

Effet du chauffage volumétrique sur la convection naturelle MHD dans une cavité annulaire

Farid BERRAHIL ^{1*}, Smail BENISSAAD ²

¹Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et de la Technologie, Université de Jijel

²Laboratoire d'Energétique Appliquée et de Pollution, Département de Génie Mécanique, Université Mentouri – Constantine

* (auteur correspondant : f_berrahil2002@yahoo.fr)

Résumé - Le présent travail a pour but d'étudier numériquement la convection naturelle MHD axisymétrique du Lithium liquide dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux verticaux en présence d'une source de chaleur interne. Les équations gouvernantes sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus révèlent que, lorsque champ magnétique est radial, il a une influence importante sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

Nomenclature

A	rapport d'aspect = $H/(r_o-r_i)$	T	température dimensionnelle, K
B	vecteur du champ magnétique, T	U, W	vitesse adimensionnelles radiale et axiale
B_0	intensité du champ magnétique, T	V	vecteur vitesse, $m.s^{-1}$
F	forces électromagnétiques, $N.m^{-3}$	R, Z	coordonnées adimensionnelles
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	<i>Symboles grecs</i>	
H	hauteur de la cavité, m	ψ	fonction de courant, $= \partial U / \partial Z$
Ha	nombre de Hartmann = $B_0 H \sqrt{\sigma / \rho \nu}$	θ	température adimensionnelle
L	longueur de la cavité, m	λ	rapport des rayons = r_o / r_i
J	vecteur de densité du courant électrique, $A.m^{-2}$	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen = $\int_0^1 (-\partial\theta/\partial R) dZ$	κ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl = ν / α	β	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
Q	production de la chaleur, $W.m^{-3}$	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
Ra_E	nombre de Rayleigh externe = $g \beta \Delta T H^3 / \alpha \nu$	σ	conductivité électrique, $\Omega^{-1}.m^{-1}$
Ra_I	nombre de Rayleigh interne = $g \beta Q H^5 / \alpha \lambda \nu$	ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
r_i	rayon du cylindre interne, m	τ	temps adimensionnel
r_o	rayon du cylindre externe, m	$\Delta\tau$	incrément adimensionnel de temps
S	rapport des nombres de Rayleigh interne et externe = Ra_I / Ra_E	<i>Indices et exposants</i>	
S_Q	paramètre de la source de chaleur interne = $QH^2 / \nu \rho C_p (T_H - T_C)$	C	froid
		EM	électromagnétique
		H	chaud
		i	interne
		o	externe
		R, Z	références aux directions radiale et axiale

1. Introduction

L'étude de la convection naturelle MHD d'un fluide à faible nombre de Prandtl dans des milieux confinés constitue une importance immense dans plusieurs applications industrielles. Parmi ces applications, la conception des équipements thermiques pour le refroidissement et la régénération efficaces du Tritium à partir du Lithium liquide ($Pr=0.0321$) dans les réacteurs Tokamak [1] et la production des cristaux de bonne qualité [2]. L'effet d'un champ magnétique constant sur les écoulements de convection naturelle dans différentes configurations a fait l'objet de nombreuses études.

La plupart des études menées dans des cavités différentiellement chauffées sont relatives à des cavités rectangulaires sans la présence d'une source de chaleur volumétrique. Parmi ces études, on peut mentionner l'investigation numérique de Sarris *et al.* [3]. Les auteurs ont étudié numériquement la convection naturelle du lithium liquide dans une cavité carrée latéralement chauffée, en présence d'un champ magnétique horizontale et une source de chaleur. La transition à l'instationnarité de l'écoulement se produit pendant l'augmentation du rapport S des nombres de Rayleigh. Nikos *et al.* [4] ont examiné la stabilité de l'écoulement du même problème. Ils ont obtenu les diagrammes de stabilité pour différentes valeurs de Ha , Gr et S_Q .

