

# Etude numérique de la convection mixte dans un canal horizontal à surface libre

Lahcen BAMMOU<sup>1,2</sup>, Kamal EL OMARI<sup>1,\*</sup>, Serge BLANCHER<sup>1</sup>, Yves LE GUER<sup>1</sup>, Brahim BENHAMOU<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Électrique (SIAME), EA Fédération IPRA-CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), Bat. d'Alembert, Avenue Jules Ferry, 64075 Pau Cedex, France.

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique, Procédés de l'Energie et de l'Environnement(LMP2E), ENSA, B.P. 1136 - 80000 Agadir - Maroc

<sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Énergétique (CNRST-URAC27), Université Cadi Ayyad - Dépt. de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech 40001, Maroc.

\*(auteur correspondant : kamal.elomari@univ-pau.fr)

**Résumé-** Nous présentons une étude numérique d'un écoulement laminaire tridimensionnel de convection mixte dans un canal horizontal chauffé uniformément par le bas et dont la surface supérieure est libre et supposée plane. Les parois latérales sont thermiquement isolées. Bien que d'un intérêt certain pour de nombreuses applications industrielles, cette situation a très peu été étudiée d'un point de vue académique dans la configuration de cette étude. Les équations couplées de Navier-Stokes et de l'énergie sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis dans l'hypothèse de Boussinesq. Lorsque les forces induites par les courants de convection naturelle et forcée sont du même ordre de grandeur (pour un nombre de Richardson  $Ri=O(1)$ ), les premiers résultats montrent un développement des instabilités sous forme de rouleaux convectifs longitudinaux semblables à ceux rencontrés pour des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Le nombre et la distribution spatiale de ces rouleaux le long du canal dépendent des conditions de l'écoulement.

## Nomenclature

$Bi$	nombre de Biot	$U_{moy}$	vitesse moyenne d'entrée, $m.s^{-1}$
$h$	coefficient de transfert thermique, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\vec{v}$	vecteur vitesse adimensionné
$H$	hauteur du canal, $m$	$V_x, V_y, V_z$	composantes adimensionnées du vecteur vitesse
$\vec{k}$	vecteur unitaire selon l'axe $\vec{z}$	$x, y, z$	coordonnées adimensionnées
$Ma$	nombre de Marangoni	$\beta$	coefficient dilatation thermique, $K^{-1}$
$Nu$	nombre de Nusselt	$\theta$	température réduite
$Pr$	nombre de Prandtl	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$p$	pression adimensionnée	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$Ra$	nombre de Rayleigh	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$Re$	nombre de Reynolds	$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$Ri$	nombre de Richardson	$\mu$	viscosité dynamique, $Pa.s$
$T$	température, $K$	$\sigma$	tension superficielle, $N.m^{-1}$
$t$	temps adimensionné		

## 1 Introduction

L'étude de la convection mixte au sein des films liquides ruisselant sur des plaques planes est rencontrée dans de nombreuses applications industrielles telles que les dispositifs de refroidissement par évaporation, ou les échangeurs de chaleur compacts. La diversité des paramètres thermophysiques qui interviennent lors du couplage des phénomènes complexes de transferts de chaleur et de masse lors de ces écoulements explique une relative abondance d'études théoriques et expérimentales. Par exemple, une étude expérimentale a été effectuée par Wang et al. [1] pour déterminer les conditions hydrodynamique et thermique d'un écoulement dans un canal ouvert uniformément chauffé par le bas et étudier l'effet de flottabilité sur le développement de la couche limite thermique. D'autres travaux ont été réalisés sur des films liquides minces à surface libre ondulée pour lesquels les auteurs n'ont tenu compte que des effets thermocapillaires [2, 3]. Dans ces différentes études, la plupart des auteurs n'a pas étudié les instabilités ther-

moconvectives qui se produisent au sein du film liquide chauffé uniformément par le bas. En effet, lorsque les forces induites par les courants de convection naturelle et forcée sont du même ordre de grandeur (soit  $Ri = Ra/(Pr.Re^2) = O(1)$ ), des instabilités se développent sous la forme de rouleaux convectifs longitudinaux semblables à ceux rencontrés pour des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Une revue bibliographique complète des études concernant les instabilités dans cette configuration d'écoulement a été réalisée par Nicolas [4].

