

Une méthode multi-niveaux pour coupler radiation et advection-diffusion

Michel PONS^{1*}, Marx CHHAY^{1,2}, Jalel CHERGUI¹, Étienne WURTZ³

¹ LIMSIS CNRS UPR3251, BP 133, Rue J. von Neumann, Orsay

² Actuellement au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, BP 92208, Nantes

³ LOCIE, Univ. Savoie, Technolac, Le Bourget-du-Lac

* (auteur correspondant : michel.pons@limsi.fr)

Résumé - Soit un problème couplant des interactions à courte distance (typiquement la convection-diffusion) et des interactions à longue distance (typiquement les transferts radiatifs pariétaux). La décomposition de domaine (passage obligé du calcul parallèle) requière alors de nombreuses itérations pour accorder non seulement chaque sous-domaine avec ses voisins immédiats mais tout le domaine dans son ensemble. L'information obtenue en résolvant grossièrement mais globalement l'ensemble du domaine avec une procédure qui garde un sens physique, permet dans certains cas d'accélérer le processus itératif.

Nomenclature

c_p	capacité calorifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
d	nombre de mailles larges
\mathbf{J}_q	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
L_D	longueur du domaine \mathcal{D} , m
\mathbf{n}	vecteur normal à l'interface, m
p, q	paramètres numériques
Q	amplitude de flux de chaleur, $W.m^{-2}$
T	température, K
t	temps, s
\mathbf{u}	vecteur vitesse, $m.s^{-1}$
x	position axiale, m

Symboles grecs

α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
ε	émissivité, -
ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
σ_{SB}	const. de Stefan-Boltzmann, $W.m^{-2}.K^{-4}$
σ_q	source volumique de chaleur, $W.m^{-3}$
ω	pulsation de flux de chaleur, s^{-1}

Indices

0	relatif à la position $x = 0$
d	relatif à la position $x = L_D$
i	numéro de maille large
q	relatif à la chaleur
r	radiatif

1. Introduction

La prise de conscience de l'ampleur de la consommation énergétique dans le bâtiment (un quart de la consommation nationale pour le résidentiel et le tertiaire) ainsi que de la nécessité de la réduire drastiquement tout en assurant aux occupants une bonne qualité de l'air, conduit à repenser complètement la simulation numérique des flux d'air. En effet, ces flux sont fortement liés à la qualité et à la consommation énergétique des bâtiments. En outre, les simulations numériques utilisent de plus en plus le calcul parallèle, voire massivement parallèle, qui permet d'allier rapidité, précision et résolution [1]. Le calcul parallèle repose principalement sur la décomposition de domaine, technique permettant de résoudre des maillages très étendus. Chaque sous-domaine est calculé indépendamment, les interactions avec les sous-domaines voisins apparaissant dans les conditions aux limites. Le calcul d'un pas de temps est convergé sur l'ensemble du domaine lorsque les valeurs des variables et de leurs gradients sont les mêmes à chaque interface entre sous-domaines voisins, quel que soit le côté de l'interface considéré. En outre, nombre de problèmes physiques réels couplent des phénomènes dont les distances d'interaction diffèrent notablement. Par exemple, la convection-diffusion est un phénomène de proximité immédiate, sa distance d'interaction est

donc courte. Au contraire, les transferts radiatifs pariétaux créent des interactions immédiates à grande distance. La résolution par calcul parallèle avec décomposition de domaine d'un problème couplant ces différents types d'interactions, à courte et à longue distances, nécessite un grand nombre d'itérations afin d'accorder les différents sous-domaines entre eux tout en rendant correctement compte des interactions à grande distance. Le couplage entre convection-diffusion et rayonnement pariétal est au centre de plusieurs problèmes de thermique, en particulier ceux relatifs à l'habitat. On peut aussi remarquer qu'un écoulement solénoïde (« incompressible ») présente implicitement un tel couplage, car en plus de l'advection-diffusion de quantité de mouvement la contrainte d'incompressibilité transmet immédiatement toute modification à la totalité de l'écoulement.

