(t)$ et de l'état initial $x(t_0)$. Cette représentation fournit également les valeurs de sortie $y(t)$ en fonction de la variable d'état $x(t)$, des entrées $u(t)$ et de la matrice C .

Le contrôle optimal par retour d'état est particulièrement adaptée aux systèmes (MIMO) et notamment lorsque la dynamique du système est connue malgré les perturbations extérieures. Le problème du contrôle optimal consiste à agir sur le vecteur d'entrée $u(t)$ pour

pouvoir obtenir le vecteur de sortie désiré, ceci revient à trouver une loi de commande $\mathbf{u}^*(t)$ minimisant un certain critère d'optimalité. Dans ce travail, on s'intéressera plus particulièrement aux commandes par retour d'état avec un critère quadratique. Ici, on considère le critère quadratique basé sur l'écart $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ entre le vecteur de sortie $\mathbf{y}(t)$ et le vecteur de consigne $\mathbf{z}(t)$, et sur le coût de la commande $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_I [\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (2)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ est l'erreur de poursuite, $I = [t_0 : t_f]$ est le domaine temporel et \mathbf{Q} et \mathbf{R} sont des matrices de pondération. Le critère quadratique \mathbf{J} permet donc de minimiser l'erreur de poursuite mais également de limiter l'énergie consommée, quantité liée à la commande \mathbf{u} . Il permet aussi de privilégier certains actionneurs à travers la matrice de pondération $\mathbf{R} = l^2 \mathbf{I}$. Plus les composantes de \mathbf{R} sont élevées, plus le coût de la commande augmente.

Pour caractériser l'optimum du critère \mathbf{J} (2), l'une des méthodes consiste à introduire la notion d'Hamiltonien et de variable adjointe :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (3)$$

La minimisation de \mathbf{H} nous amène aux équations d'optimalité [4] :

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (6)$$

avec la condition terminale : $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} [\mathbf{C} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)]$. La forme linéaire de cette condition permet de définir une loi de rétroaction entre la variable d'état \mathbf{x} et la variable adjointe $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{L} \quad (7)$$

En insérant cette loi dans la condition d'optimalité (5), on obtient l'expression de la commande optimale :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{L}) \quad (8)$$

où \mathbf{P} et \mathbf{L} sont respectivement les solutions des équations matricielles dites de Riccati, obtenues en combinant (4), (6), (7) et (8) :

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0 \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{A}^T \mathbf{L} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{L} - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} = 0 \quad (10)$$

La loi de commande \mathbf{u} (équation (8)) dépend de \mathbf{R} , \mathbf{B} , \mathbf{P} et \mathbf{L} ainsi que du vecteur d'état \mathbf{x} à chaque instant t . Dans la pratique, on ne dispose que d'une connaissance incomplète de l'état \mathbf{x} à travers le vecteur de sortie \mathbf{y} . Pour ce type de problème, il faut donc concevoir un estimateur (reconstructeur d'état) capable d'estimer l'état d'un système dynamique à partir des informations disponibles, c'est à dire les sorties \mathbf{y} et la commande \mathbf{u} .

Le filtre de Kalman est un reconstructeur d'état, qui permet compte-tenu des informations disponibles et de certaines hypothèses, de donner une estimation $\hat{\mathbf{x}}$ du vecteur d'état \mathbf{x} même pour des systèmes bruités. On considère le système continu stochastique défini par :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{G} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (11)$$

où $w(t)$ est un bruit qui agit comme une perturbation sur l'état du système et $v(t)$ est le bruit de mesure. On fait l'hypothèse que les deux bruits $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs, gaussiens, centrés, caractérisés par leurs matrices de covariance :

$$E[w(t)w(t+\tau)] = W \delta(\tau) \quad (12)$$

$$E[v(t)v(t+\tau)] = V \delta(\tau) \quad (13)$$

$$E[w(t)v(t+\tau)] = 0 \quad (14)$$

où $E[\bullet]$ est l'espérance mathématique et où $\delta(\tau)$ est l'impulsion de Dirac en τ .

