

Simulation de la convection de Bénard-Marangoni dans des récipients cylindriques chauffés par un flux non-uniforme

R. ES SAKHY^{1,2}, K. EL OMARI¹, Y. LE GUER^{1,*}, S. BLANCHER¹,
M. FEDDAOUI², T. MEDIOUNI²

¹Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Electrique (SIAME),
EA Fédération IPRA-CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA),
Bat. d'Alembert, rue Jules Ferry, 64075 Pau Cedex, France.

²Laboratoire de Mécanique, Procédés de l'Energie et de l'Environnement (LMP2E),
Université Ibn Zohr ENSA B.P. 1136 , 80000 Agadir - Maroc.

*(auteur correspondant : yves.leguer@univ-pau.fr)

Résumé - Dans ce travail nous avons étudié les écoulements convectifs au sein d'une couche de fluide horizontale contenue dans un récipient cylindrique ouvert. Cette étude a été réalisée en résolvant les équations de Navier-Stokes et de l'énergie en 3D par une méthode de volumes finis à l'aide du code Tamaris. Nous avons analysé l'effet des paramètres qui caractérisent le transfert de chaleur sur la structure de l'écoulement tout en faisant varier le nombre de Marangoni et le nombre de Biot pour un nombre de Prandtl fixe.

Nomenclature

Bi	nombre de Biot, $Bi = \frac{he}{k_f}$	p	pression, Pa
e	épaisseur, m	T	température, K
g	accélération de la pesanteur, $m s^{-2}$	T_0	température ambiante, K
h	coefficient d'échange thermique, $W m^{-2} K^{-1}$	ρ	masse volumique, $kg m^{-3}$
k	conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$	γ	tension de surface, $N m^{-1}$
\vec{V}	vecteur vitesse, $m s^{-1}$	α	diffusivité thermique, $m^2 s^{-1}$
Ma	nombre de Marangoni, $Ma = \frac{e\Delta T}{\mu\alpha} \frac{\partial\gamma}{\partial T}$	μ	viscosité dynamique, $kg m^{-1} s^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$	ν	viscosité cinématique, $m^2 s^{-1}$
Ra	nombre de Rayleigh, $Ra = g\beta\Delta T e^3/\nu\alpha$	β	coefficient de dilatation thermique, K^{-1}
Γ	rapport de forme, $\Gamma = R/e$	ΔT	écart de température, K
θ	température réduite, $\theta = (T - T_0)/\Delta T$	t	temps, s
R	rayon du récipient, m		

1 Introduction

Les écoulements convectifs dans une couche horizontale de fluide à surface supérieure libre, initialement au repos et soumise à un gradient de température peuvent être produits soit par les forces de flottabilité soit par une variation de la tension superficielle en fonction de la température ou par ces deux effets conjugués. Dans la littérature ces phénomènes sont désignés comme instabilités de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Ces phénomènes sont rencontrés dans les procédés mettant en jeu la croissance des cristaux, ou ceux qui concernent le revêtement par film mince, ainsi que dans les expérimentations des écoulements à faible gravité.

Des études expérimentales sur la convection de Bénard-Marangoni ont été entreprises pour comprendre les mécanismes responsables de ces phénomènes d'instabilité, Koshmeider et al. [1] ont par exemple mis en évidence l'influence de la géométrie du récipient ainsi que le rapport de forme du récipient sur le nombre des cellules convectives obtenus et leurs formes, Rahal et al. [2] ont eux étudié l'influence des nombres de Biot et de Prandtl sur la convection de Bénard-Marangoni dans des petits récipients cylindriques. D'autres travaux numériques ont été élaborés pour étudier ces phénomènes, on citera à titre d'exemples les travaux de Médale et al. [3] et ceux de Kuhlmann et al. [4]. Pour toutes ces études faites concernant ce sujet plusieurs

facteurs tels que la géométrie des cavités et les propriétés physiques du fluide influent sur les motifs des écoulements convectifs et leur distribution.

L'objectif de ce travail est de simuler la convection de Bénard-Marangoni dans des récipients cylindriques chauffés par un flux non-uniforme tout en variant les nombres de Biot et de Marangoni et ce, pour un nombre de Prandtl élevé $Pr = 9000$ et un nombre de Rayleigh faible tel que $Ra = 1000$. Le choix de ces valeurs de Pr et Ra nous permettra d'étudier la convection dû à l'effet Marangoni dans des fluides très visqueux et au sein desquels le transfert thermique se fait principalement par advection.