La méthode numérique testée ici consiste à résoudre deux fois le même problème sur le même domaine, une première fois avec un maillage sous-résolu (mailles larges) et sur l'ensemble du domaine (solution globale), et une deuxième fois avec un maillage suffisamment résolu (mailles fines) et en parallèle sur les différents sous-domaines (solution locale). Le bénéfice escompté est que l'information obtenue avec la solution globale permet aux calculs de la solution locale de converger plus rapidement vers la solution [2]. Le but à long terme de ce travail est d'appliquer cette approche multi-niveaux à la résolution de Navier-Stokes dans un volume typique de l'habitat. Cependant, cette méthode multi-niveaux est d'abord testée ici avec un problème très simple : les transferts mono-dimensionnels couplant convection-diffusion avec rayonnement pariétal entre les extrémités du domaine.

2. Exposé de la méthode

2.1. Décomposition entre niveau global et niveau local

Soit l'équation de transport générique à résoudre sur un domaine continu connexe \mathcal{D} .

$$\partial_t (\rho c_p T) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \nabla \cdot (\rho c_p T \mathbf{u}) + \sigma_q \quad (1)$$

Pour les cas où la discrétisation fine de \mathcal{D} , \mathcal{D}_f , aboutit à un maillage trop important pour être traité sur un seul processeur, nous proposons d'introduire deux niveaux de résolution, un global et un local. Au niveau *global*, le problème (1) est résolu sur une décomposition du domaine \mathcal{D} en d mailles larges \mathcal{D}_i , qui constituent le domaine global $\bar{\mathcal{D}}$. Au niveau *local*, le problème est résolu en parallèle sur chaque sous-domaine \mathcal{D}_i , chacun étant discrétisé comme \mathcal{D}_f , de telle sorte que $\mathcal{D}_f = \bigcup_i \mathcal{D}_i$, voir Figure 1. En apposant une barre aux variables et aux opérateurs se rapportant au niveau global (maillage large), et l'indice i pour ceux concernant le niveau local (maillage fin), toute variable X définie sur \mathcal{D}_f peut être partagée en deux composantes : $X = \bar{X} + X_i$, où le champ \bar{X} est défini sur $\bar{\mathcal{D}}$ (une valeur par sous-domaine \mathcal{D}_i), et le champ X_i n'est défini que sur le sous-domaine \mathcal{D}_i augmenté des domaines de recouvrement numérique avec les sous-domaines voisins.

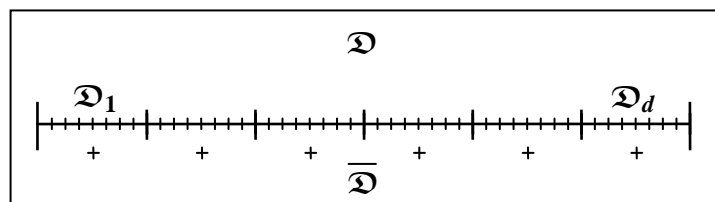


Figure 1 : Pour sa discrétisation fine \mathcal{D}_f , le domaine physique \mathcal{D} est décomposé en d sous-domaines \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq d$). Le maillage large $\bar{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} est obtenu avec un point par sous-domaine (+).

2.1.1. Niveau global

Au niveau global, l'équation de transport (1) s'écrit :

$$\partial_t (\rho c_p \bar{T}) = -\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{J}}_q - \bar{\nabla} \cdot (\rho c_p \bar{T} \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\sigma}_q \quad (2)$$

Cette équation aura un sens physique malgré la sous-résolution si $\rho c_p \bar{T}$ est la moyenne de $\rho c_p T$ sur \mathcal{D}_i . Pour que $|\mathcal{D}_i| \cdot \partial_t (\rho c_p \bar{T}) = \int_{\mathcal{D}_i} \partial_t (\rho c_p T)$, il faut et il suffit que :

$$\bar{\sigma}_q = \frac{1}{|\mathcal{D}_i|} \left\{ \int_{\mathcal{D}_i} \sigma_q + \int_{\partial \mathcal{D}_i} [(\bar{\mathbf{J}}_q + \rho c_p \bar{T} \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbf{J}_q + \rho c_p T \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \right\} \quad (3)$$

