

# Etude analytique des transferts thermiques en écoulement oscillant laminaire : nouvelles solutions.

Pascale BOUVIER<sup>1\*</sup>, Pascal STOUFFS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département EEA, HEI, 13 rue de Toul-59046 Lille

<sup>2</sup>Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés

Rue Jules Ferry, BP 7511 – 64075 Pau Cedex

\* (auteur correspondant : pascal.bouvier@hei.fr)

**Résumé** - Dans cette communication, nous proposons des solutions analytiques originales des équations de conservation en écoulement oscillant laminaire incompressible développé dans une conduite cylindrique. Au niveau de la paroi extérieure, un profil polynomial de température longitudinal et un flux de chaleur sont imposés. L'étude de l'évolution de la densité de flux adimensionnelle complexe permet de mettre en évidence l'extrême sensibilité des transferts de chaleur à de faibles variations des conditions aux frontières.

## Nomenclature

$A_i$	constantes définies dans éq. (15), (17)	<i>Symboles grecs</i>	
$C_{ki\epsilon}$	constantes d'intégration	$\alpha$	fréquence adimensionnelle ( $=R_t(\omega/\nu)^{1/2}$ )
$D_{kf}$	fonctions définies par éq. (16), (18)	$\beta$	$=i^{0.5}\alpha$
$e_p$	épaisseur de la paroi, $m$	$\Delta$	$=e_p/R_t$ ( $e_p=3,2mm$ , $R_t=20,95mm$ )
$f$	fonction dans éq. (6)	$\delta$	$=\beta Pr^{0.5}$
$I_j, J_j$	fct de Bessel de 1 <sup>ère</sup> espèce, d'ordre $j$	$\epsilon$	f ou s
$i$	imaginaire pur	$\kappa$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$k$	indice ou conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda_i$	coefficients intervenant dans $X_{k\epsilon}(x^*)$
$K_j, Y_j$	fct de Bessel de 2 <sup>ème</sup> espèce, d'ordre $j$	$\mu$	rapport des conductivités $k_f/k_s$
$L_t$	longueur de la conduite, $m$	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$Pr$	nombre de Prandtl	$\rho_{k\epsilon}$	fonction définie par éq. (8)
$p$	pression, $Pa$	$\sigma$	rapport des diffusivités $\kappa_f/\kappa_s$
$Re_{max}$	nombre de Reynolds ( $=u_{m,max}2 R_t/\nu$ )	$\varphi$	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$
$R_t$	rayon de la conduite, $m$	$\omega$	pulsation, $rad. s^{-1}$
$r$	coordonnée radiale, $m$	<i>Indices et exposants</i>	
$T$	température, $K$	$f$	fluide
$t$	temps, $s$	$s$	solide
$u$	vitesse du fluide, $m.s^{-1}$	*	grandeur adimensionnelle
$u_{m,max}$	amplitude de la vitesse débitante, $m. s^{-1}$	$\sim$	grandeur complexe
$X_{k\epsilon}$	fonction définie par éq. (8)	0	grandeur de référence
$x$	coordonnée axiale, $m$		

## 1. Introduction

Afin de mieux comprendre et modéliser les transferts de masse et de chaleur dans des systèmes liés aux domaines relatifs aux moteurs Stirling [1], aux systèmes thermoacoustiques, aux échangeurs innovants [2,3] ou encore à la physiologie pulmonaire [4], il est nécessaire d'approfondir les connaissances des écoulements oscillants même si les premières études approfondies dans ce domaine datent des années 1950-1960 [5-7]. Différents travaux récents abordent donc certains aspects de ces mécanismes complexes, tant du point de vue théorique, numérique, qu'expérimental [8-10]. En ce qui concerne les études théoriques, la plupart

s'intéressent au transfert de chaleur entre un réservoir chaud et un réservoir froid reliés l'un à l'autre par une conduite dont les parois sont adiabatiques [7,11,12]. Dans une précédente communication, nous avons présenté des solutions correspondant à une température ou un flux périodique imposé à la paroi extérieure de la conduite [13]. Dans cette étude, nous développons de nouvelles solutions qui permettent d'imposer un profil polynomial de température et un flux de chaleur à la paroi. Les caractéristiques principales d'un écoulement oscillant sont précisées dans les références [13,14].