La présente étude s'intéresse à la simulation numérique de la convection mixte lors de l'écoulement d'eau dans un canal horizontal à surface libre chauffé uniformément par le bas. L'objectif est d'étudier, dans un premier temps, l'influence de la variation des paramètres que sont le nombre de Reynolds et le coefficient d'échange thermique à la surface libre sur les transferts thermiques dans le fluide. Dans un second temps, les effets de tension superficielle et leur variation avec les gradients de température (effet Marangoni) seront pris en compte.

## 2 Description et formulation du problème

Nous considérons un écoulement d'eau ( $Pr = 7$ ) dans un canal rectangulaire horizontal de hauteur  $H$ , de largeur  $10H$ , de longueur  $50H$ , et dont la surface supérieure est libre (Figure 1). Les parois latérales du canal sont adiabatiques, la paroi horizontale du bas est adiabatique sur une longueur  $2H$  mesurée à partir de la section d'entrée du canal. Au delà, la paroi est maintenue à une température uniforme  $T_c$  supérieure à la température d'entrée de l'eau  $T_0$  ( $T_c > T_0$ ). L'origine du repère est placée à la distance  $2H$  de la section d'entrée du canal.

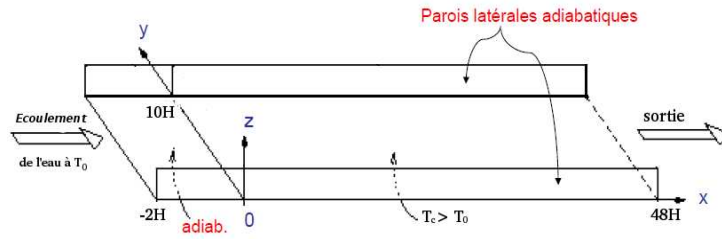


Figure 1 : Géométrie de la configuration retenue et conditions aux limites

Le fluide est supposé newtonien, incompressible et en écoulement laminaire stationnaire. Les propriétés thermophysiques sont supposées constantes sauf pour la masse volumique qui est approchée dans le terme de gravité en considérant l'hypothèse de Boussinesq justifiée par les écarts de températures supposés suffisamment faibles :  $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$ .

La surface libre est supposée plane, et est soumise à un échange convectif avec l'air ambiant caractérisée par un coefficient de transfert thermique  $h$ .

Les grandeurs utilisées pour adimensionner les variables sont la hauteur du canal  $H$ , la vitesse moyenne d'entrée  $U_{moy}$ , l'écart de la température d'entrée d'eau  $T_c - T_0$ , et le temps  $H/U_{moy}$ . Compte tenu des hypothèses simplificatrices décrites ci-dessus, le système résolu numériquement peut être adimensionnalisé sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \vec{k} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

Ainsi les paramètres adimensionnels qui apparaissent dans les équations sont : le nombre de Reynolds  $Re = \frac{U_{moy} H}{\nu}$ , le nombre de Rayleigh  $Ra = \frac{g \beta (T_c - T_0) H^3}{\nu \alpha}$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  et la température réduite  $\theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}$ .

Les conditions aux limites adimensionnées sont :

- En  $z = 0$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$ ; pour  $x \in [-2H, 0]$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$  et pour  $x \in [0, 48H]$ ,  $\theta = 1$ ;
- En  $z = 1$ ,

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4)$$

$$V_z = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -Bi\theta \quad (6)$$

- En  $y = 0$  et  $y = 10H$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ ;
- En  $x = -2H$ ,  $V_x = V_{\frac{1}{2}pois(y,z)}$ ,  $V_y = V_z = 0$  et  $\theta = 0$ ; avec  $V_{\frac{1}{2}pois(y,z)}$  le profil de vitesse demi-Poiseuille[5].