À la moyenne sur \mathcal{D}_i du terme source local σ_q , $\bar{\sigma}_q$ ajoute un terme qui rend compte de la différence entre les flux par convection-diffusion à la frontière de \mathcal{D}_i ($\partial \mathcal{D}_i$) tels qu'évalués au niveau global et au niveau local. Ce terme source additionnel peut être dit « de sous-maille » car il joue le même rôle que le terme de sous-maille introduit dans la méthode Simulations aux Grandes Structures (*SGS*, ou *LES*). Avec la loi de Fourier, les deux densités de flux de chaleur \mathbf{J}_q (locale) et $\bar{\mathbf{J}}_q$ (globale) s'expriment par $\mathbf{J}_q = -k \cdot \nabla T$ et $\bar{\mathbf{J}}_q = -k \cdot \bar{\nabla} \bar{T}$. Cependant, dans la décomposition de T en $T = \bar{T} + T_i$, \bar{T} est une valeur uniforme sur \mathcal{D}_i , si bien que l'on a les deux égalités $\nabla T = \nabla T_i$ et $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}_{qi}$. Au niveau global, $\bar{\mathbf{J}}_q$ est l'approximation de \mathbf{J}_q obtenue avec l'opérateur $\bar{\nabla}$ appliqué au champ \bar{T} .

2.1.2. Niveau local

Avec $T = \bar{T} + T_i$ et $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}_{qi}$, l'équation (1) devient l'équation de transport *locale* sur \mathcal{D}_i :

$$\partial_t (\rho c_p T_i) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{qi} - \nabla (\rho c_p \mathbf{u} T_i) + \left[\sigma_q - \partial_t (\rho c_p \bar{T}) - \nabla (\rho c_p \mathbf{u} \bar{T}) \right] \quad (4)$$

Le champ de vitesse \mathbf{u} est supposé connu, et cette équation détermine le champ T_i , avec un terme source local modifié par des grandeurs venant du niveau global.

2.1.3. Algorithme numérique

Les équations (2) à (4) opèrent bien une séparation des échelles, avec un niveau global qui représente en moyenne le phénomène, et un niveau local dont la moyenne est nulle. La réalisation numérique de ces deux propriétés nécessite (i) une évaluation correcte de $\bar{\sigma}_q$ à transmettre au niveau *global*, et (ii) de bonnes conditions aux limites aux frontières $\partial \mathcal{D}_i$ à transmettre au niveau *local*. Dans la première approche testée ici, toutes les caractéristiques thermophysiques et le champ de vitesse \mathbf{u} sont pris constants et uniformes. Pour chaque pas de temps, c'est d'abord le niveau global qui est résolu avec un schéma implicite :

$$\partial_t \bar{T} + \mathbf{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} - \alpha \cdot \bar{\nabla}^2 \bar{T} = \bar{\sigma}_\alpha^* \quad (5)$$

où le membre de droite $\bar{\sigma}_\alpha^*$ est $\frac{1}{\rho c_p |\mathcal{D}_i|} \left\{ \int_{\mathcal{D}_i} \sigma_q + \int_{\partial \mathcal{D}_i} [(\bar{\mathbf{J}}_q + \rho c_p \bar{T} \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbf{J}_q + \rho c_p T \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \right\}^*$

avec pour opérateur $[\bullet]^*$ l'extrapolation temporelle des valeurs de la quantité entre crochets obtenues pour les pas de temps antérieurs.