Soient \hat{x} l'estimation de l'état x et $e_x(t)$ l'erreur d'estimation à l'instant t définie par :

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (15)$$

Le filtre de Kalman permet d'établir la structure du système linéaire (l'estimateur) fournissant \hat{x} tel que la moyenne de l'erreur d'estimation $e_x(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'équation de l'estimateur est donnée par [4] :

$$\dot{\hat{x}} = [A\hat{x}(t) + Bu(t)] + K_f[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (16)$$

Le premier terme de cette équation représente le modèle du système, ce terme est utilisé pour prédire dans une première étape l'évolution de l'état \hat{x} . Le modèle étant faux, la prédiction est corrigée par le deuxième terme, représenté par l'écart entre la mesure y et la mesure prédite $C\hat{x}$, et par la matrice K_f , appelée matrice de gain de l'estimateur.

Cette matrice K_f est déterminée de façon à minimiser la variance de l'erreur d'estimation $e_x(t)$ pour tout t (c'est-à-dire $E[e_x^T e_x]$). On montre que [4] :

$$K_f(t) = \Sigma C^T V^{-1} \quad (17)$$

où $\Sigma(t)$ est la solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{\Sigma} = \Sigma A^T + A \Sigma - \Sigma C^T V^{-1} C \Sigma + G W G^T \quad (18)$$

Les équations (16), (17) et (18) forment ainsi les équations du filtre de Kalman.

Maintenant que la loi de commande par retour d'état $u(t)$ est définie ainsi que les équations du filtre de Kalman donnant l'estimation de l'état \hat{x} , nous allons présenter un exemple d'application pour illustrer l'intérêt des MOF dans les applications de contrôle.

3. Système étudié

On considère l'écoulement de convection forcée 2D stationnaire, laminaire, d'un fluide incompressible newtonien le long d'une marche descendante (Figure 1). On suppose que les propriétés thermophysiques du fluide (air) ne dépendent pas de la température et que celle-ci est un scalaire passif. On considère un profil de vitesse parabolique à l'entrée du canal, avec un nombre de Reynolds $Re = 500$ générant un champ de vitesse stationnaire avec 2 zones de recirculation délimitées par X_1 et X_2 et X_3 [2]. On impose un flux diffusif nul pour toutes les variables à la sortie du domaine. Les conditions aux limites thermiques sont une température $T_\infty(t)$ imposée à l'entrée et deux densités de flux $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$, appliquées juste avant la marche :

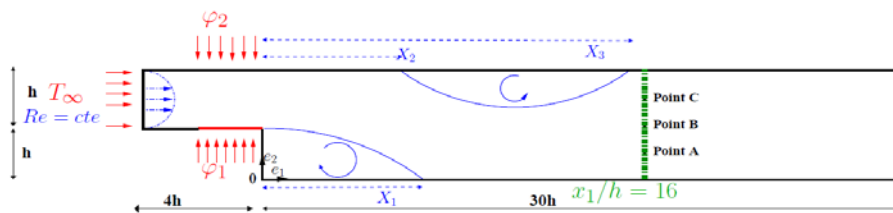


Figure 1: Géométrie du système étudié

Dans ce travail, on s'intéresse seulement au champ de température pour un champ de vitesse \vec{V} fixé. L'équation qui gouverne l'évolution du champ de température $T(M,t)$ est :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \lambda \Delta T \text{ avec } T(t=0) = T_0 \quad (19)$$

La discrétisation spatiale de l'équation de convection-diffusion (19) associée aux conditions aux limites, nous amène au système d'équations différentielles ordinaires d'ordre N :

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{dc} \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{G} T_\infty \quad (20)$$

où N dépend de la méthode de discrétisation et du maillage utilisé, \mathbf{T} est le vecteur contenant les variables discrètes de $T_{i=1 \dots N}$, \mathbf{A}_{dc} est l'opérateur qui tient compte à la fois des phénomènes de convection ($\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$) et des phénomènes de diffusion (ΔT), \mathbf{B} est la matrice qui relie l'évolution des températures aux densités de flux $\mathbf{u} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ et \mathbf{G} est le vecteur qui applique la condition de la température d'entrée T_∞ .