Avec  $Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{H \Delta T}{\mu \alpha}$  le nombre de Marangoni,  $Pe = \frac{U_{moy} H}{\alpha}$  le nombre de Peclet et  $Bi = \frac{hH}{\lambda}$  le nombre de Biot. Pour étudier le transfert thermique, nous définissons le nombre de Nusselt local et moyen respectivement par :

$$Nu_l = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} \quad \text{et} \quad Nu_{moy} = \frac{1}{S} \int_S Nu_l \, dS \quad \text{où } S \text{ la surface chauffée du fond du canal.}$$

### 3 Résolution numérique et validation

La résolution numérique du problème est faite à l'aide du code TAMARIS développé au laboratoire SIAME [6, 7] au sein duquel ont été implémentées les conditions aux limites décrites ci-dessus. La discrétisation numérique utilise la méthode des volumes finis à maillage hybride tridimensionnel (3D). Les valeurs de toutes les variables (vitesses, pression et température) sont prises au centre des cellules. Les schémas de discrétisation spatiale sont du second ordre. Pour les flux diffusifs, un schéma centré est utilisé avec une correction de la non orthogonalité du maillage. Les flux convectifs sont traités par le schéma non linéaire haute résolution CUBISTA [8]. Ce schéma issu d'une approche NVD (Normalised Variable Diagram) qui introduit une quantité minimale de diffusion numérique tout en étant strictement borné. Le couplage vitesse-pression est assuré par l'algorithme SIMPLE [9]. Les systèmes linéaires obtenus sont résolus par l'algorithme GMRES préconditionné par une décomposition ILU.

Plusieurs études de validation du code dans différentes situations ont été précédemment menées [6, 10]. Dans le cas de cette étude, nous avons effectué une validation dans le cas test de l'écoulement Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) stationnaire présenté par Medale et al. [11] avec une paroi supérieure rigide à  $\theta = 0$ . Une concordance quantitative des résultats a été obtenue, avec l'emploi d'un maillage non uniforme de résolution  $n_x = 128$ ,  $n_y = 176$  et  $n_z = 50$ . C'est cette résolution de maillage qui a été choisie pour le reste de l'étude. La figure 2 montre les profils longitudinaux des composantes adimensionnées de la vitesse et de la température réduite, et ce, le long de l'axe pour les coordonnées  $y=5$ ,  $z=0.5$ . La figure 3 représente le champ de température réduite dans le plan vertical d'abscisse  $x=30$ .

## 4 Résultats

Pour étudier l'influence des instabilités thermoconvectives sur le transfert thermique nous examinons plusieurs résultats numériques pour différents paramètres du problème, tels que le nombre de Biot, le nombre de Reynolds, et le nombre de Marangoni. Les résultats numériques sont obtenus pour  $Ra=5000$  et  $Pr=7$ .

### 4.1 Influence du nombre de Biot

Les figures 4 et 5, représentent la variation transversale du nombre de Nusselt local  $Nu_l$  de la paroi du bas respectivement aux abscisses  $x = 25$  et  $x = 40$ , pour différents nombres de Biot qui mesure le rapport de la résistance thermique interne du film liquide à la résistance thermique

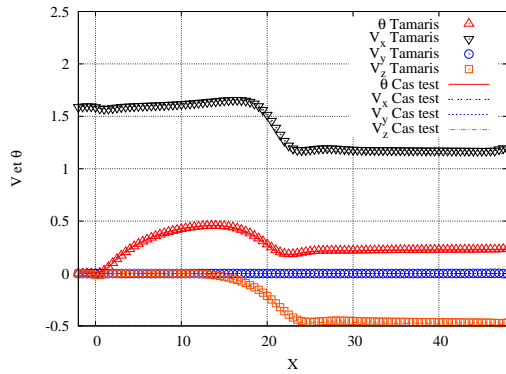


Figure 2 : Profils longitudinaux des grandeurs adimensionnées  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  et  $\theta$  le long de l'axe ( $y=5$ ,  $z=0,5$ ). Comparaison avec le cas test [11].

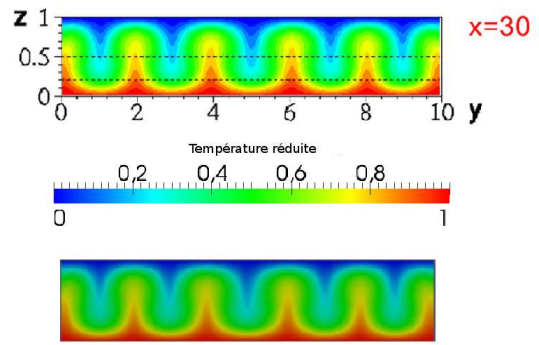


Figure 3 : Champ de température réduite dans le plan vertical d'abscisse  $x=30$ . Cas test [11] (en haut) et code Tamaris (en bas).