Puis le niveau local est résolu dans chacun des sous-domaines avec un schéma implicite :

$$\partial_t T_i + \mathbf{u} \cdot \nabla T_i - \alpha \nabla^2 T_i = (\rho c_p)^{-1} \cdot \sigma_q - \partial_t \bar{T} - \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{T} \quad (6)$$

À la résolution en parallèle des différents sous-domaines s'ajoute un processus itératif, dit *de Schwarz*, qui assure la continuité de la température et de son gradient aux interfaces entre sous-domaines. Ce processus consiste à transmettre les conditions aux limites entre sous-domaines voisins (voir Figure 2), conditions *de Dirichlet*, *de Neumann*, ou *de Robin*. Nous avons mis en œuvre les conditions de Robin, dont V. Martin a démontré l'efficacité dans sa thèse [3]. La Figure 2 montre le principe de cette transmission, illustré par un cas où le recouvrement R est égal à 1 : le point **a**, à l'extrémité gauche du sous-domaine \mathcal{D}_{i+1} reçoit du sous-domaine \mathcal{D}_i la valeur de la quantité f calculée au point **b** situé à R cellules de l'extrémité droite de \mathcal{D}_i ; de même, le point **c**, à l'extrémité droite du sous-domaine \mathcal{D}_i reçoit du sous-domaine \mathcal{D}_{i+1} la valeur de la quantité f_+ calculée au point **d** situé à R cellules de l'extrémité gauche de \mathcal{D}_{i+1} . Dans notre problème, les quantités transmises par les conditions de Robin, f et f_+ , s'expriment par : $f_{\pm} = (\nabla T - \mathbf{u} \cdot T / \alpha) \cdot \mathbf{n} \pm [p / \alpha + q] T$, où p est une constante et q inversement proportionnel au pas de temps de calcul. L'inversion de signe d'une partie de f en deux points éloignés d'à peine R cellules assure la quasi-continuité de T et de ∇T à l'interface. V. Martin [3] a montré que le processus de Schwarz converge rapidement pour $p = 2$.

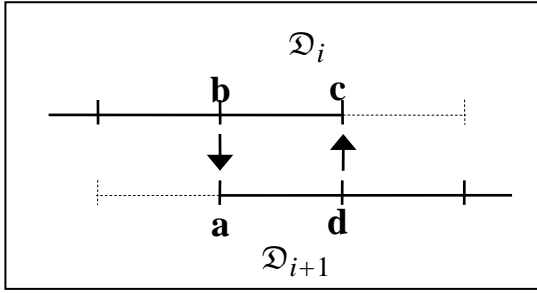


Figure 2 : Transmission des conditions de continuité entre sous-domaines voisins ; les pointillés indiquent les points virtuels introduits pour imposer les conditions aux limites de \mathcal{D}_i .

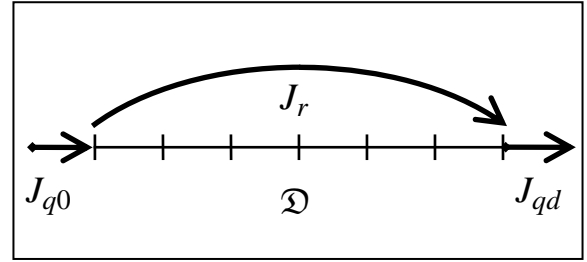


Figure 3 : Couplage rayonnement et convection-diffusion : les flux totaux J_{q0} et J_{qd} aux limites du domaine \mathcal{D} sont imposés, et le flux radiatif J_r se transmet entre les deux limites (parois) extrêmes.

3. Problème couplant rayonnement et convection-diffusion

Le système considéré est un volume 1D de 25 cm de long rempli d'Hélium à 100 bars. Aux extrémités du domaine, des flux *totaux* J_{q0} et J_{qd} (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) périodiques sont imposés selon :

$$J_{q0} = 1 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \text{ en } x = 0 \quad \text{et} \quad J_{qd} = 1.5 \times \sin(\omega_d \cdot t) \text{ en } x = L_D, \quad (7)$$

