

Espacement optimal entre ailettes verticales refroidies par convection mixte.

Hua SUN, Ru LI, Eric CHENIER, Guy LAURIAT, Jacques PADET*

Université Paris-Est, MSME UMR 8208 CNRS, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2

* Université de Reims, Champagne-Ardenne, GRESPI EA 4301, Moulin de la Housse, 51687 Reims Cedex 2

(Auteur correspondant : lauriat@univ-mlv.fr)

Résumé – Des simulations numériques de la convection mixte d'air entre ailettes verticales ont été conduites afin de déterminer l'espacement optimal correspondant au flux de chaleur maximal transférable depuis des ailettes disposées sur une surface de dimensions données. Les résultats montrent qu'il existe toujours un espacement optimal en convection mixte : cet espacement est inférieur à ceux calculés en convection naturelle et en convection forcée.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	Ra_H	nombre de Rayleigh basé sur la hauteur
c_p	chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	Re	nombre de Reynolds basé sur D_h
D	distance entre ailettes, m	(u,w)	composantes de la vitesse \mathbf{v} , $m.s^{-1}$
D_h	diamètre hydraulique, $D_h = 2D$, m	(x, z)	coordonnées cartésiennes
e	épaisseur d'une ailette, m	<i>Symboles grecs</i>	
Gr	nombre de Grashof	β	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
H	hauteur de la surface ailetée, m	ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	ρ	densité, $kg.m^{-3}$
L	largeur de la surface ailetée, m	<i>Indices</i>	
\mathbf{n}	vecteur normal	c	paroi chaude de la conduite
n_c	nombre de conduites	cm	convection mixte
p	pression statique, $N.m^{-2}$	cn	convection naturelle
Pe	nombre de Péclet	0	ambiance
q	flux de chaleur, W	opt	optimal
		s	section de sortie

1. Introduction

L'espacement optimal entre des ailettes planes disposées sur une surface refroidie par convection naturelle ou par convection forcée est un problème qui a suscité de nombreuses études expérimentales et numériques depuis les travaux d'Elenbaas [1]. Cet espacement correspond au flux de chaleur maximal qu'il est possible de transférer en munissant la surface de n_a ailettes parfaitement conductrices. Dans le cas de surfaces rectangulaires verticales, une synthèse de ces calculs est présentée dans l'ouvrage de Bejan [2]. En convection naturelle, l'espacement optimal peut être déterminé par l'intersection de deux solutions asymptotiques en D^{-1} et D^2 . La première est basée sur l'hypothèse que les épaisseurs des couches limites se développant sur les surfaces verticales sont, dans la section de sortie (en $z = H$), très inférieures à $D/2$. La seconde solution suppose au contraire que la température du fluide de refroidissement est, dans la section de sortie, uniformément égale à celle des parois. En convection forcée, des calculs simplifiés permettent aussi de déterminer un espacement optimal, intersection de deux solutions asymptotiques en $D^{-2/3}$ lorsque les ailettes sont très éloignées et en D^2 lorsqu'elles sont suffisamment proches pour qu'un écoulement de Poiseuille s'établisse très rapidement.

Dans de nombreuses applications, cas des composants électroniques en particulier, le refroidissement s'effectue par convection mixte [3] afin d'augmenter l'efficacité des ailettes tout en utilisant des ventilateurs de faible puissance et peu bruyants. Nous présentons dans cette communication des résultats numériques obtenus lorsque les forces de pression et de gravité agissent dans le même sens. On montre qu'un espacement optimal existe toujours en convection mixte mais que sa valeur dépend fortement de la différence de pression.