Par ailleurs, on considère l'équation d'observation (21), qui va permettre à travers la matrice d'observation $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{(q,N)}$ de sélectionner tout ou une partie du champ de température :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (21)$$

Ainsi le système définissant le problème thermique peut s'écrire sous forme de représentation d'état d'ordre N :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{dc} \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{G} T_\infty \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T} \end{cases} \quad (22)$$

où $\mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^q$ est le vecteur de sortie, avec $q \leq N$.

On note que, indépendamment de la méthode de discrétisation et de la finesse du maillage, l'ordre N du système reste souvent trop grand pour des applications comme la commande optimale. Une façon de réduire le nombre d'équations différentielles N dans (22) (ou dans un autre système équivalent) est de considérer les approches de réduction de modèle.

4. Réduction de modèle

De nombreuses techniques de réduction existent. Elles permettent de construire des Modèles d'Ordre Faible (MOF) reproduisant les résultats des modèles de connaissance avec une précision suffisante et des temps de calcul limités. La Méthode d'Identification Modale (MIM) est développée depuis plusieurs années dans notre institut, elle consiste à identifier les composantes d'un système équivalent à (22) écrit en base modale, et où seul un nombre réduit de modes $n \ll N$ est considéré pour l'identification. En introduisant donc le changement de variable $\mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{X}$ (\mathbf{M} matrice modale de \mathbf{A}_{dc}) dans (22), et en ne considérant que n équations, on obtient la structure du MOF [1,3] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_{dc} \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{u} + \mathbf{g} T_\infty \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x} \end{cases} \quad (23)$$

L'identification des paramètres du MOF $\theta = [\mathbf{a}_{dc}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{c}]$ est faite en minimisant une fonctionnelle d'écart (24) entre les q sorties du modèle de référence $\mathbf{Y}(t)$ et celles du MOF $\mathbf{y}(t)$ pour les mêmes vecteur \mathbf{u} et température d'entrée T_∞ et pour les N_t pas de temps considérés :

$$\mathbf{J}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^q (\mathbf{y}_{ij}(\theta) - \mathbf{Y}_{ij})^2 \quad (24)$$

Le lecteur pourra trouver plus de détails sur la MIM ainsi que les techniques d'optimisation qu'elle emploie dans [1-3].

5. Commande optimale appliquée à un MOF

On reprend dans cette étude les résultats de l'identification des MOF, relatifs au système étudié, déjà développés dans [3]. On s'intéresse au MOF d'ordre $n = 6$ identifié et validé dans [3]. Ce modèle est basé sur trois entrées (φ_1 , φ_2 et T_∞) et a pour vecteur de sortie $q = 135$ observables localisés sur la ligne $x_1/h = 16$. Les temps de simulation avec ce modèle sont de l'ordre de 0,1s pour 300 pas de temps de 0,1s chacun.

On rappelle que l'écoulement est chauffé par deux densités de flux placées juste en amont de la marche, et on note que ΔT_∞ correspond à la fluctuation de la température d'entrée par rapport à la température $T_\infty = 300$ K (figure 1). Dans le cas traité, la température T_∞ est une variable aléatoire, qui varie approximativement entre 290 K et 310 K (figure 2).