## 2. Description et équations du problème

### 2.1. Hypothèses, équations de conservation et profils de vitesse

L'écoulement, supposé axisymétrique et complètement développé, est oscillant laminaire incompressible. La conduite est de section circulaire uniforme. Le fluide est newtonien et ses propriétés physiques sont constantes. Le gradient de pression est sinusoïdal :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -A \cos(\omega t) \quad (1)$$

Les forces volumiques, la dissipation visqueuse et la conduction axiale sont négligées ( $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ ). Le régime thermique est périodique établi. Ainsi, en introduisant les variables adimensionnelles suivantes

$$T^* = \frac{T}{T_0}; r^* = \frac{r}{R_i}; x^* = \frac{x}{R_i}; t^* = \omega t; u^* = \frac{u}{R_i \omega} \quad (2)$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u^*(r^*, t^*)}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\partial^2 u^*(r^*, t^*)}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} \right) \text{ avec } u^*(r^*, t^*) = 0 \quad (3)$$

Dans le fluide, pour  $0 \leq r^* < 1$ , l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T_f^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial t^*} + u^*(r^*, t^*) \frac{\partial T_f^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial x^*} = \frac{1}{\alpha^2 P_r} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T_f^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T_f^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} \right) \quad (4)$$

Dans la paroi, pour  $1 \leq r^* < 1 + \Delta$ , l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T_s^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial t^*} = \frac{1}{\alpha^2 P_r \sigma} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T_s^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T_s^*(r^*, x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} \right) \quad (5)$$

En considérant un profil de vitesse de la forme suivante :

$$u^*(r^*, t^*) = \text{Re}(\tilde{f}(r^*) e^{it^*}) \quad (6)$$

La résolution de l'équation (3) conduit à la solution suivante [7] :

$$u^*(r^*, t^*) = i \tilde{A}^* \left( \frac{I_0(\beta r^*)}{I_0(\beta)} - 1 \right) e^{it^*} \text{ avec } i \tilde{A}^* = \frac{\text{Re}_{\max}}{2\alpha^2} \left[ \frac{1}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right] \quad (7)$$

## 2.2. Le profil des températures en écoulement laminaire

Dans ce qui suit, on suppose que les températures  $T_f^*$  et  $T_s^*$  peuvent s'écrire sous la forme

$$T_\varepsilon^* = \text{Re} \left[ \sum_{k=-1}^n X_{k\varepsilon}(x^*) \rho_{k\varepsilon}(r^*) e^{ikx^*} \right] \quad (8)$$

où  $\varepsilon = f$  dans le cas du fluide et  $\varepsilon = s$  dans le cas du solide. Dans ce travail, nous imposons

des fonctions  $X_{k\varepsilon}(x^*)$  telles que  $X_{0\varepsilon}(x^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{*2i}$  et  $X_{k\varepsilon}(x^*) = \frac{dX_{k-1\varepsilon}}{dx^*}$ . La prise en compte

d'une valeur négative pour  $k$  permet l'obtention de solutions caractérisées par un flux moyenné sur un cycle non nul. Ce formalisme permet d'imposer un profil longitudinal de température polynomial, constant ou encore une somme de fonctions exponentielles [14]. L'objectif est de déterminer les fonctions  $\rho_{k\varepsilon}(r^*)$  dans ces conditions.

### 2.2.1. Résolution de l'équation de l'énergie dans la paroi

A partir de l'équation (5), prenant  $\xi = (i\sigma P_r)^{\frac{1}{2}} \alpha$ , on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial \rho_{ks}(r^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \rho_{ks}(r^*)}{\partial r^*} - k \xi^2 \rho_{ks}(r^*) = 0 \quad (9)$$

qui a pour solutions ( $C_{-11s}, C_{-12s}, C_{01s}, C_{02s}, C_{k1s}, C_{k2s}$  étant des constantes à déterminer)

$$\rho_{-1s} = C_{-11s} Y_0(-\xi r^*) + C_{-12s} J_0(-\xi r^*) \quad \text{pour } k=-1 \quad (10)$$

$$\rho_{0s} = C_{01s} + C_{02s} \ln(r^*) \quad \text{pour } k=0 \quad (11)$$

$$\rho_{ks} = C_{k1s} Y_0(i\xi \sqrt{k} r^*) + C_{k2s} J_0(i\xi \sqrt{k} r^*) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad (12)$$