2. Formulation mathématique

On considère des écoulements bidimensionnels, incompressibles et laminaires dans des conduites planes verticales. Compte tenu des écarts maximum de température, on suppose que toutes les propriétés physiques sont constantes, à l'exception de la masse volumique dans la force de pesanteur (approximation de Boussinesq). Les équations de conservation s'écrivent alors sous la forme (axe z dirigé vers le haut et origine des coordonnées placée au centre de la section d'entrée) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) = -\nabla(p + \rho_0 g z) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0 g \beta (T - T_0) \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} T) \right) = k \nabla^2 T \quad (3)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$x = \pm D/2 \text{ et } 0 < z < H, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad T = T_c \quad (4)$$

$$-D/2 < x < D/2 \text{ et } z = 0, \quad u = 0, \quad \partial w / \partial z = 0, \quad p = -\rho_0 w^2 / 2, \quad T = T_0 \quad (5)$$

$$-D/2 < x < D/2 \text{ et } z = H, \quad u = 0, \quad \partial w / \partial z = 0, \quad p + \rho_0 g H = -p_s, \quad \partial T / \partial z = 0 \quad (6)$$

En convection naturelle pure, $p_s = 0$. En convection forcée, la force d'Archimède est négligée dans l'équation 2. A l'instant initial, le fluide est supposé au repos et à température T_0 .

Le flux de chaleur q_p transféré au fluide par convection sur les deux parois d'une conduite de profondeur L est calculé par la relation :

$$q_p = -2Lk \int_0^H \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-D/2} dz \quad (W) \quad (7)$$

L'augmentation du flux d'enthalpie entre l'entrée et la sortie de la conduite est donnée par

$$q_h = \rho c_p L D [(wT)_{m,H} - (wT)_{m,0}] \quad (W) \quad (8)$$

où $(wT)_m$ est la moyenne surfacique de (wT) dans une section de la conduite. Notons que q_p est supérieur à q_h parce que la conduction axiale n'est pas prise en compte dans le calcul de q_h . Lorsque les températures des parois sont imposées, ces deux flux tendent vers la même valeur lorsque le nombre de Péclet est suffisamment grand pour que la conduction axiale soit négligeable.

3. Méthode numérique

Les équations de conservation sont discrétisées spatialement à l'ordre 2 par la méthode des volumes finis. On écrit les équations discrètes en employant des maillages structurés sur lesquels toutes les variables sont localisées aux centres des mailles. La discrétisation temporelle à l'ordre 2 des équations est effectuée avec un schéma d'Euler pour les termes de diffusion et une extrapolation d'Adams-Bashforth pour les termes de transport. Le couplage vitesse-pression est traité par une méthode de projection.

Les solutions des problèmes d'Helmholtz pour les composantes des vitesses et le champ de température ainsi que la correction de pression, sont obtenues par la méthode BiCGStab pré-conditionnée par une décomposition LU incomplète. Après des études de maillages, on a retenu une grille irrégulière comportant 50×800 mailles, avec des mailles plus fines à l'entrée et à proximité des parois. La solution stationnaire est supposée atteinte lorsque le maximum des évolutions relatives des variables u , w et T est inférieur à 10^{-9} .

4. Résultats

On considère des ailettes planes verticales de hauteur $H = 10 \text{ cm}$, espacées d'une distance D (principal paramètre du problème) et à température uniforme $T_c = 340 \text{ K}$. Le fluide de refroidissement est de l'air entrant dans la conduite à une température $T_0 = 300 \text{ K}$. Les propriétés physiques de l'air à T_0 retenues dans cette étude ont pour valeurs : $\rho = 1,176 \text{ kg.m}^{-3}$, $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$, $c_p = 1006 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $k = 0,0261 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Dans la suite, les valeurs numériques des flux seront données pour $L = 1 \text{ m}$.

4.1. Convection naturelle

L'espacement optimal correspondant au flux de chaleur maximum qu'il est possible de transférer entre la surface des ailettes et le fluide ambiant peut être obtenu en considérant les deux cas asymptotiques évoqués dans l'introduction. Les analyses simplifiées sont fondamentalement basées sur l'hypothèse de diffusion de chaleur axiale négligeable, ce qui n'est valable que si la vitesse débitante est très grande (nombre de Péclet supérieur à $Pe \approx 100$). Pour la configuration étudiée, le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur des conduites a pour valeur $Ra_H = 3,76 \times 10^6$. Le nombre de Péclet basé sur la vitesse débitante de convection naturelle et sur le diamètre hydraulique est compris entre $0,62 \leq Pe_{cn} \leq 156$. Avec la corrélation de Bar Cohen et Rohsenow [4], on obtient $D_{opt} = 6,16 \text{ mm}$, et avec celle moins élaborée issue de [2], l'espacement optimal, $D_{opt} = 2,3H \times Ra_H^{-1/4}$, est égal à $D_{opt} = 5,22 \text{ mm}$.