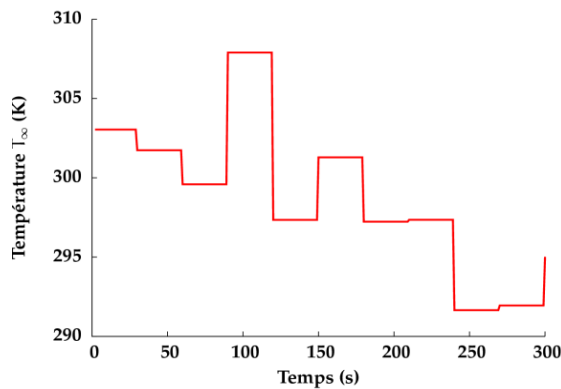


Figure 2 : Evolution de la température T_∞ (perturbation)

Notre objectif est de trouver, en ligne, les flux $\mathbf{u} = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]^T$ à appliquer en amont de la marche, pour que la température $\mathbf{y}(t)$ obtenue sur la ligne $x_1/h = 16$ soit la plus proche possible d'une consigne $\mathbf{z}(t)$ quelle que soit la variation supposée inconnue de T_∞ .

On utilise le filtre de Kalman pour obtenir une estimation de l'état $\hat{\mathbf{x}}$, nécessaire pour obtenir la loi de commande par retour d'état. Pour cela, nous avons simulé trois mesures de température dans l'écoulement, sur la ligne d'observables à contrôler, aux points A, B et C (figure 1). Soulignons ici la difficulté de remonter à l'estimation de l'état (d'ordre $n = 6$) à partir d'un nombre limité de mesures (trois).

Comme 1^{er} test, on considère le problème de régulation, où la consigne est fixée à 320 K pour les 135 observables. On présente dans la figure 3 l'évolution de la température au point C (parmi les 135 points contrôlés), obtenue avec et sans contrôle. La loi de commande résultante du problème de contrôle est reportée dans la figure 4. On remarque que cette commande vient compenser l'effet de la perturbation supposée inconnue et ainsi réduire l'écart entre la consigne et les températures obtenues.

Pour le 2^{ème} test, on considère le problème de poursuite, où cette fois-ci on a une consigne variable au cours du temps. Sur la figure 5, on trace l'évolution de la consigne ainsi que la température obtenue avec la commande optimale (figure 6). On constate que la commande obtenue permet d'obtenir une sortie très proche de la consigne.

6. Conclusion

Dans cette étude, nous avons combiné deux techniques : la réduction de modèle par la MIM et la théorie de la commande optimale. Comme exemple d'application, nous avons pris un

écoulement laminaire chauffé en amont d'une marche descendante. Cet exemple nous a permis d'illustrer la commande linéaire quadratique avec un MOF. L'intérêt principal de l'utilisation du MOF, réside essentiellement dans les temps de simulation très courts. D'une façon générale, les résultats obtenus sont très satisfaisants, et montrent que les MOF obtenus par la MIM sont bien adaptés pour des applications de commande. Ces résultats constituent une étape, la suite de nos travaux est de mettre en place un outil de contrôle de champ thermique en agissant à la fois sur les conditions aux limites thermiques et de dynamiques.

Références :

- [1] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, D. Petit, Model reduction by the Modal Identification Method in forced convection: Application to a heated flow over a backward-facing step. *Int. J. Thermal Sciences* 49 (2010) 1354-1368.
- [2] Y. Rouizi, Y. Favennec, J. Ventura, D. Petit, Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows : Application on the flow over a backward-facing step. *J. Comp. Phys.*, 228(6):2239-2255, 2009
- [3] Y. Rouizi, Réduction de modèle par identification en convection force pour des systèmes soumis à des conditions aux limites thermiques instationnaires : Application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état. *Thèse de doctorat de l'ENSMA*, 2010.
- [4] P. Borne, G. Dauphin-Tangy, J.P. Richard, F. Rottela, I. Zambettakis, Commande et optimisation des processus. *Editions Technip*. 1990

