

# Modèle pour conception/ optimisation d'un moteur Stirling à pistons libres « mécanique »

Sylvie BEGOT<sup>1\*</sup>, Guillaume LAYES<sup>1</sup>, François LANZETTA<sup>1</sup>, Steve DJETEL<sup>1</sup>, Philippe NIKA<sup>1</sup>, Régis CONTREAU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire FEMTO-ST CNRS UMR 6174

Département ENISYS, 2 avenue Jean Moulin, 90000 BELFORT

<sup>2</sup>GDF SUEZ, CRIGEN, 361 av du président Wilson, BP 33, 361 av du président Wilson, 93211 SAINT-DENIS-LA-PLAINE CEDEX

\*(auteur correspondant : sylvie.begot@univ-fcomte.fr)

**Résumé** - L'article décrit une modélisation de machine Stirling à pistons libres pour une application de micro-cogénération domestique. Le modèle ainsi qu'un dimensionnement de machine pour cette application sont exposés. La stabilité de la machine vis-à-vis de variations de charge est étudiée par l'analyse des valeurs propres de la matrice issue de l'équation d'état ainsi que par la méthode des plans de phase. L'influence des frottements mécaniques secs est également étudiée.

## Nomenclature

$A$	matrice équation état	$\dot{x}$	vitesse, $m.s^{-1}$
$D$	coefficients dissipatifs par unité de masse, $s^{-1}$	$\ddot{x}$	accélération, $m.s^{-2}$
$E$	effort normal par unité de masse, $N.kg^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$F$	force de frottement sec par unité de masse, $N.kg^{-1}$	$A$	matrice diagonale de $A$
$K$	raideurs par unité masse, $s^{-2}$	$\lambda$	valeur propre
$M$	Matrice de passage de $A$ vers sa forme diagonale	$\mu$	coefficient de frottement
$X$	inconnues équation état	<i>Indices et exposants</i>	
$i$	$i^2 = -1$	$p$	piston
$x$	position, $m$	$d$	déplaceur
		$0$	initial

## 1. Introduction

Le laboratoire FEMTO-ST/ENISYS ainsi que GDF SUEZ mènent depuis plusieurs années des travaux sur la micro-cogénération domestique à base de machine Stirling à pistons libres. Cette technologie présente en effet de faibles besoins en maintenance permettant ainsi de ne pas modifier le comportement de l'utilisateur. L'objectif est de développer un écogénérateur qui répondrait à l'intégralité des besoins de chauffage et d'eau chaude sanitaire d'un logement et à une partie des besoins en électricité. L'écogénérateur intègre ainsi un module de micro-cogénération à moteur Stirling au sein d'une chaudière à condensation. Les avantages de cette cogénération décentralisée sont de trois ordres : économique tout d'abord avec une baisse attendue de la facture énergétique pouvant aller jusqu'à 30%, environnementaux ensuite avec une baisse attendue de 30% des émissions de CO<sub>2</sub>, énergétique enfin avec une économie d'énergie primaire de 20%. Le projet de l'Agence Nationale de la Recherche intitulé Chaudière ElectroThermique Intégrée (CETI) a pour objectif de développer un prototype de micro-cogénérateur à base de machine Stirling à pistons libres dont les performances sont compatibles avec une application de micro-cogénération domestique.

La machine Stirling est un moteur à combustion externe inventée par Robert Stirling en 1816 [1-2]. Il utilise une source externe d'énergie pour chauffer le gaz contenu dans un

cylindre. Ce gaz sous pression se détend quand il est chauffé et met en mouvement un piston qui effectue alors un travail. Après la détente, le gaz est refroidi puis comprimé à nouveau avant le prochain cycle de chauffage. Le régénérateur absorbe puis restitue la chaleur du gaz pendant la compression et la détente. La machine Stirling à pistons libres a été inventée par W.T. Beale en 1964 [3]. Dans ce type de machine, les pertes par frottement et l'usure mécanique sont réduites. L'enveloppe contenant la machine peut être hermétiquement scellée ce qui permet une durée d'opération sans maintenance d'environ 10 ans de cette machine [4].