### 2.2.2. Résolution de l'équation de l'énergie dans le fluide

A partir de l'équation (4), prenant  $\delta = (i\alpha^2 P_r)^{\frac{1}{2}}$ , on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial \rho_{kf}(r^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \rho_{kf}(r^*)}{\partial r^*} + ik\delta^2 F(r^*) = 0 \quad \text{avec } F(r^*) = \frac{f(r^*) \rho_{k-1f}}{k} \quad (13)$$

qui a pour solutions ( $C_{-11f}, C_{-12f}, C_{0f}, C_{kf}$  étant des constantes à déterminer)

$$\rho_{-1f} = C_{-11f} J_0(-\delta r^*) + C_{-12f} Y_0(-\delta r^*) \quad \text{pour } k=-1 \quad (14)$$

$$\rho_{0f} = i\tilde{A}_1^* C_{-11f} D_{0f}(r^*) + C_{0f} \quad \text{pour } k=0, A_1^* = i\tilde{A}_1^* \quad \text{et} \quad (15)$$

$$D_{0f}(r^*) = \int r^* \ln(r^*) J_0(\delta r^*) \left[ \frac{I_0(\beta r^*)}{I_0(\beta)} - 1 \right] dr^* \quad (16)$$

$$- \frac{1}{\beta^2 + \delta^2} \frac{r^* \ln(r^*)}{I_0(\beta)} (\delta I_0(\beta r^*) J_1(\delta r^*) + \beta I_1(\beta r^*) J_0(\delta r^*)) + \frac{1}{\delta} r^* \ln(r^*) J_1(\delta r^*) + C_{0f}$$

$$\rho_{kf} = \frac{i\delta^2 k\pi}{2} D_{kf}(r^*) + C_{kf} J_0(i\delta \sqrt{k} r^*) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad (17)$$

$$D_{kf}(r^*) = J_0(i\delta \sqrt{k} r^*) \int Y_0(i\delta \sqrt{k} r^*) r^* F(r^*) dr^* - Y_0(i\delta \sqrt{k} r^*) \int J_0(i\delta \sqrt{k} r^*) r^* F(r^*) dr^* \quad (18)$$

### 2.2.3. Continuité des températures à l'interface fluide-paroi ( $T_f^*(1, x^*, t^*) = T_s^*(1, x^*, t^*)$ )

$$C_{-11s}Y_0(-\xi) + C_{-12s}J_0(-\xi) = C_{-11f}J_0(-\delta)$$

$$C_{01s} = i\tilde{A}_1^* C_{-11f} \delta^2 D_{0f}(1) + C_{0f} \quad (19)$$

$$C_{k1s}Y_0(i\xi\sqrt{k}) + C_{k2s}J_0(i\xi\sqrt{k}) = \frac{i\delta^2 k\pi}{2} D_{kf}(1) + C_{kf} J_0(i\delta\sqrt{k})$$

### 2.2.4. Conservation du flux de chaleur à l'interface fluide-paroi ( $\mu \frac{\partial T_f^*(1, x^*, t^*)}{\partial r^*} = \frac{\partial T_s^*(1, x^*, t^*)}{\partial r^*}$ )

$$\xi C_{-11s}Y_1(-\xi) + C_{-12s}\xi J_1(-\xi) = \mu C_{-11f}\delta J_1(-\delta)$$

$$C_{02s} = \mu(i\tilde{A}_1^* C_{-11f} \delta^2 (\frac{1}{\beta^2 + \delta^2} \frac{1}{I_0(\beta)} (\delta I_0(\beta) J_1(\delta) + \beta I_1(\beta) J_0(\delta)) + \frac{1}{\delta} I_1(\delta))) \quad (20)$$

$$-C_{k1s}i\xi\sqrt{k}Y_1(i\xi\sqrt{k}) - C_{k2s}i\xi\sqrt{k}J_1(i\xi\sqrt{k}) = \mu \frac{dD_{kf}}{dr^*}(1) \frac{i\delta^2 k\pi}{2} - C_{kf} i\delta\sqrt{k} J_1(i\delta\sqrt{k})$$