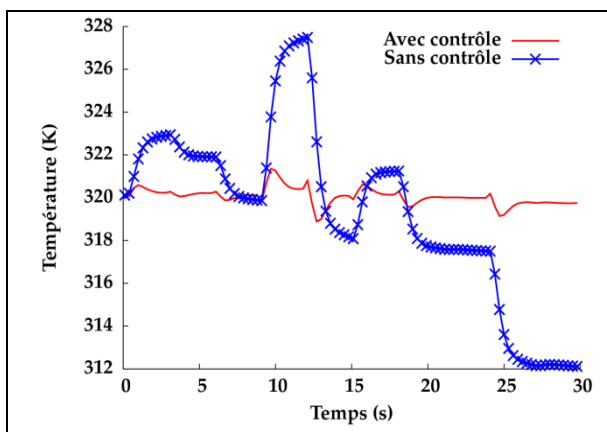


Figure 3 : Evolution de la température au point C

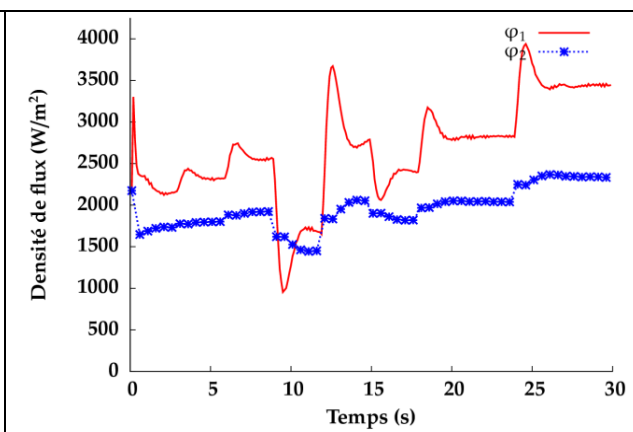


Figure 4 : Variation temporelle de la commande en fonction de la consigne et de la perturbation

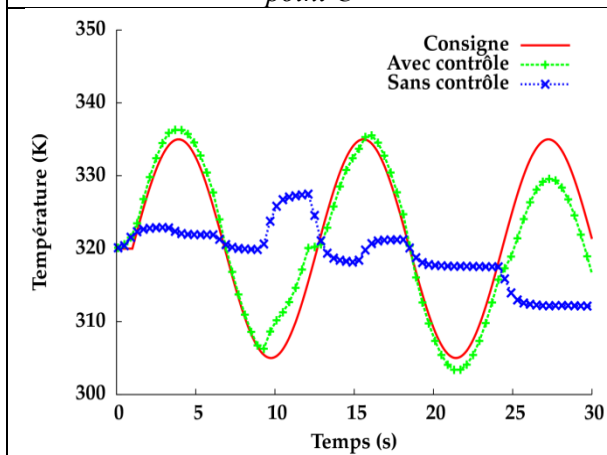


Figure 5 : Evolution de la température au point C

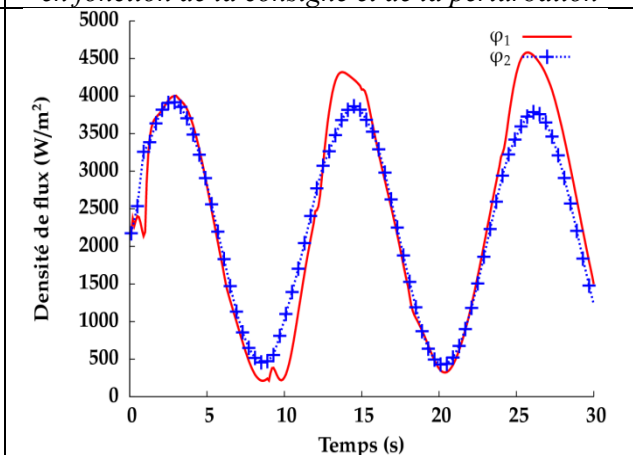


Figure 6 : Variation temporelle de la commande en fonction de la consigne et de la perturbation