Les périodes choisies, 390 s en $x = 0$ et le double en $x = L_D$, permettent aux ondes de température de pénétrer significativement dans le volume. Pour tester la méthode multi-niveaux sur un problème couplant des interactions à longue distance (rayonnement pariétal) et à courte distance, le flux total imposé à chaque frontière est réparti entre une composante convecto-diffusive (interaction locale) et une composante radiative (interaction globale), voir Figure 3. Ce couplage s'écrit :

$$J_{q0} = (\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n}_x)_{x=0} + J_r \quad \text{et} \quad J_{qd} = (\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n}_x)_{x=L_D} + J_r \quad (8)$$

$$J_r = \langle 4\varepsilon T^3 \rangle \sigma_{SB} (T_0 - T_d) \quad (9)$$

L'expression (9) pour J_r simule un échange radiatif direct entre les parois limites du domaine. La puissance échangée est linéarisée ; la quantité $\langle 4\varepsilon T^3 \rangle$ étant prise constante, égale à la valeur moyenne de $(\varepsilon_0^{-1} + \varepsilon_d^{-1} - 1)^{-1} (T_0^3 + T_0^2 T_d + T_0 T_d^2 + T_d^3)$. Les émissivités ε_0 et ε_d sont prises égales à 0,67. Le rapport radiatif sur conductif $\langle 4\varepsilon T^3 \rangle / (k / L_D)$ donne un nombre de Biot égal à 5. La température moyenne est fixée à 298 K ; pour les températures, l'écart à cette moyenne est adimensionné avec un ΔT de référence égal à 0.731 K.

Deux algorithmes de résolution sont testés et confrontés. Le premier consiste en la décomposition de domaine classique, à ceci près que, pour les sous-domaines numéros 1 et d (voir Figure 1), la condition à la limite « externe » (concernant la limite physique de \mathcal{D}), condition qui s'exprime par les équations (7) à (9), crée un couplage entre les valeurs de T et de ∇T aux deux frontières. Le second algorithme met en pratique la méthode multi-niveaux. La résolution du niveau global fournit deux informations : (i) une valeur pour le flux radiatif J_r ; et (ii) une première évaluation de l'évolution de la composante globale de T aux interfaces $\partial\mathcal{D}_i$ entre sous-domaines. Le niveau local est ensuite résolu. La transmission d'une valeur unique pour J_r assure la cohérence thermodynamique ; la condition (8) devient alors une simple condition de Neumann puisque le flux diffusif $[(\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n}_x)_{x_\bullet} = J_{q\bullet} - J_r]$ est maintenant connu. Ensuite, le processus itératif de Schwarz est initié avec des premières valeurs des grandeurs f et f_+ évaluées en utilisant les informations du niveau global quant à l'évolution de la variable \bar{T} aux interfaces. Il est attendu que cette première évaluation soit plus proche de la valeur convergée qu'une simple extrapolation.

4. Calcul-test et résultats

Des premiers calculs-tests ont été réalisés. La taille du recouvrement entre sous-domaines est minimale ($R = 1$) ; le nombre de sous-domaines est de 18, avec 20 points de calcul par sous-domaine (hors-recouvrement). La génération interne de chaleur est annulée. Dans un premier cas, la vitesse d'advection est nulle, dans un deuxième cas, elle est de 0.062 mm/s. A fin de simplifier le problème, il est supposé que débit entrant est thermalisé à la température en $x = 0$. La Figure 4 compare les résultats des calculs, profils de température après 2000 pas de temps, soit après 10 cycles pour la sollicitation en $x = 0$, réalisés avec les deux méthodes, la décomposition de domaine classique (courbe rouge discontinue), et la méthode multi-niveaux (courbe noire continue). La différence entre les deux méthodes est imperceptible, ce qui montre que la méthode multi-niveaux, implantée correctement, n'induit aucun dérive. Les faibles valeurs des excursions en température justifie *a posteriori* la linéarisation des transferts radiatifs. La dissymétrie imposée par les conditions aux limites est évidente.

La mise en mouvement forcée du fluide advecte les oscillations imposées en $x = 0$ plus profondément à l'intérieur du domaine, et atténue la pénétration des oscillations imposées à l'autre extrémité. Ce que montre surtout la Figure 4, c'est que les valeurs calculées sur la grille globale (les croix +) sont bien les moyennes sur les sous-domaines correspondants. Comme attendu d'après la théorie, ce champ global est bien une approximation pertinente au premier ordre du champ complet.