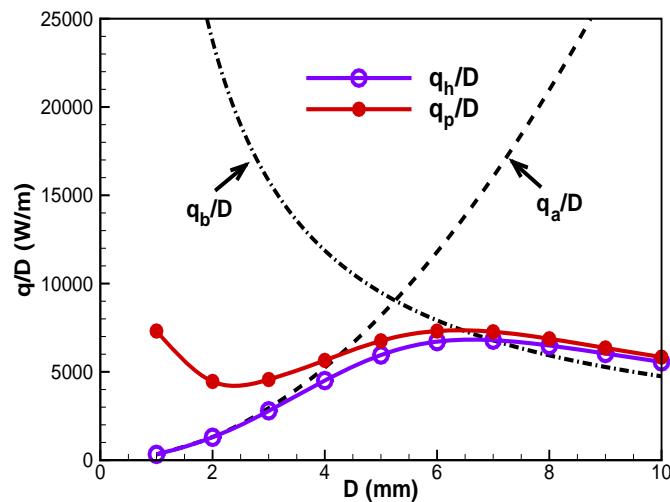


Figure 1 : Variations des flux rapportés à l'espacement et comparaison avec les solutions asymptotiques q_a/D et q_b/D tirées de [2].

La figure 1 montre la variation du flux de chaleur rapporté à l'espacement en fonction de D (q_a/D et q_b/D étant les solutions asymptotiques simplifiées de [2]). On observe que l'espacement optimal, proche de $D_{opt} = 6,4 \text{ mm}$ ou de $D_{opt} = 6,6 \text{ mm}$ selon que l'on considère q_p/D ou q_h/D , est en bon accord avec l'analyse asymptotique de Bar Cohen et Rohsenow [4]. Lorsque l'espacement est très petit ($D = 1 \text{ mm}$), le régime d'écoulement s'établit sur une courte distance et la vitesse débitante est faible ($w_m \approx 7 \text{ mm/s}$), comme le montre la figure 2. Les analyses asymptotiques n'ont plus alors de sens car la diffusion de chaleur axiale est

dominante à l'entrée de la conduite : l'essentiel de la chaleur cédée par les parois s'effectue par conduction vers la section d'entrée. Le fluide est uniformément à la température des parois sur la majeure partie de la hauteur de la conduite. Pour un espacement $D = 10 \text{ mm}$, le profil de vitesse n'est pas établi dans la section de sortie parce que l'air n'est pas à la température des parois (température minimale sur l'axe égale à $T(0,H) = 323 \text{ K}$, Fig. 3). Pour de plus grands espacements, la vitesse débitante devient indépendante de D (pour $D = 2 \text{ cm}$, le débit est approximativement celui fourni par deux couches limites séparées). Le rapport q/D , qui caractérise l'efficacité des ailettes, diminue constamment (décroissance de D_{opt} en $\approx D^{-1}$ lorsque $D > D_{opt}$, comme donnée en [2]).

Le flux de chaleur transféré depuis les parois, q_p/D , est comparé au flux d'enthalpie sortant de la conduite, q_h/D , sur la figure 1. On observe, d'une part, que ces flux diffèrent fortement pour de petits espacements et, d'autre part, que l'analyse asymptotique [2] ne permet de représenter correctement que les variations du flux d'enthalpie, notamment aux espacements pour lesquels la température de sortie est proche de la température des parois. Les différences entre q_p/D et q_h/D sont dues à la conduction axiale, d'autant plus importante que l'espacement (donc la vitesse débitante) est faible.

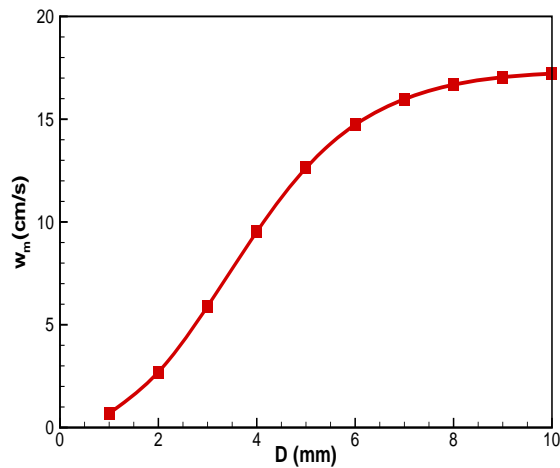


Figure 2: Variation de la vitesse débitante avec l'espacement entre ailettes.