### 2.2.5. Condition thermique imposée au niveau de la paroi extérieure

Le formalisme des équations considérées ne permet pas d'imposer une température constante ou un flux constant au niveau de la paroi extérieure [14], mais une condition mixte exprimée par les trois équations suivantes :

$$C_{01s} + C_{02s} \ln(1 + \Delta) = 1; C_{k1s}Y_0(i\eta) + C_{k2s}J_0(i\eta\sqrt{k}) = 0; \frac{C_{02s}}{1 + \Delta} = \frac{\mu\varphi^*}{X_{0s}(x^*)} \quad (21)$$

## 2.3. Densité de flux adimensionnelle

Dans le cas d'un écoulement oscillant, la définition habituelle de la température de mélange conduit à des singularités deux fois par cycle [13, 14]. Nous utilisons donc la température moyennée sur la section droite de la conduite :

$$T_m^* = 2 \int_0^1 \text{Re}(T_f^*(r^*, x^*, t^*)) r^* dr^* \quad (22)$$

Pour caractériser les échanges de chaleur à mi-longueur de la conduite, on utilise la densité de flux adimensionnelle suivante (eq.23) qui correspond au nombre de Nusselt utilisé en écoulement permanent.

$$\varphi_{glo} = \frac{2\varphi^*}{T_s^*(1 + \Delta) - T_m^*} \quad (23)$$

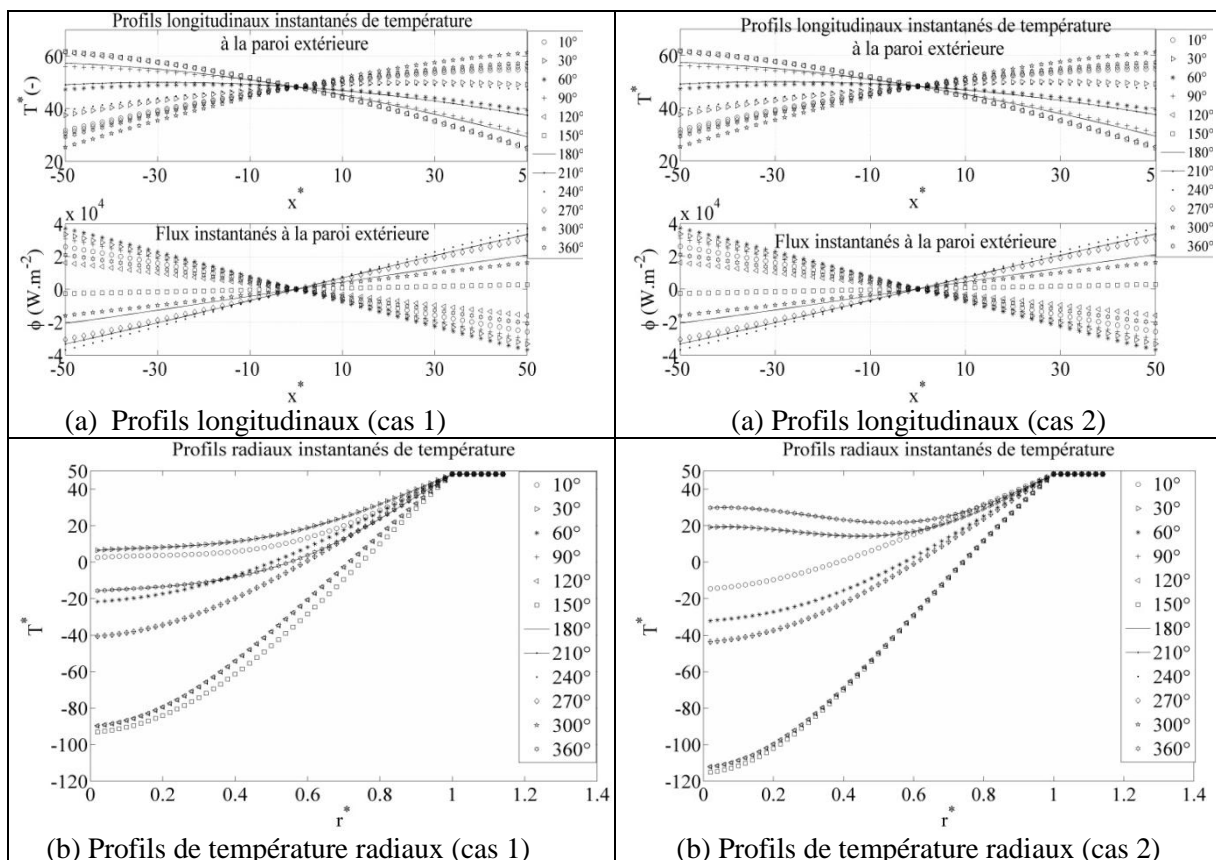