Pour développer un prototype, une modélisation permettant le dimensionnement et la simulation des performances de la machine Stirling à pistons libres a été effectuée. Cette modélisation a pour objectifs principaux le dimensionnement de la machine et l'étude de sa stabilité. Les travaux de modélisation de la machine Stirling à pistons libres sont fondés sur une approche analytique développée dans [5] et étudiée au laboratoire dans [6-7]. En ce qui concerne l'étude de la stabilité, [8] présente un modèle analytique linéaire et une étude de stabilité basée sur le lieu des racines de l'équation caractéristique, [9] présente un modèle analytique linéarisé et une étude de stabilité basée sur les valeurs propres de la matrice représentant les équations de la machine Stirling. Ces études portent sur un modèle linéaire. Or, de nombreux phénomènes non linéaires ont lieu dans une machine Stirling. Notre travail se place dans la continuité des travaux précédents. Nous développons un modèle analytique prenant en compte certaines des non linéarités de la machine.

L'article est divisé en deux parties : la première partie décrit le modèle développé, la deuxième partie décrit un dimensionnement de prototype avec une étude sur la stabilité de la machine et une étude sur l'influence des frottements secs.

## 2. Modélisation

### 2.1. Présentation générale de la machine

Le modèle développé est celui d'une machine Stirling à pistons libres (Figure 1). La machine comprend un piston ainsi qu'un déplaceur. A chaque extrémité de la machine se trouvent un échangeur chaud et un échangeur froid. Un régénérateur nécessaire à la réalisation du cycle thermodynamique du gaz complète le dispositif. Des volumes tampons présents sous le piston et dans le déplaceur jouent le rôle de ressorts gazeux. Le piston produit un travail mécanique supposé entraîner un alternateur linéaire.

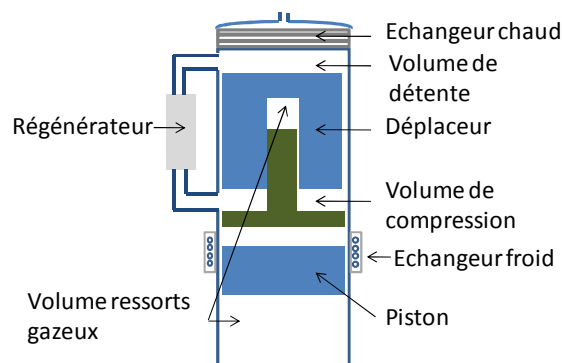


Figure 1 : Schéma du MSPL modélisé

### 2.2. Equations

L'écriture du bilan des forces appliquées sur le piston et le déplaceur conduit à deux équations différentielles couplées liant les positions, vitesses et accélérations du piston et du

déplaceur. Les forces en présence sur le piston sont les forces de pression, les forces de frottement mécanique sec, la force de freinage appliquée par l'alternateur, les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux. Les forces en présence sur le déplaceur sont les forces de pression, de frottement mécanique sec, ainsi que les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux (viscosité des gaz). La pression dans la chambre de détente est exprimée en fonction de la pression dans la chambre de compression et des pertes de charge dans les échangeurs et le régénérateur. Sous forme condensée [5-7], les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\ddot{x}_p = K_{pp}x_p + K_{pd}x_d + D_{pp}\dot{x}_p + D_{pd}\dot{x}_d + F_{pp} \quad (1)$$

$$\ddot{x}_d = K_{dp}x_p + K_{dd}x_d + D_{dp}\dot{x}_p + D_{dd}\dot{x}_d + F_{dd} \quad (2)$$

Les coefficients notés  $K$  sont homogènes à des raideurs par unité de masse, les coefficients notés  $D$  sont des termes dissipatifs par unité de masse, les coefficients  $F$  sont les termes de frottement sec par unité de masse qui seront explicités au paragraphe suivant. Les termes dissipatifs dépendent du débit de gaz dans la machine et donc par conséquent des différentes positions et vitesses. Le système présente donc des non linéarités. La résolution de ce système est par conséquent une résolution itérative.