Dans le cas d'un espace confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux chauffée par l'intérieur et refroidie par l'extérieur, plusieurs investigations ont été menées durant les dernières années. On peut citer l'étude analytique et numérique de la convection naturelle de l'air ($Pr=0.7$) conduit par Choukairy *et al.* [5] qui ont analysé l'effet du rapport de courbure et l'augmentation de Ra sur l'écoulement stationnaire et transitoire. Sankar *et al.* [6] ont étudié numériquement la convection naturelle MHD d'un fluide conducteur de l'électricité ($Pr=0.054$). Leurs résultats montrent que le champ magnétique dans la direction axiale est plus efficace que celui dans la direction radiale sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

L'objet de ce présent travail est d'étudier l'action d'un champ magnétique sur la convection naturelle à l'intérieur d'un espace annulaire en présence d'une source de chaleur interne en fonction du rapport des rayons.

2. Géométrie et modèle mathématique

La configuration de l'écoulement est un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux verticaux ($A=I$) contenant du lithium liquide ($Pr=0.0321$) avec la présence d'une source de chaleur volumétrique. Les parois verticales de l'espace annulaire sont chauffées différentiellement ($T_H > T_C$) par contre les parois horizontales sont adiabatiques. L'écoulement est soumis à un champ magnétique extérieur et uniforme d'intensité B_0 orienté dans deux directions radiale où axiale (Fig. 1).

Afin d'avoir une formulation simple du modèle mathématique, on adopte les approximations suivantes : l'écoulement est laminaire et axisymétrique, les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, la dissipation de chaleur visqueuse est négligeable, l'approximation de Boussinesq est valable, l'effet Joule et le champ magnétique induit sont négligeables et le métal liquide est non magnétisé.

Dans le cas de l'application du champ magnétique sur l'écoulement, la force de Lorentz générée pour des frontières électriquement isolantes s'écrit comme suit:

$$\vec{F} = \sigma [\vec{V} \times \vec{B}] \times \vec{B} \quad (1)$$

En introduisant les grandeurs caractéristiques suivantes : H^2/ν , H , ν/H , $\rho(\nu/H)^2$ pour le temps, la longueur, la vitesse et la pression, respectivement. Tandis que la température adimensionnelle est donnée par : $\theta=(T-T_C)/(T_H-T_C)$ et le champ magnétique est donnée par : $B = B_0$. Alors, on obtient les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU^2) + \frac{\partial}{\partial Z} (WU) = -\frac{\partial P}{\partial R} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R^2} \right) + F_{EMR} \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RUW) + \frac{\partial}{\partial Z} (W^2) = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \frac{Ra_E}{Pr} \theta + F_{EMZ} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (W\theta) = \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) + \frac{Ra_I}{Ra_E Pr} \quad (5)$$

Où : F_{EMR} , F_{EMZ} représentent, respectivement, les forces de Lorenz adimensionnelles suivant les directions R et Z . Leurs expressions s'écrivent comme suit :

$$\text{Dans le cas où } B=B_r : \begin{cases} F_{EMR} = 0 \\ F_{EMZ} = -Ha^2 W \end{cases} \quad \text{et dans le cas où } B=B_z : \begin{cases} F_{EMR} = -Ha^2 U \\ F_{EMZ} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Le système d'équations est résolu avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

À $\tau=0$, $U=W=\theta=0$, La source de chaleur interne est soudainement branchée.

$$\begin{aligned} \text{Pour } \tau > 0, \text{ on a :} & \quad \text{à } R = 1/[A(\lambda - 1)] : \quad U=W=0, \quad \theta=1 \\ & \quad \text{à } R = \lambda/[A(\lambda - 1)] : \quad U=W=0, \quad \theta=0 \\ & \quad \text{à } Z=0 : \quad U=W=0, \quad \partial\theta/\partial Z=0 \\ & \quad \text{à } Z=1 : \quad U=W=0, \quad \partial\theta/\partial Z=0 \end{aligned}$$