## 3. Résultats et discussion

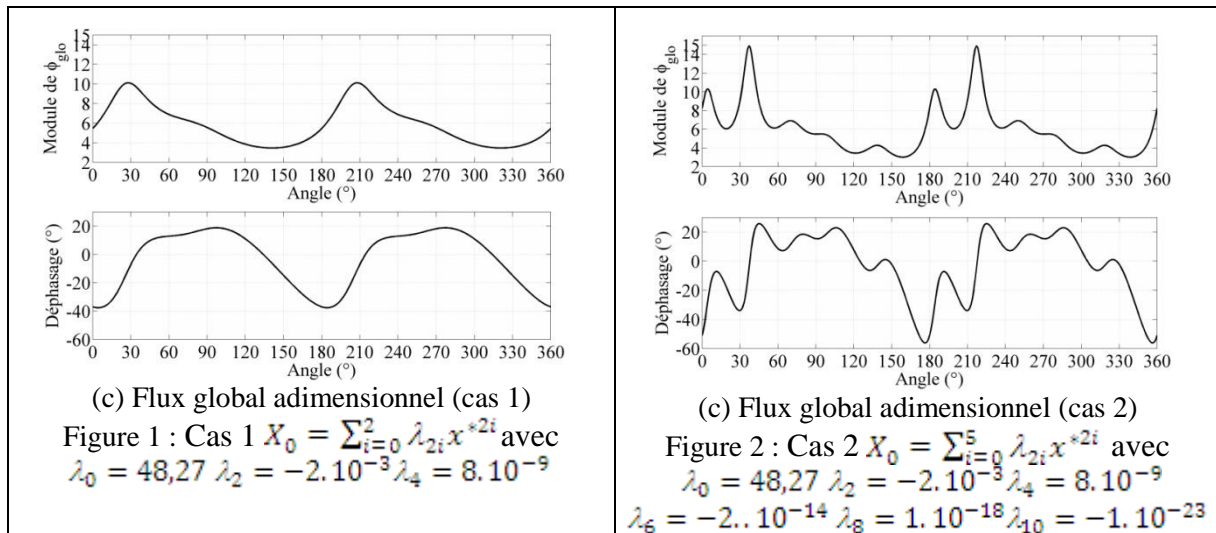
Sur les figures 1a et 2a, nous avons représenté les évolutions des conditions limites (température et flux) imposées au niveau de la paroi extérieure de la conduite. Ces quantités varient le long de l'axe de la conduite hormis en  $x^* = 0$ , à mi-longueur de la conduite. Sur la figure 1a, la fonction  $X_0(x^*)$  imposée est un polynôme d'ordre 4 (cas 1) alors que sur la figure 2a, il s'agit d'un polynôme d'ordre 10 (cas 2). Lorsqu'on compare les profils longitudinaux (température et flux) de ces deux cas, obtenus en  $r^* = 1 + \Delta$ , on ne distingue pas de différences significatives. Les variations engendrées sont infinitésimales. Les profils radiaux instantanés de la température en  $x^* = 0$  sont représentés sur les figures 1b (cas 1) et 2b (cas 2). Ils correspondent à un écoulement oscillant laminaire caractérisé par:  $Re_{max} = 2175$ ,  $\alpha=2,32$ ,  $Lt/2Rt=50$ ,  $\sigma=5,625$ ,  $\mu=0,0016$ ,  $\Delta=0,1527$  et  $2R_t=41,9$  mm. En comparant les cas 1 et 2, on observe des différences notables au niveau de l'amplitude des profils