### 2.3. Prise en compte du frottement sec

Un paramètre important de réalisation de la machine est la qualité des ajustements entre les pièces mobiles et les pièces fixes. Il est donc apparu nécessaire d'inclure le frottement mécanique sec (frottement de Coulomb) dans la modélisation. Par hypothèse, la valeur du frottement est assimilée au produit du coefficient de frottement  $\mu$  par l'effort normal entre les surfaces en mouvement  $E$ . La force de frottement s'oppose à la vitesse et s'exprime par :

$$F = -\text{signe}(\dot{x})\mu E \quad (3)$$

### 2.4. Stabilité des oscillations

Le fonctionnement souhaité de la machine est celui d'oscillations auto-entretenues. On met le problème sous la forme d'une équation d'état :

$$X = \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\dot{X} = AX \quad (5)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_{pp} & K_{pd} & D_{pp} & D_{pd} \\ K_{dp} & K_{dd} & D_{dp} & D_{dd} \end{bmatrix} \quad (6)$$

On montre que l'analyse des valeurs propres de  $A$  permet de savoir si les oscillations de la machine sont auto-entretenues [10]. En effet, les solutions des équations différentielles peuvent s'écrire sous la forme :

$$X(t) = e^{At}X_0 = Me^{At}M^{-1}X_0 \quad (7)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \cdot & & \\ & & & \\ & & & e^{\lambda_4 t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec  $X_0$  condition initiale,  $\lambda$  valeurs propres de la matrice  $A$ ,  $M$  matrice de passage de  $A$  à sa forme diagonalisée. Un mouvement oscillatoire stable n'est obtenu que lorsqu'il existe des valeurs propres purement imaginaires associées à des valeurs propres à partie réelle négative. Les valeurs propres purement imaginaires sont responsables du mouvement sinusoïdal tandis que les valeurs propres à partie réelle négative sont responsables de termes transitoires qui disparaissent avec le temps.

### 3. Exemple de machine

#### 3.1. Caractéristiques

Les principales caractéristiques de la machine modélisée sont présentées dans le Tableau 1. Avec ces paramètres, la puissance mécanique nominale de la machine est de 1200 W.

Masse piston	Masse déplaceur	Diamètre piston/déplaceur	Volume éch. chaud/froid	Volume régénérateur
$kg$	$kg$	$m$	$m^3$	$m^3$
6	0,2	0,04	$3.10^{-6}$	$2,5.10^{-5}$
Porosité régénérateur	Température chaude	Température froide	Gaz	Pression moyenne
	$K$	$K$		$Pa$
0,7	810	320	Hélium	$7,1.10^6$
Course max. piston	Hauteur volume comp. au repos	Hauteur volume détente au repos	Volume ressort gazeux piston	Volume ressort gazeux déplaceur
$m$	$m$	$m$	$m^3$	$m^3$
0,03	0,03	0,015	0,00146	$3,5. 10^{-5}$

Tableau 1 : Principales caractéristiques de la MSPL

#### 3.2. Résultats

##### 3.2.1. Stabilité des oscillations

On impose une puissance mécanique de 1200 W par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement visqueux appliqué sur le piston. Les coefficients des équations différentielles obtenus après itérations sont présentés dans le Tableau 2. Les valeurs propres sont présentées dans le Tableau 3. La machine se place dans un régime d'oscillations auto-entretenues de fréquence 21 Hz. Le rapport entre le déplacement du déplaceur et celui du piston est de 1,4. Le déphasage entre le piston et le déplaceur est de  $60^\circ$ .