2 Modèle physique et formulation mathématique

On considère un fluide newtonien incompressible contenu dans un récipient cylindrique ouvert, de rapport de forme $\Gamma = R/e$. Les parois latérales sont isolées thermiquement, la surface supérieure est libre et un flux thermique uniforme est imposé sur la partie centrale de la face inférieure comme le montre la figure 1. La conduction thermique dans le substrat de la base crée un gradient thermique dans le fluide, qui va se propager jusqu'à la surface libre. Cela induit des forces thermocapillaires qui donnent naissance à des cellules convectives. La forme de ces cellules dépend des conditions géométriques (rapport de forme) et thermiques ainsi que des nombres de Prandtl, Rayleigh, Biot et Marangoni.

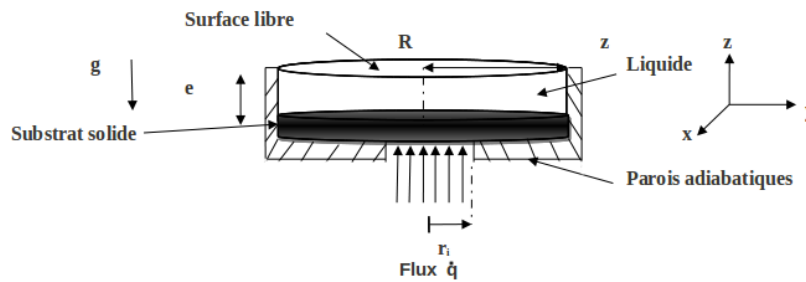


Figure 1 : Schéma du dispositif modélisé physiquement.

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour une formulation plus simple du problème, nous allons considérer quelques approximations. Nous supposons que l'épaisseur de la couche fluide reste constante, et que la surface est maintenue plane. La déformation de la surface libre peut être négligée si on a le nombre de crispation $C_r \ll 1$ et le nombre de Galillé $Ga \gg 1$ avec $C_r = (\rho\nu k_f)/(\gamma e)$ et $Ga = (ge^3)/(\nu k_f)$ ce qui est le cas pour notre étude, puisque $C_r = 5 \times 10^{-3}$ et $Ga = 1,78 \times 10^{10}$. Il s'agira alors de déterminer la répartition des vitesses et de la température dans le fluide. L'écoulement de convection de Bénard-Marangoni est provoqué par les forces thermocapillaires (effet de la variation de la tension superficielle avec la température). On suppose que les propriétés physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dont la variation au sein du fluide est prise en compte via l'approximation de Boussinesq et pour la tension superficielle qui dépend de la température. Les relations suivantes sont considérées :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial\gamma}{\partial T}T \quad (2)$$

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionner le problème sont l'épaisseur du film e , la vitesse de diffusion thermique α/e , le temps de diffusion e^2/α et l'écart de température

$\Delta T = \frac{\dot{q}e}{k_f}$. Le modèle mathématique s'écrit après adimensionnalisation comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + RaPr\theta\vec{j} + Pr\Delta\vec{V} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\theta) = \Delta\theta \quad (5)$$

Le fluide est initialement au repos à la température ambiante T_0 . Les vitesses sont nulles le long des parois solides adiabatiques (parois non glissantes).

Les conditions aux limites obtenues à l'interface solide/liquide sont :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \quad (6)$$

$$V_x = V_y = V_z = 0 \quad (7)$$

La condition cinématique à la surface libre doit satisfaire l'équilibre mécanique et en tenant compte de l'imperméabilité de la surface libre on obtient :

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$V_z = 0 \quad (10)$$

La condition thermique sur la partie centrale de la paroi du fond soumise à un flux \dot{q} , s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 1 \text{ pour } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = (0.3)^2 \text{ (} r_i = 0.3R \text{)}. \quad (11)$$

La condition aux limites thermique sur la surface libre s'écrit sous forme dimensionnelle :

$$-k_f \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = h(T(x, y, e, t) - T_0) \quad (12)$$

où $h(T(x, y, e, t) - T_0)$ désigne l'échange convectif entre la surface libre et le milieu ambiant. Cette condition aux limites s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi\theta = 0 \quad (13)$$