Dans ce travail, l'équilibre thermique est atteint lorsque :

$$\overline{Nu}_i + \left(\frac{1+\lambda}{2A} \right) \frac{Ra_I}{Ra_E} = \lambda \overline{Nu}_o \quad (7)$$

3. Méthode numérique

La résolution numérique du système d'équations est effectuée par une méthode de type volumes finis [7] utilisant un schéma d'Euler retardé d'ordre deux pour la discrétisation des dérivées temporelles. Les termes convectifs, le terme de poussée thermique et les termes non linéaires sont approchés par la discrétisation d'Adams-Bashforth. La discrétisation temporelle des gradients de pression et des termes diffusifs est implicite. Le schéma des différences centrées est utilisé pour la discrétisation spatiale. La résolution du couplage vitesse-pression est assurée par l'algorithme SIMPLER [7].

La validation du code numérique a été faite en comparant nos résultats avec ceux des références [6] et [8] pour le cas de la convection naturelle dans un espace annulaire. D'après la fig.2, nos résultats sont en bon accord avec ceux des références [6] et [8]. L'influence du maillage a été étudiée pour vérifier la précision des résultats. Plusieurs tests numériques ont été réalisés pour avoir un maillage optimal. Ces tests indiquent qu'un maillage uniforme de 102×102 suivant R et Z est suffisant pour assurer une bonne résolution spatiale.

4. Résultats et discussions

4.1. Effet du chauffage volumétrique de la source

L'influence du chauffage volumétrique sur l'écoulement de la convection naturelle en absence du champ magnétique est illustrée sur la fig. 3 pour $Ra_E = 10^5$, $\lambda=2$ et pour différentes valeurs du rapport des nombres de Rayleigh interne et externe S . On constate que pour $S=0$, (fig. 3.a) le champ d'écoulement est constitué par une seule cellule principale dont le sens de rotation est le sens horaire et aussi des cellules secondaires qui se trouvent aux coins de la cavité. La cellule principale comporte un vortex contrarotatif au centre. Lorsque $S=10$ (fig. 3.b), on remarque que ce vortex disparaît avec l'augmentation de la taille de la cellule secondaire qui se trouve en haut du coin gauche de la cavité. Avec l'augmentation de

l'intensité de la source interne (Ra_I), l'écoulement perd sa stabilité à partir de la valeur $S=15$. Dans le cas où $S=100$ (fig. 3.c), l'écoulement devient instable et bicellulaire. Le chauffage volumétrique engendre une intensification de l'écoulement et une augmentation de la température au milieu de l'espace annulaire par l'effet de flottabilité, ce qui a créé une zone au milieu de la configuration plus chaude que la paroi chauffée. La naissance de la première cellule qui se trouve à gauche est due au gradient horizontal de la température entre la paroi chaude et la zone du milieu. Ceci est montré par la circulation antihoraire du fluide dans cette région. Par contre dans la région droite, la circulation est horaire à cause du gradient entre la zone du milieu et la paroi froide.

En ce qui concerne le champ thermique, la convection est relativement intense avec la présence d'une source de chaleur interne, donnant lieu à une déformation importante des lignes isothermes. Pour des valeurs élevées du rapport S , la chaleur interne supplémentaire dans le fluide augmente la température dans la région centrale haute de l'espace annulaire jusqu'au point qu'elle devienne plus grande que celle de la paroi chaude (fig. 4). Pour une solution équilibrée, la valeur totale de la chaleur enlevée de la cavité devrait être égale à la quantité produite intérieurement. Le chauffage volumétrique supplémentaire (l'augmentation de S) engendre une diminution du nombre de Nusselt moyen près de la paroi chaude et son augmentation près de la paroi froide (Fig. 4).