$K_{pp}$	$K_{pd}$	$D_{pp}$	$D_{pd}$
$s^{-2}$	$s^{-2}$	$s^{-1}$	$s^{-1}$
$-2,6.10^4$	$1,1.10^4$	-100	0
$K_{dp}$	$K_{dd}$	$D_{dp}$	$D_{dd}$
$s^{-2}$	$s^{-2}$	$s^{-1}$	$s^{-1}$
$-9,9. 10^4$	-6100	289	-557

Tableau 2 : Coefficients des équations différentielles

v. propres
-524
-133
$1,5.10^{-4}+134i$
$1,5.10^{-4}-134i$

Tableau 3 : Valeurs propres de  $A$

La Figure 2a présente les positions du piston et déplaceur sur 0,4 s à partir du démarrage supposé à température et pression nominales. Le piston est supposé être écarté au démarrage

de sa position de repos de 0,15 mm. Nous constatons que les régimes transitoires sont très brefs et que le régime d'oscillations auto-entretenues s'installe très rapidement. Le temps de démarrage de la machine semble donc être principalement lié au temps de chauffage de la source chaude. La Figure 2b montre ces positions lorsque la puissance mécanique consommée est seulement de 1150 W. Les oscillations deviennent divergentes car les dissipations sont insuffisantes dans la machine. Le comportement de la machine sous la forme de trajectoires dans le plan de phase (vitesse en fonction de la position) pour le piston et le déplaceur est présenté sur la Figure 3 pour le cas d'oscillations auto entretenues et sur la Figure 4 pour le cas d'oscillations divergentes.