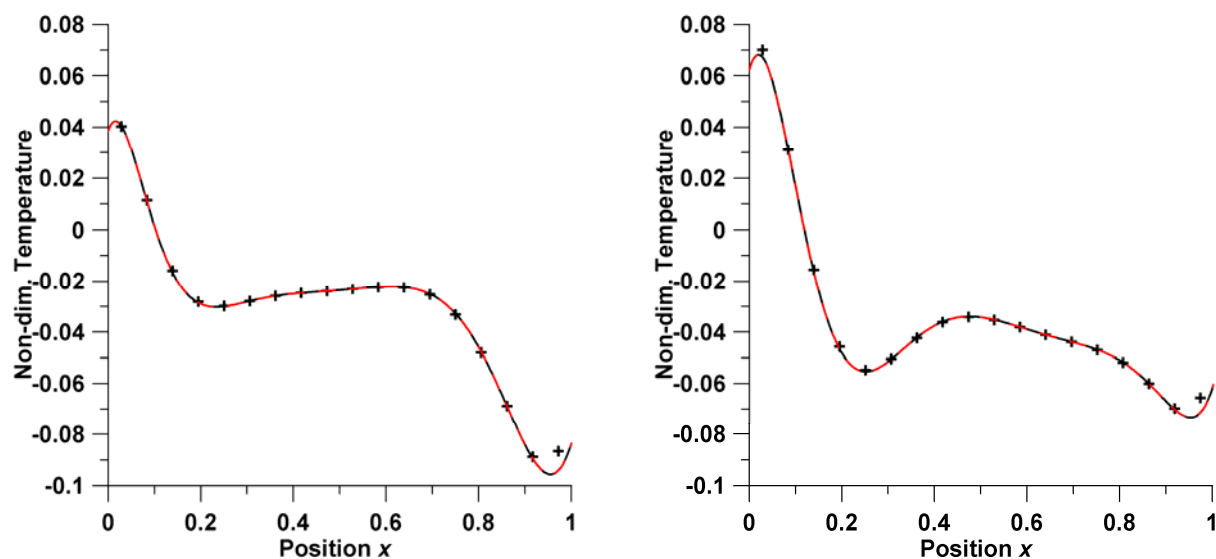


Figure 4 : Profils de température après 10 cycles de la sollicitation en $x = 0$. À gauche, cas sans advection ; à droite, cas avec advection ; courbe rouge discontinue : calculs par stricte décomposition de domaines ; courbe noire continue : calculs par méthode multi-niveaux, avec valeurs calculées sur la grille globale (+).

Il semble bien que lorsque les deux sous-domaines externes traitent des conditions aux limites strictement locales (Neumann) plutôt que couplant radiation globale et conduction, le nombre d'itérations total soit réduit. Cependant, si la méthode multi-niveaux n'est pas toujours la plus rapide selon les cas étudiés, il est possible qu'elle permette d'utiliser seuls les calculs globaux sur une partie des pas de temps. Ces deux points sont actuellement à l'étude.

5. Conclusion

Il est possible d'implanter une méthode multi-niveaux qui confère au calcul global sous-résolu un sens physique robuste, ce qui peut faciliter le couplage avec d'autres phénomènes physiques à grande échelle. Il n'est cependant pas sûr que la méthode soit efficace si seul l'accélération du temps de calcul est recherchée.

Références

- [1] B. F. Smith, P. E. Bjorstad et W. D. Groop, *Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [2] S. Faure, J. Laminie et R. Temam, Finite volume discretization and multilevel methods in flow problems, *Journal of Scientific Computing*, 25-1 (2005), 231-261.
- [3] V. Martin, *Méthode de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie*, Thèse PhD Université Paris 13, (2003).

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre de : projet ANR-PREBAT *ORASOL* (ANR-06-PBAT-009-05), projet ANR-PREBAT *DYNASIMUL*, et Projet Exploratoire du Programme Interdisciplinaire *Energie* du CNRS *ADNBATI* (PE09-3.2.1-1).