correspondant à certains angles. Pour le couple d'angles ( $120^\circ, 300^\circ$ ) par exemple, l'écart de température entre la paroi et le centre du tube vaut  $138^\circ\text{C}$  dans le cas 1 et  $168^\circ\text{C}$  dans le cas 2. Pour étudier l'influence des variations des conditions limites imposées sur les transferts de chaleur entre la paroi et le fluide, nous avons déterminé la densité de flux adimensionnel complexe ( $\tilde{\varphi}_{glo}$ ) (eq. 23) dans les deux cas. L'intérêt de la formulation complexe est de mettre en évidence le déphasage entre le flux de chaleur et la différence de température ( $T_s^* - T_m^*$ ), caractéristique de l'aspect non quasi-stationnaire de l'écoulement oscillant. Les résultats sont représentés sur les figures 1c et 2c. Les profils obtenus sont très différents. Les termes d'ordre supérieur à 4 de la fonction  $X_0(x^*)$ , correspondant au cas 2, induisent des transferts de chaleur accrus localement, au niveau des angles  $30^\circ$  et  $210^\circ$  notamment, par rapport au cas 1. Les maxima observés sont une fois et demie plus importants. Des tests effectués avec d'autres fonctions  $X_0(x^*)$  ont montré que dans tous les cas, les transferts de chaleur étaient maximaux aux angles proches de  $30^\circ$ - $60^\circ$  et  $210^\circ$ - $240^\circ$  correspondant aux phases d'accélération du fluide et minimaux aux angles proches de  $120^\circ$ - $150^\circ$  et  $300^\circ$ - $330^\circ$  correspondant aux phases de décélération du fluide. En ce qui concerne leur évolution et amplitude, elles sont très fortement influencées par des variations infinitésimales des conditions aux limites.

#### 4. Conclusion

Les solutions des équations de conservation développées dans cette étude permettent d'imposer, à la paroi extérieure, un profil de température longitudinal variant axialement couplé à un flux de chaleur, constant à mi-longueur de la conduite. L'objectif étant d'observer l'influence des variations infinitésimales du profil de température imposé sur les transferts de chaleur. Les résultats obtenus montrent que ces derniers sont extrêmement sensibles aux conditions aux frontières. Ainsi, s'il semble réaliste de corrélérer une densité de flux moyenne sur un cycle (équivalente à un nombre de Nusselt moyen), il paraît au contraire illusoire de caractériser les transferts thermiques instantanés par une seule corrélation.





## Références

- [1] A. J. Organ, *Thermodynamics and gas dynamics of the Stirling machines*, Cambridge University Press, (1992).
- [2] L.A. O. Rocha, A. Bejan, Geometric Optimization of Periodic Flow and Heat Transfer in a Volume Cooled by Parallel Tubes, *Journal of heat transfer*, 123 (april 2001), 233-239.
- [3] K.C. Leong, L.W. Jin, An experimental study of heat transfer in oscillating flow through a channel filled with an aluminum foam, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48 (2005), 243-253.
- [4] D.M. Eckmann, J. B. Grothberg, Experiments on transition to turbulence in oscillatory pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 222 (1991), 329-350.
- [5] H. B. Atabek, C. C. Ghang, Oscillatory Flow near the Entry of Circular Tube, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 12 (1961), 403-422.
- [6] S. Uchida, The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 7 (1956), 403-422.
- [7] E.J. Watson, Diffusion in oscillatory pipe flow, *Journal of fluid mechanics*, 133 (1983), 233-244.
- [8] Ph. Nika, Y. Bailly, F. Lanzetta, Transferts thermiques en écoulements oscillants laminaires incompressibles, *Int. J. Refrigeration*, 28 (2005), 353-367.
- [9] H. Iwai, T. Mambo, N. Yamamoto, K. Suzuki, Laminar convective heat transfer from a circular cylinder exposed to a low frequency zero-mean velocity oscillating flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47 (2004), 4659-4672.
- [10] P. Bouvier, P. Stouffs, J.-P. Bardon, Experimental study of heat transfer in oscillating flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48 (2005), 2473-2482.
- [11] U.H. Kurzweg, L.D. Zhao, Heat transfer by high-frequency oscillations: a new hydrodynamic technique for achieving large effective thermal conductivities, *Phys. Fluids*, 27 (1984), 2624-2627.
- [12] M. Kaviani, M. Reckker, Performance of a heat exchanger based on enhanced heat diffusion in fluids by oscillation : Analysis, *J. Heat Transfer*, 112 (1990), 49-55.
- [13] P. Bouvier, P. Stouffs, Etude analytique des transferts thermiques en écoulement oscillant laminaire. Actes du Congrès SFT 2006, 331-336, Elsevier, Paris, 2006.
- [14] P. Bouvier, *Transferts thermiques en écoulement oscillant dans une conduite cylindrique : application aux moteurs Stirling*, Thèse de doctorat de l'Université de Nantes (2000).