4.2. Effet du rapport des rayons

La fig. 5 montre l'effet du rapport des rayons λ sur l'écoulement et sur le transfert thermique. On remarque le déplacement du centre de la cellule principale vers le haut de la configuration lorsqu'on augmente le rapport des rayons. L'effet du rapport des rayons sur les paramètres caractérisant l'écoulement est donné sur le tableau 1. On constate d'après ce tableau que l'intensité de l'écoulement diminue avec l'accroissement du rapport des rayons λ . Le champ thermique illustré sur la fig. 5 montre le déplacement de la zone chaude vers la paroi chaude du cylindre interne lorsque λ augmente de 2 à 8. La fig. 6, représente le nombre de Nusselt moyen près des parois isothermes pour différents valeurs de λ . On note une augmentation de \overline{Nu}_i et une diminution de \overline{Nu}_o au fur et à mesure que λ augmente. Pour des valeurs élevées de λ , la paroi chaude de cylindre interne se rapproche de plus en plus vers l'axe de symétrie où le flux de chaleur généré par la source devient important dans cet endroit.

4.3. Effet du champ magnétique

L'effet de l'intensité et l'orientation du champ magnétique sur l'écoulement et le champ thermique est montré sur la fig. 7 pour $Ra_E = 10^6$, $\lambda=2$ et pour différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha=25$ et 100. On constate qu'il n'y a pas des changements significatifs sur la structure de l'écoulement ou sur le champ thermique pour de faibles valeurs de Ha ($Ha=25$) quelque soit l'orientation du champ magnétique horizontale (H) ou verticale (V). La différence devient nette pour des valeurs élevées ($Ha=100$). On remarque que le régime de l'écoulement est multicellulaire pour un champ magnétique horizontal où une cellule principale occupe la totalité de l'espace annulaire. Dans le cas d'un champ vertical, on observe que l'écoulement est bicellulaire avec des cellules de tailles différentes. Concernant le champ thermique, on remarque l'alignement des isothermes avec les parois verticales pour $Ha=100$, mais dans le cœur de l'espace annulaire, ces isothermes sont déformées à cause de la génération de chaleur par la source interne. D'après ce résultat, on constate la dominance du régime convectif dans cette région par rapport au régime diffusif. Par contre, près des parois on trouve l'inverse. Ceci est lié à l'effet des forces de Lorentz qui sont importantes près des parois isothermes.

La fig. 8 représente la variation du nombre de Nusselt moyen près des parois verticales en fonction de Ha pour deux directions radiale et axiale. En examinant cette figure, on constate que le champ magnétique radial a plus d'influence que le champ magnétique axial sur le taux du transfert thermique.

5. Conclusion

Cette étude nous a permis de retenir les conclusions suivantes. La source de chaleur interne augmente l'intensité de la circulation de l'écoulement, favorise l'apparition du régime multicellulaire et augmente la température en haut du centre de la cavité. L'augmentation de la génération de la source interne conduit à une diminution du nombre de Nusselt près de la paroi chaude et son augmentation près de la paroi froide. L'augmentation du rapport des rayons engendre une diminution de l'intensité de l'écoulement et une augmentation du taux de transfert thermique près de la paroi chaude du cylindre interne. Enfin, le champ magnétique a un effet plus important dans la direction radiale par rapport à la direction axiale.

Références

- [1] A. Kharicha, S. Molokov, S. Aleksandrova, L. Bühler, Buoyant convection in the helium-cooled lithium lead blanket, in a strong uniform magnetic field, *FZKA 6959* (2004), Forschungszentrum Karlsruhe.
- [2] D. T. J. Hurle, *Crystal Growing from the Melt*, Springer (1993).
- [3] I. E. Sarris, S. C. Kakarantzas, A. P. Grecos, N. S. Vlachos, MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity, *Inter. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 3443–3453.
- [4] N. A. Pelekasis, Linear stability analysis and dynamic simulations of free convection in a differentially heated cavity in the presence of a horizontal magnetic field and a uniform heat source, *Physics of Fluids*, 18 (2006), 034101.
- [5] K. Choukairy, R. Bennacer, H. Beji, S. Jaballah, M. El Ganaoui, Transient behavior inside vertical cylindrical enclosure heated from the side walls, *N. Heat Transfer, Part A*, 50 (2006), 773–785.
- [6] M. Sankar, M. Venkatachalappa, I.S. Shivakumara, Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus, *Inter. J. of Engineering Science* 44 (2006) 1556–1570.
- [7] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, New York (1980).
- [8] R. Kumar, M. A. Kalam, Laminar thermal convection between vertical coaxial isothermal cylinders, *Inter. J. Heat and Mass Transfer*, 34 (1991), 513–524.