entre la surface libre et l'air extérieur. Les autres paramètres de l'écoulement sont fixés à  $Re=15$ ,  $Ra=5000$  et  $Ma=0$ . Le cas du canal fermé (surface supérieure rigide à température imposée  $\theta = 0$ ) est aussi présenté. On observe que  $Nu_l$  présente une forme sinusoïdale pour tous les cas étudiés, et cela peut être expliqué par la forte influence de la flottabilité qui induit des instabilités thermoconvectives sous forme de rouleaux longitudinaux. A  $x = 25$  (Figure 4) le nombre de  $Nu_l$  du canal fermé présente six pics dont les deux pics au centre sont de très faible amplitude, alors que pour le cas de la surface libre, on remarque cinq pics dont l'amplitude est plus intense au centre et croît avec l'augmentation du nombre de  $Bi$ . En effet, les rouleaux longitudinaux sont bien développés pour le cas du canal à surface libre, par contre dans le cas du canal fermé, il y a un décalage vers l'aval du développement des rouleaux au centre du canal. l'amplitude des deux pics de  $Nu_l$  au centre dans le cas du canal fermé continue à croître le long du canal jusqu'à ce que tous les pics aient la même amplitude à  $x = 40$  (Figure 5). Pour le cas du canal à surface libre, l'amplitude des pics au centre diminue jusqu'à ce que tous les pics aient le même amplitude à  $x = 40$  (Figure 5), sauf pour le cas  $Bi=0$  pour lequel les rouleaux longitudinaux proches des parois commencent à disparaître, et cela est dû à l'échauffement général du film liquide.

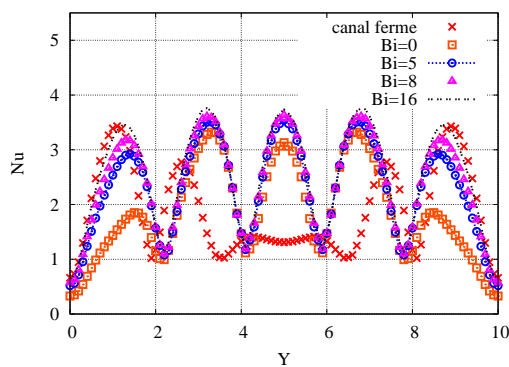


Figure 4 : Variation transversale à  $x = 25$  de  $Nu_l$  pour différents  $Bi$  ( $Ra=5000$ ,  $Re=15$  et  $Ma=0$ ).

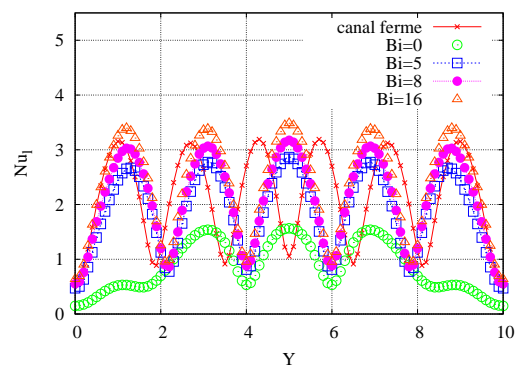


Figure 5 : Variation transversale à  $x = 40$  de  $Nu_l$  pour différents  $Bi$  ( $Ra=5000$ ,  $Re=15$  et  $Ma=0$ ).

## 4.2 Effet du nombre de Reynolds

Afin de mettre en évidence l'effet du nombre de Reynolds sur le développement des rouleaux longitudinaux, nous présentons sur la figure 6 le champ de la température au niveau de la surface libre pour différentes valeur de  $Re$  et pour  $Bi=16$ ,  $Ra=5000$  et  $Ma=0$ . On constate que l'augmentation du  $Re$  engendre un développement des rouleaux longitudinaux plus loin de l'entrée.

Ainsi, les rouleaux apparaissent à une position  $x=7$  pour  $Re=5$  jusqu'à une position  $x=28$  pour  $Re=20$ . Ceci est particulièrement vrai pour les rouleaux centraux, alors que pour les rouleaux proches des parois latérales se forment pratiquement à la même abscisse  $x$ .