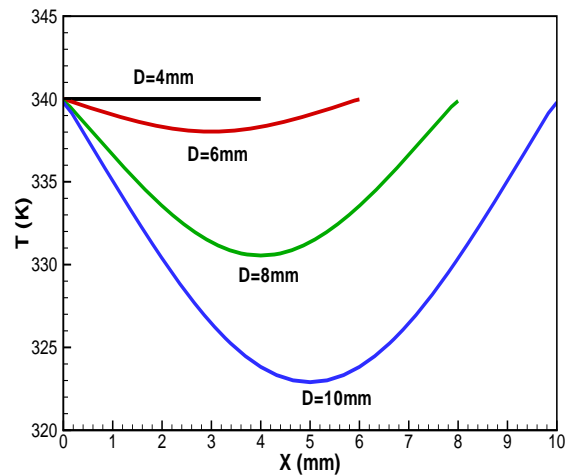


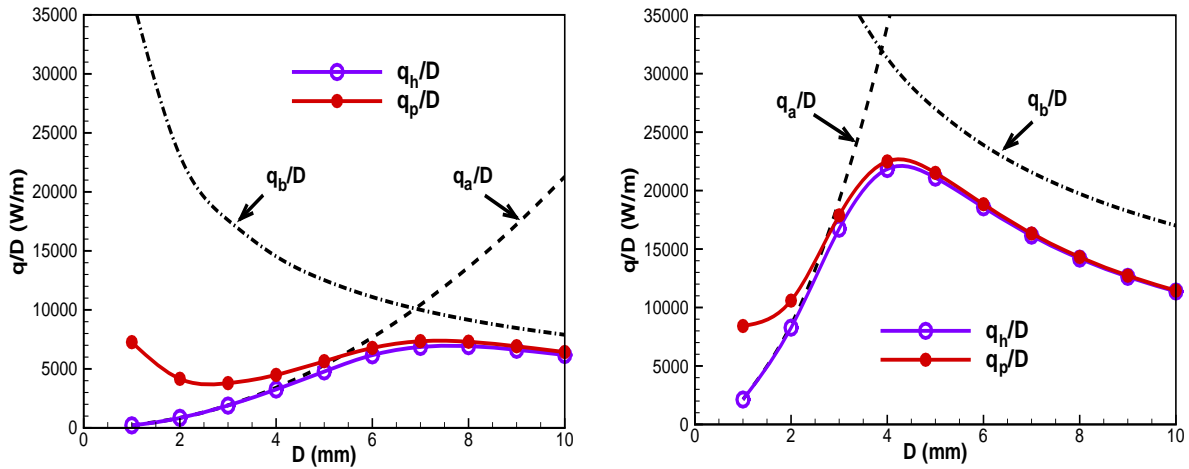
Figure 3: Profil de température dans la section de sortie.

4.2. Convection forcée

L'une des originalités de notre modèle est de ne pas imposer une vitesse d'entrée (ou un nombre de Reynolds) mais une dépression de sortie ($p_s < 0$). Il s'ensuit que le nombre de Reynolds décroît automatiquement lorsque l'espacement est réduit si p_s est fixée. L'analyse des solutions numériques est basée sur les calculs asymptotiques de Bejan [5] qui conduisent à un espacement optimal égal à $D_{opt} \approx 2,73 H^{1/2} (av/\rho\Delta p)^{1/4}$. Dans ce paragraphe, comme dans le suivant, les calculs ont été effectués pour des valeurs de la pression de sortie fixées entre $-0,1 \text{ Pa}$ et -1 Pa , ce qui correspond à des nombres de Reynolds basés sur le diamètre hydraulique compris entre $Re \approx 0,3$ et $Re \approx 591$, selon l'espacement.