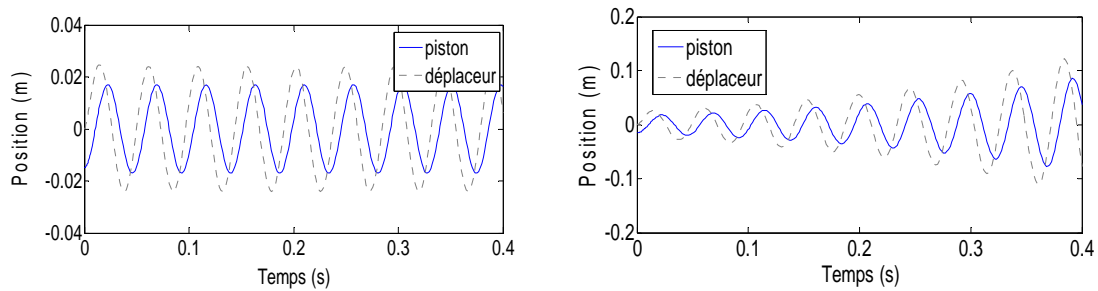


Figure 2 Position piston et déplaceur

a) oscillations auto-entretenues

b) divergentes

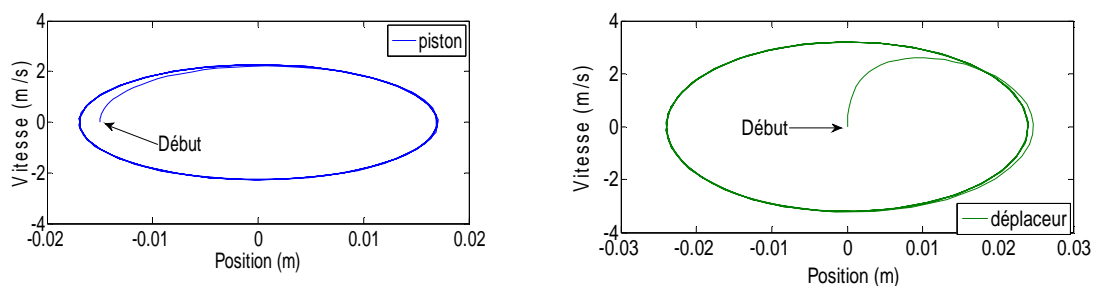


Figure 3 Trajectoires dans le plan de phase oscillations auto entretenues

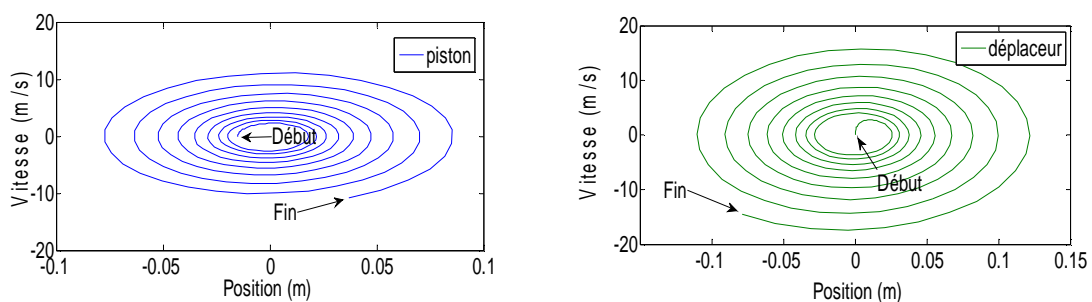


Figure 4 Trajectoires dans le plan de phase oscillations divergentes

### 3.2.2. Influence des forces de frottement

Un frottement sec de coefficient 0,3 pour un effort normal de 1N par unité de masse est appliqué sur le piston de la machine. Ce frottement conduit à l'arrêt de la machine en environ 100 s (Figure 5). Nous constatons que les amplitudes du mouvement du piston et du déplaceur décroissent de manière similaire.

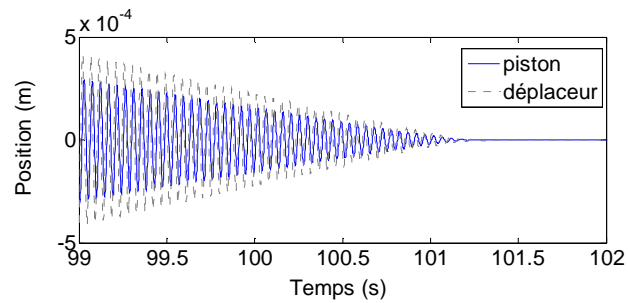


Figure 5 Arrêt de la machine dû aux frottements mécaniques

## 4. Conclusion

Nous avons présenté une modélisation de machine Stirling à pistons libres destinée à une application de micro-cogénération. Cette modélisation a pour but de prédire les performances de la machine pour cette application. Pour cette raison, une étude de stabilité en fonction de la puissance mécanique consommée a été réalisée. La modélisation et l'influence des forces de frottement sec ont été présentées. Cette étude sera poursuivie par une validation expérimentale effectuée sur un prototype du même type.

## Références

- [1] C. West, *Principals and applications of Stirling engines*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1986
- [2] G. Walker, G. Reader, O. Fauvel, E. Bingham, *The Stirling alternative*, Gordon and Breach Science Publishers, 1994
- [3] W.T. Beale, Free-Piston Stirling Engines – Some Model Tests and Simulations, *International Automotive Engineering Congress*, Detroit, Paper 690230, 1969.
- [4] W.T. Beale, G. Chen, *Small Stirling Free Piston Stirling Engines for Cogeneration*, Sunpower inc., Athens; Ohio, 1992.
- [5] I. Urieli, D.M. Berchowitz, *Stirling cycle analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1984
- [6] J. Boucher, *Influence du pilotage du déplaceur sur le comportement d'un cogénérateur à moteur Stirling et générateur électrique linéaire*, Thèse de doctorat, Université de Franche – Comté, 2007.
- [7] J. Boucher, F. Lanzetta, P. Nika, Optimization of a dual free piston Stirling engine, *Applied Thermal Engineering*, 27 (2007) 802–811
- [8] R.W. Redlich, D.M. Berchowitz, Linear dynamics of free-piston Stirling engines, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, vol 199 n°A3, 203-213
- [9] E.D. Rogdakis, N.A. Bormpilas, I.K. Koniakos, A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engines, *Energy Conversion Manage.* 45 (4) (2004) 575–593.
- [10] B. Pradin, G. Garcia, *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*, Presses universitaires du Mirail, 2009

## Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-BLAN-0118-02 et d'une participation financière de l'entreprise GDF SUEZ.