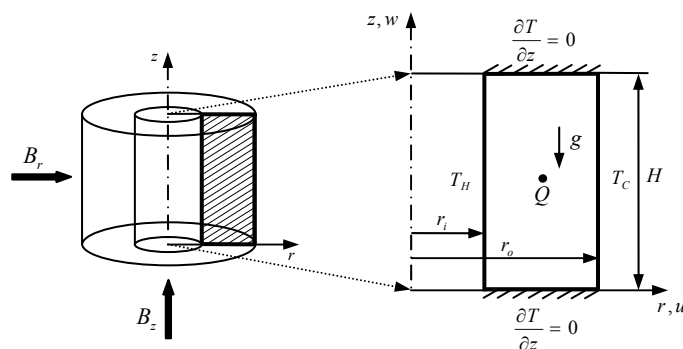


Figure 1 : Géométrie et conditions aux limites du problème

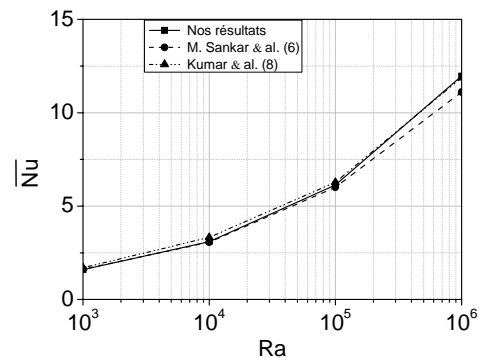
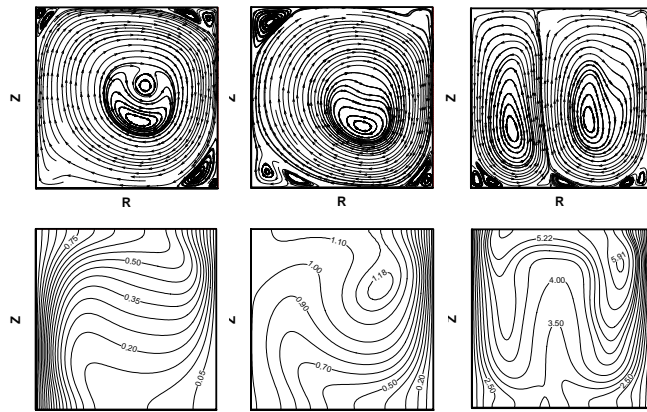


Figure 2 : Comparaison de nos résultats avec ceux des références [6] et [8].



(a) $\psi_{\max} = 4.216$ $\psi_{\min} = -348.698$
 (b) $\psi_{\max} = 5.020$ $\psi_{\min} = -456.444$
 (c) $\psi_{\max} = 409.731$ $\psi_{\min} = -842.827$

Figure 3 : Trajectoires des fonctions de courant et isothermes pour : $Ra_E=10^5$. (a) $S=0$; (b), $S=10$; (c) $S=100$

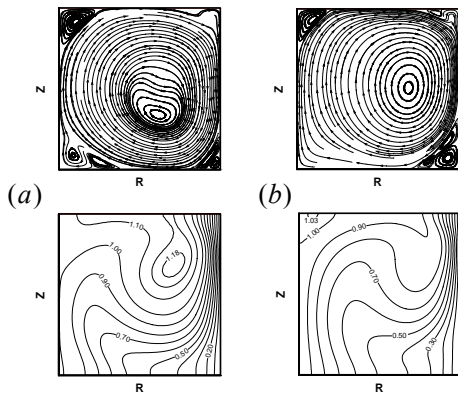


Figure 5 : Trajectoires des fonctions de courant et isothermes pour : $Ra_E=10^5$, $S=10$. (a) $\lambda=2$; (b) $\lambda=8$