Pour ces valeurs de p_s , les calculs ont été effectués pour $1 \text{ mm} \leq D \leq 10 \text{ mm}$. Les rapports q_p/D et q_h/D sont représentés sur les figures 4a et 4b pour $p_s = -0,1 \text{ Pa}$ et $p_s = -1 \text{ Pa}$, les solutions asymptotiques (q_a/D et q_b/D) étant représentées en lignes pointillées. On constate d'abord que l'accord entre calculs et théorie est meilleur que dans le cas de la convection naturelle en ce qui concerne la valeur de D_{opt} (valeurs théoriques de D_{opt} [5] : $6,9 \text{ mm}$ et $4,8 \text{ mm}$ pour $p_s = -0,1 \text{ Pa}$ et $p_s = -1 \text{ Pa}$). On observe ensuite que l'écart entre q_p/D et q_h/D diminue lorsque $|p_s|$ ou l'espacement augmente (et donc le nombre de Péclet). Cet écart devient négligeable lorsque $Pe \approx 150$ (soit $D = 5 \text{ mm}$ sur la figure 4b). Aux faibles espacements, la

diffusion axiale est, comme en convection naturelle, prédominante. Par rapport à la convection naturelle, l'augmentation du refroidissement est faible lorsque $p_s = -0,1 Pa$. L'effet de l'aspiration est notable dès que $p_s = -0,4 Pa$.



4a : $p_s = -0,1 Pa$

4b : $p_s = -1 Pa$

Figure 4 : Convection forcée : variations des flux rapportés à l'espacement et comparaison avec les solutions asymptotiques (q_a/D et q_b/D) [5] pour des dépressions $p_s = -0,1 Pa$ et $-1 Pa$

4.3. Convection mixte

Pour une différence de température donnée, il n'existe qu'un espacement optimal lorsque le refroidissement s'effectue par convection naturelle (la hauteur de la surface à refroidir étant fixée). En convection forcée, cet espacement n'existe pas si la dépression n'est pas fixée : la solution suggérée dans [5] montre que D_{opt} tend vers zéro à mesure que la dépression augmente. De plus, lorsque $D = D_{opt}$ le flux transféré est proportionnel à la racine carrée de la dépression (tous les autres paramètres du problème étant fixés).

S'agissant d'un problème d'optimisation, on suggère donc un autre critère : pour une puissance mécanique fixée, quel est l'espacement optimal ? A cette fin, des calculs ont été effectués pour des dépressions comprises entre $p_s = -0,1 Pa$ et $-1 Pa$, les autres conditions étant fixées. Lorsque la dépression dépasse $p_s = -1 Pa$, l'effet de la convection naturelle est marginal et l'étude de la convection mixte n'a plus de sens (Tableau 1, valeurs du rapport Gr_{Dh}/Re^2_{Dh} caractérisant l'importance relative de la convection naturelle.)

La figure 5 montre l'effet de la dépression sur l'espacement optimal pour $p_s = -0,2 Pa$ et $p_s = -1 Pa$. On constate, d'une part, qu'il existe toujours un espacement optimal en convection mixte (ce qui n'a jamais été montré auparavant) et, d'autre part, que cet espacement décroît lorsque $|p_s|$ augmente. L'influence relative de la convection naturelle diminue quand la dépression augmente, ce qui était prévisible, l'espacement optimal tendant alors vers celui obtenu en convection forcée.

On considère maintenant une surface carrée ($H = L = 10 cm$) munie d'ailettes d'épaisseur $e = 1 mm$. Pour un espacement D entre ailettes, le nombre de conduites est $n_c = (L-e)/(D+e)$. La puissance mécanique requise pour augmenter la vitesse du fluide peut être, approximativement, évaluée par la relation $P_{méca} = w_{m,cm} n_c D_{opt} \Delta p$ où $w_{m,cm}$ est la vitesse débitante et Δp la différence de pression entre les sections d'entrée et de sortie. Cette différence, dépendant de l'espacement pour une valeur de p_s fixée, est calculée à partir de la relation de Bernoulli. Pour des dépressions inférieures à $p_s = -1 Pa$, la puissance mécanique est négligeable (inférieure à $20 mW$) devant l'augmentation du flux transféré (Tableau 1). La conclusion est donc qu'une faible dépression permet une augmentation très importante du transfert de chaleur sans une dépense significative de puissance mécanique.