Pour étudier l'influence du nombre de Reynolds sur le transfert thermique, nous présentons dans le tableau 1 la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds. On constate que  $Nu$  moyen croît avec l'augmentation de  $Re$ , ceci peut s'expliquer par la transition vers le régime de convection forcée (l'importance relative de la convection naturelle devient négligeable pour  $Ri < 0,1$ ), dans ce cas le transfert thermique est assuré principalement par les flux convectifs.

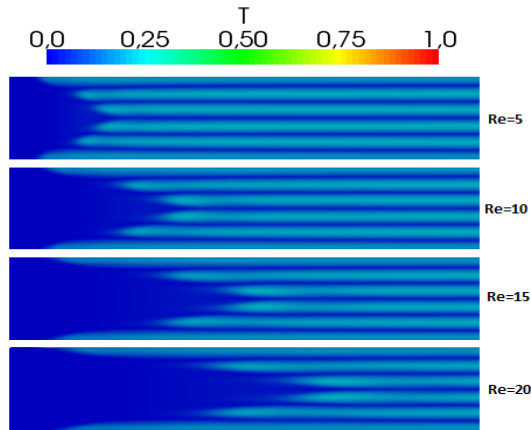


Figure 6 : Influence de  $Re$  sur l'apparition des rouleaux longitudinaux ( $Bi=16$ ,  $Ra=5000$  et  $Ma=0$ ).

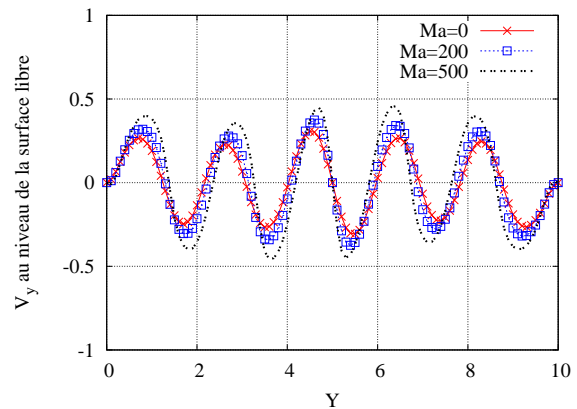


Figure 7 : Variations transversales à  $x = 25$  et  $z = 1$  de la vitesse  $V_y$  pour différents  $Ma$  ( $Re=15$ ,  $Ra=5000$  et  $Bi=16$ ).

### 4.3 Effet du nombre de Marangoni

Les variations de la tension superficielle avec la température ou effet Marangoni ou encore effet thermocapillaire, génèrent des écoulements au niveau de la surface libre des zones chaudes vers les zones froides. La figure 7 illustre les variations transversales à  $x = 25$  de la vitesse  $V_y$  pour différentes valeurs de  $Ma$  et pour  $Re=16$ ,  $Ra=5000$  et  $Bi=16$ . On constate que  $V_y$  croît avec l'augmentation de  $Ma$ , ce qui montre bien que c'est l'effet Marangoni qui induit un écoulement superficiel superposé à l'écoulement de base. Les figures 8 et 9 représentent les variations axiales de la vitesse  $V_x$  respectivement à  $y = 5$  et  $y = 6$  pour différents  $Ma$ . On constate dans le cas de  $y = 5$  que l'effet Marangoni tend, à partir de  $x = 20$  et  $Ma=300$ , à affaiblir l'écoulement superficiel de base, alors que pour une position adjacente  $y=6$ , l'effet Marangoni tend à accélérer l'écoulement superficiel de base. Le tableau 2 présente la variation de  $Nu$  moyen en fonction de  $Ma$ . On constate que  $Nu$  moyen croît sensiblement avec l'augmentation de  $Ma$ , ainsi on peut dire que l'effet Marangoni favorise le transfert convectif de la chaleur.

Re	5	10	15	20
Ri	28.57	7.14	3.17	1.78
$Nu_m$	2.31	2.35	2.39	2.42

Tableau 1 : Evolution du nombre de Nusselt moyen pour différents  $Re$ .

Ma	0	100	200	300	500
$Nu_m$	2.39	2.42	2.44	2.46	2.49

Tableau 2 : Evolution du nombre de Nusselt moyen pour différents  $Ma$ .