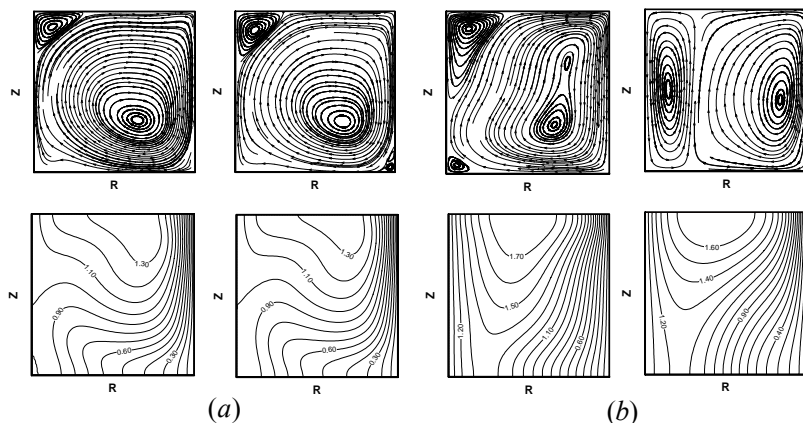


Figure 7 : Trajectoires des fonctions de courant et isothermes pour : $Ra_E=10^5$, $S=10$. (a) $Ha=25$: H et V ; (b) $Ha=100$: H et V

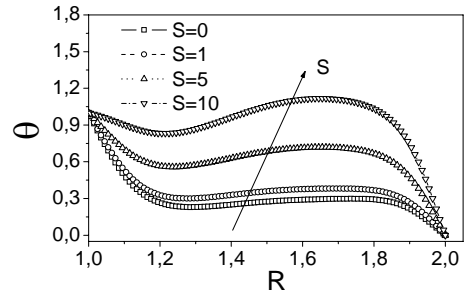


Figure 4 : Variation de la température θ au milieu en fonction du rayon R pour : $Ra_E=10^5$ et différents rapports S

λ	U_{\max}	W_{\max}	$ \psi_{\max} $
2	1662.676	1768.514	456.444
4	1500.989	1808.588	305.995
6	1424.520	1814.890	276.349
8	1423.692	1811.420	261.962

Tableau 1 : Effet du rapport des rayons sur les caractéristiques de l'écoulement pour : $Ra_E=10^5$ et $S=10$

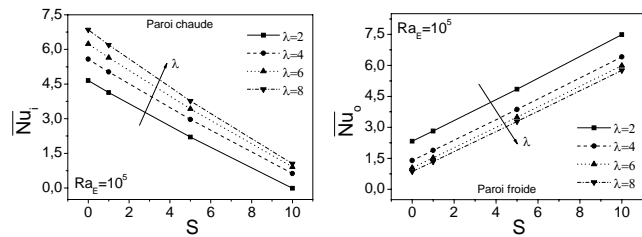


Figure 6 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport S pour différents rapports des rayons λ

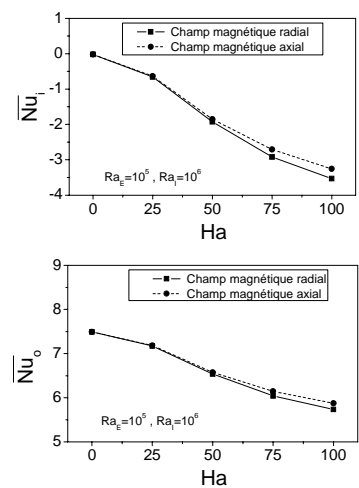


Figure 8 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Hartmann Ha pour : $Ra_E=10^5$ et $S=10$