5. Conclusion

Nous avons modélisé et simulé numériquement les transferts de chaleur par convection entre des surfaces isothermes représentatives d'ailettes verticales. Lorsque les transferts s'effectuent par convection naturelle ou par convection forcée, les solutions obtenues montrent, en relativement bon accord avec les théories asymptotiques, qu'il existe, pour une hauteur donnée de la surface à refroidir, un espacement optimal correspondant au flux de chaleur maximal transférable. En convection mixte, cet optimum existe toujours et la valeur de D_{opt} est inférieure à celle obtenue en convection forcée pour la même dépression. Nous montrons aussi qu'une faible dépression permet d'augmenter considérablement le flux de chaleur.

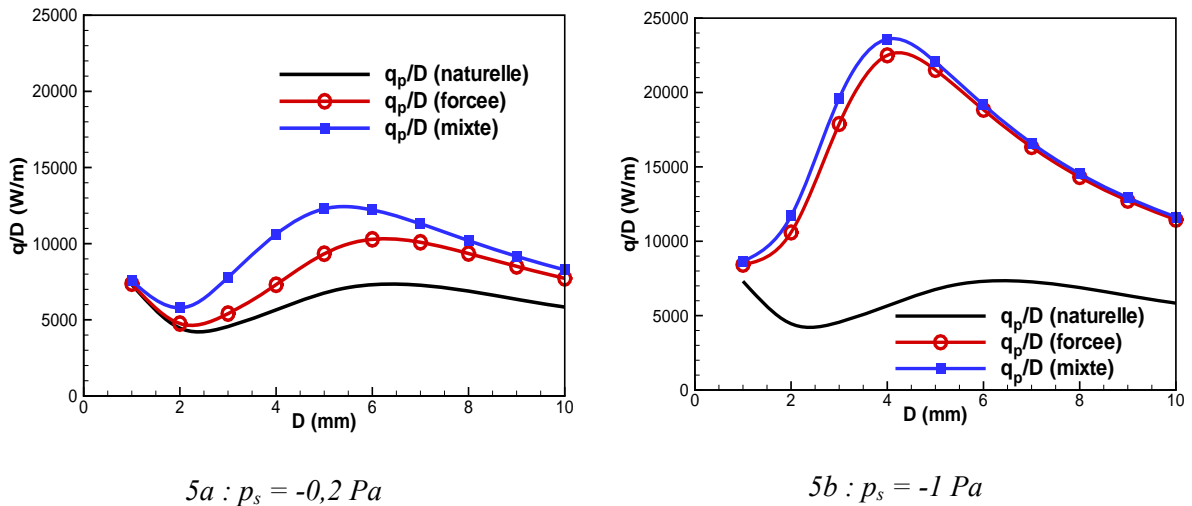


Figure 5 : Variations des flux de chaleur rapportés à l'espacement pour des dépressions $p_s = -0,2 Pa$ et $p_s = -1 Pa$ (convection forcée ou mixte).

$ p_s (Pa)$	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
$D_{opt} (mm)$	6	6	5	5	4	4
n_c	15	15	17	17	20	20
$w_m (cm/s)$	14,7	23,1	26,5	39,7	0,44	56,3
Gr_{Dh}/Re_{Dh}^2	-	1,17	0,746	0,351	0,225	0,145
$Q_{total} (W)$	658	915	1044	1358	1696	1800

Tableau 1 : Grandeurs caractéristiques en fonction de la dépression ($Q_{total} = n_c q$).

Références

- [1] W. Elenbaas, Heat dissipation of parallel plates by free convection, *Physica*, 9:1 (1942), 1–28.
- [2] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, Wiley, 1995
- [3] J. Padet, R.M. Cotta, E. M. Mladin, Un autre regard sur la convection mixte, Comptes Rendus COFRET'10, Iasi, Roumanie, 2010
- [4] A. Bar-Cohen, W.M. Rohsenow, Thermally optimum spacing of vertical, natural convection cooled, parallel plates, *ASME J. Heat Transfer*, 106 (1984), 116-123.
- [5] A. Bejan, E. Sciubba, The optimal spacing of parallel plates cooled by forced convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35 (1992), 3259-3264.