3 Modélisation Numérique

Pour modéliser la convection de Bénard-Marangoni nous avons implémenté les différentes conditions aux limites dans le code Tamaris développé au laboratoire SIAME [5]. La discrétisation numérique utilise la méthode des volumes finis tridimensionnels (3D) à maillage hybride. Le même code peut traiter des cas 2D en considérant une seule couche prismatique de cellules de calcul. Les valeurs de toutes les variables (vitesses, pression et température) sont prises au centre des cellules. Les schémas de discrétisation spatiale sont du second ordre de précision. Pour les flux diffusifs un schéma centré est utilisé avec une correction de la non orthogonalité du maillage. Les flux convectifs sont traités par le schéma non linéaire haute résolution CU-BISTA [6]. Ce schéma issu d'une approche NVD (Normalised Variable Diagram) introduit une

quantité minimale de diffusion numérique tout en étant strictement borné. Le couplage vitesse-pression est assuré par l'algorithme SIMPLE [7] et le calcul est avancé dans le temps par le schéma implicite de Gear à trois pas de temps et du second ordre de précision. Les systèmes linéaires obtenus sont résolus par l'algorithme GMRES préconditionné par une décomposition ILU. Plusieurs études de validation du code dans différentes situations ont été menées [5, 8], une validation supplémentaire pour le cas de la convection de Marangoni en cavité 2D étudié par Kuhlmann et al. [9] a été réalisée avec succès.

4 Résultats

Dans le cas de la convection de Bénard-Marangoni plusieurs paramètres peuvent gouverner l'écoulement convectif au sein de la cavité. Durant toutes les simulations faites, le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl et le rapport de forme sont maintenus constants aux valeurs suivantes : $Ra = 1000$, $Pr = 9000$ et $\Gamma = 5$.

L'application d'un flux sur une partie central du substrat solide permet de chauffer la paroi inférieure du récipient qui contient le fluide d'une façon non uniforme en fonction de la propagation de la chaleur par conduction dans le solide. Dans notre cas, nous avons choisi une conductivité du solide cent fois plus grande que celle du fluide et nous obtenons un profil en cloche pour la température. Ce profil est représenté sur la figure 2 suivant un diamètre sur la surface inférieure du fluide. Les solutions présentées correspondent à des simulations stationnaires convergées.

4.1 Influence du nombre de Marangoni

Dans cette section, nous allons examiner l'effet du nombre de Marangoni sur la structure de l'écoulement et la distribution de la température, pour cela nous avons fait varier $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$ en modifiant la valeur du nombre de Marangoni entre 1200 et 2200 et en fixant les autres paramètres.

Les résultats représentés dans ce travail sont des coupes horizontales à $z = 0,75$.

La figure 3, obtenue pour le cas de $Pr = 9000$, $Bi = 180$, $\Gamma = 5$ et $Ra = 1000$ montre qu'en variant le nombre de Marangoni la forme des cellules change ainsi que leur nombre. Sur les figures 3 (a), (b) et (c) on observe une cellule centrale entourée par six cellules. En augmentant le nombre de Marangoni les cellules s'élargissent du centre vers les côtés jusqu'à ce que les cellules occupent tout le domaine. Cet élargissement est dû au profil de température à l'interface solide/liquide. Ce profil est tracé sur la figure 2. Cependant sur la figure 3 (d) on observe qu'une cellule de plus apparaît, cela peut s'expliquer par le fait qu'à partir d'un certain nombre de Marangoni les cellules atteignent des tailles maximales, on observe alors l'apparition d'un nouveau mode instable et la naissance d'une nouvelle cellule.

L'analyse quantitative de l'effet du Ma sur la vitesse du fluide au niveau de la surface libre est illustrée sur la figure 4, où le module de \vec{V} est tracé suivant l'axe \vec{x} . On remarque une augmentation très significative de cette grandeur lorsque Ma augmente avec des valeurs de la vitesse au niveau de la cellule centrale qui sont jusqu'à trois fois plus importantes que celles obtenues au niveau des cellules périphériques. Pour $Ma = 2200$, cette courbe est asymétrique en raison du nombre impair de cellules.

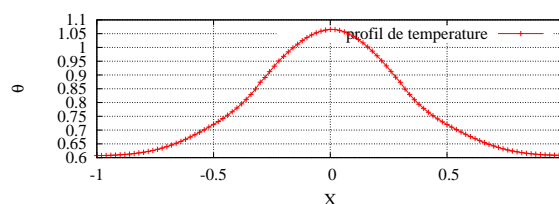


Figure 2 : Profil de la température suivant un diamètre pris sur l'interface solide/liquide.