## 5 Conclusion

Dans le présent travail, nous avons étudié numériquement la convection mixte d'un écoulement d'eau laminaire dans un canal horizontal à surface libre. Les résultats ont montré que le

transfert thermique est significativement affecté par les instabilités thermoconvectives ainsi que par l'échange convectif avec l'air ambiant. L'étude montre par ailleurs l'influence du nombre de Reynolds sur le développement spatial des instabilités thermoconvectives. Les résultats ont précisé également l'effet Marangoni sur les profils des vitesses transversale et axiale à la surface libre et sur le transfert thermique. Ce travail est en cours d'extension pour tenir compte de l'évaporation et d'autres paramètres du problème tel que l'épaisseur du film liquide.

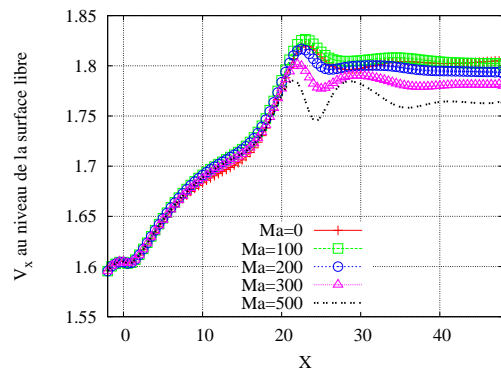


Figure 8 : Variations axiales à  $y=5$  et  $z=1$  de la vitesse  $V_x$  pour différents  $Ma$ .

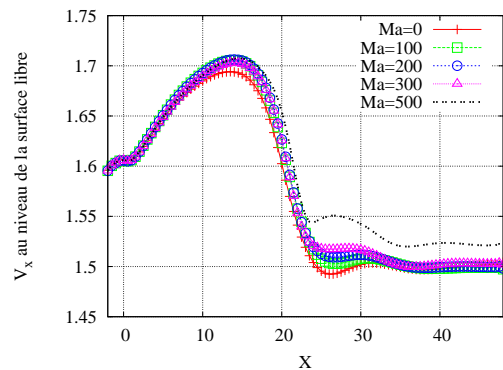


Figure 9 : Variations axiales à  $y=6$  et  $z=1$  de la vitesse  $V_x$  pour différents  $Ma$ .

## Remerciements

Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme de bourse de recherche CNRST-Maroc et du programme Volubilis de coopération Maroc-France (Action Intégrée n° MA/09/214 -Maroc, MA/09/213-France)

## Références

- [1] G.WANG, F.INCROPERA et R. VISKANTA : Mixed convection heat transfer in a horizontal open-channel flow with uniform bottom heat flux. *Journal of Heat Transfer*, 105:817, 1983.
- [2] I. SADIQ et R. USHA : Linear instability in a thin viscoelastic liquid film on an inclined, non-uniformly heated wall. *International Journal of Engineering Science*, 43(19-20):1435–1449, 2005.
- [3] U. THIELE et E. KNOBLOCH : Thin liquid films on a slightly inclined heated plate. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 190(3-4):213–248, 2004.
- [4] X. NICOLAS : Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(10):961–1016, 2002.
- [5] X. NICOLAS, J.M. LUIJKX et J.K. PLATTEN : Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(4):589–610, 2000.
- [6] K. EL OMARI et Y. LE GUER : Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3):123–134, 2010.
- [7] K. EL OMARI et Y. LE GUER : A numerical study of thermal chaotic mixing in a two rod rotating mixer. *Computational Thermal Science*, 1:55–73, 2009.
- [8] M.A. ALVES, P.J. OLIVEIRA et F.T. PINHO : A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:47–75, 2003.
- [9] S.V. PATANKAR : *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 1980.
- [10] K. EL OMARI et Y. LE GUER : Thermal chaotic mixing of power-law fluids in a mixer with alternately rotating walls. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(11-12):641–651, 2010.
- [11] M. MEDALE, X. NICOLAS, S.GLOCKNER et S.GOUNAND : Vers une solution numérique de référence pour un écoulement 3d de convection mixte : démarche et résultats. *Actes du congrès SFT Le Touquet*, pages 209–214, 2010.