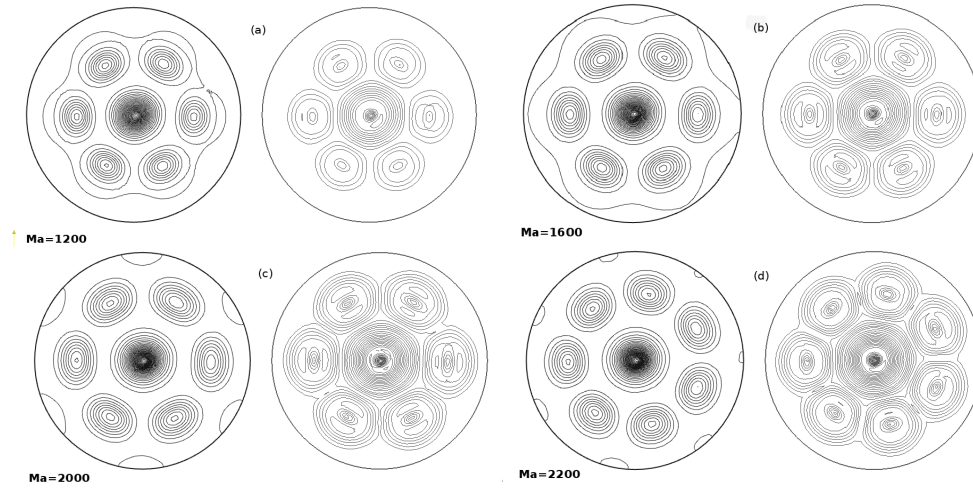


Figure 3 : Isothermes (gauche) et isoviscosites (droite) pour différents nombres de Marangoni (a) $Ma = 1200$, (b) $Ma = 1600$, (c) $Ma = 2000$, (d) $Ma = 2200$.

4.2 Influence du nombre de Biot

Pour un nombre de Marangoni fixé à 1800, nous avons évalué l'influence de la variation du nombre de Biot (rapport entre le transfert thermique convectif à la surface et l'échange conductif) sur les formes des cellules convectives ainsi que sur leur nombre. La figure 6 montre que pour de faibles nombres de Biot (entre 5 et 18) les cellules convectives occupent la majorité de la cavité (cf. figure 6 (a), (b) et (c)), cela est dû au faible transfert de chaleur au niveau de la surface libre et à l'augmentation du niveau de la température dans le fluide. Pour des nombres de Biot plus élevés on observe que les cellules reculent vers le centre de la cavité et aussi que leur taille devient plus réduite (cf. figure 6 (d), (e) et (f)).

En traçant sur l'axe \vec{x} de la surface libre le module de \vec{V} pour différents nombres de Biot (figure 5), nous remarquons une diminution légère de la vitesse avec l'augmentation de Bi, cela est certainement dû à la réduction de la taille des cellules convectives.

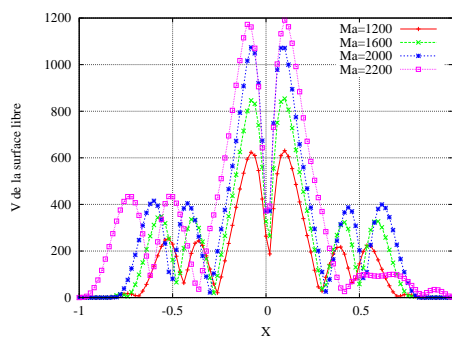


Figure 4 : Module de vitesse sur l'axe \vec{x} à la surface libre pour différents nombres de Marangoni.

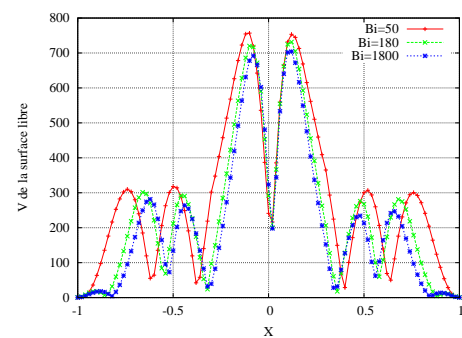


Figure 5 : Module de vitesse sur l'axe \vec{x} à la surface libre pour différents nombres de Biot.

5 Conclusion

A l'aide de la simulation numérique des écoulements dans un récipient ouvert, chauffé par le bas par un flux de chaleur non uniforme, nous avons montré que la structure de l'écoulement est influencée par les effets thermocapillaires qui agissent au niveau la surface libre. Ces effets se manifestent par la variation du nombre de cellules convectives et leur distribution ainsi que

par les valeurs maximales de la vitesse atteintes à la surface libre.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme PHC Volubilis de coopération Maroc-France (Action Intégrée n° MA/09/214 -Maroc, MA/09/213-France).

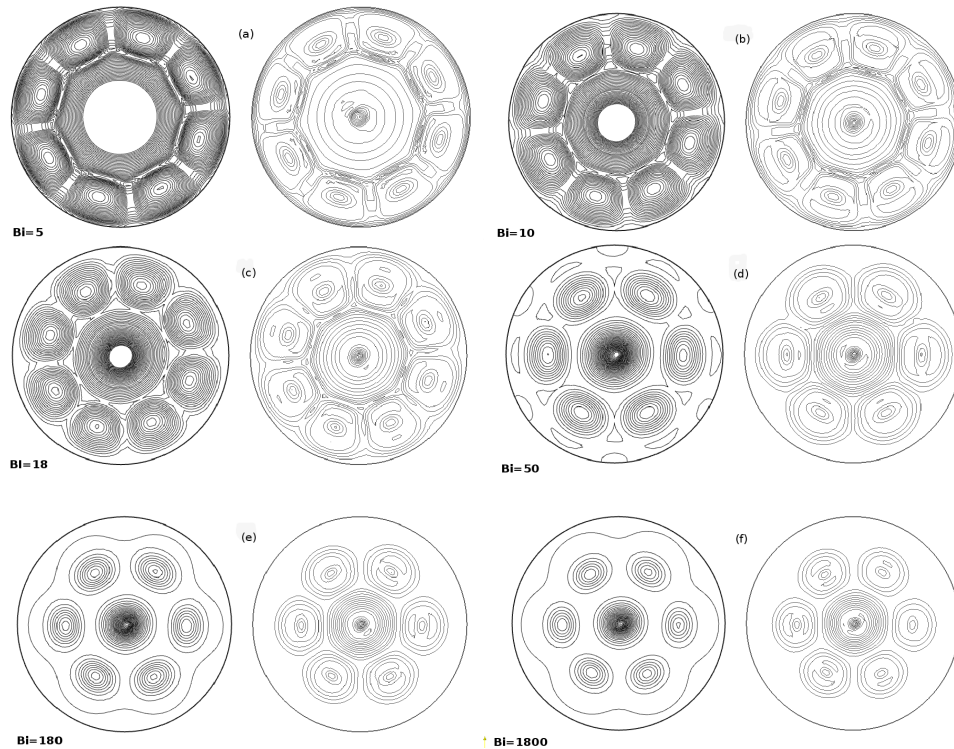


Figure 6 : Isothermes (gauche) et isovitesses (droite) pour différents nombre de Biot, (a) $Bi = 5$, (b) $Bi = 10$, (c) $Bi = 18$, (d) $Bi = 50$, (e) $Bi = 180$ et (f) $Bi = 1800$.

Références

- [1] E. L. KOSHMEIDER et S. A. PRAHL : Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 215:571–583, 1990.
- [2] S. RAHAL, P. CERISIER et H. AZUMA : Bénard–Marangoni convection in a small circular container : influence of the Biot and Prandtl numbers on pattern dynamics and free surface deformation. *Experiments in Fluids*, 43(4):547–554, 2007.
- [3] M. MEDALE et P. CERISIER : Numerical simulation of Benard-Marangoni convection in small aspect ratio containers. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 42(1):55–72, 2002.
- [4] H.C. KUHLMANN et U. SCHOISSWOHL : Flow instabilities in thermocapillary-buoyant liquid pools. *Journal of Fluid Mechanics*, 644:509–535, 2010.
- [5] K. EL OMARI et Y. LE GUER : Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3):123–134, 2010.
- [6] M.A. ALVES, P.J. OLIVEIRA et F.T. PINHO : A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:47–75, 2003.
- [7] S.V. PATANKAR : *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 1980.
- [8] K. EL OMARI et Y. LE GUER : Thermal chaotic mixing of power-law fluids in a mixer with alternately rotating walls. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(11-12):641–651, 2010.
- [9] H.C. KUHLMANN et S. ALBENSOEDER : Three-dimensional flow instabilities in a thermocapillary-driven cavity. *Physical Review E*, 77(3):36303, 2008.