

# Comment représenter globalement les transferts thermiques entre un fluide et un mur dans le cas non-isotherme ou/et en régime transitoire.

Alain DEGIOVANNI\*, Benjamin REMY

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée  
ENSEM – 2 Avenue de la Forêt de Haye – 54504 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex

\*(auteur correspondant : Alain [Degiovanni@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:Degiovanni@ensem.inpl-nancy.fr))

**Résumé** - Ce papier propose un modèle alternatif au coefficient d'échange pour représenter les transferts entre un fluide et un mur présentant des conditions thermiques variables en espace et/ou en temps. Nous montrons dans le cas d'un transfert entre un fluide en écoulement établi et un mur soumis à des sollicitations thermiques non uniformes instationnaires que la bonne représentation est une impédance généralisée, ce qui revient dans l'espace non transformé à remplacer le produit simple par un produit de convolution. Une application (écoulement piston sur une plaque plane d'épaisseur non nulle soumis à un créneau spatial de flux) permet de montrer la pertinence de l'approche « produit de convolution » par rapport aux approches classiques  $h(x)$  en comparant les champs de température en paroi à un calcul numérique par éléments finis.

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique $m^2 s^{-1}$	$\varphi$	densité de flux $Wm^{-2}$
$e$	épaisseur $m$	$\phi$	transformé de $\varphi$
$h$	coefficient d'échange $Wm^{-2}K^{-1}$	$\lambda$	conductivité thermique $Wm^{-1}K^{-1}$
$H$	admittance $H$	$\theta$	transformée de $T$
$\hat{h}$	transformée inverse de $H$		
$p, \omega$	variable de Laplace, de Fourier		<i>indices</i>
$\hat{r}$	transformée inverse de $Z$	$P$	parois
$T$	température	<i>réf</i>	référence
$u$	vitesse de l'écoulement $ms^{-1}$	$s$	surface
$x, y, t$	variable spatiale et temporelle	$T$	température
$Z$	impédance	$\phi$	flux

## 1. Introduction

Ce papier tente d'apporter une réponse à la question de savoir comment représenter globalement les transferts thermiques entre un fluide en écoulement établi et une paroi non-isotherme et/ou en régime transitoire. Classiquement, pour un transfert uniforme et constant (unidirectionnel en régime permanent), on introduit un coefficient d'échange :

$$\varphi_s = h(T_s - T_{ref}) \quad (1)$$

$\varphi_s$  est la densité de flux transférée entre le fluide et la paroi,  $T_s$  la température de paroi,  $h$  le coefficient d'échange (constant),  $T_{ref}$  une température représentative du fluide ;  $h$  et  $T_{ref}$  dépendent de la géométrie du système.

Le problème est donc de savoir comment généraliser la notion de coefficient d'échange (en fait une résistance thermique) dans le cas où l'écoulement est établi mais où la paroi est

soumise à une sollicitation thermique variable en espace et en temps ; par exemple un écoulement établi sur une plaque plane soumise localement à un flux, un écoulement établi dans une canalisation soumise à un flux périodique, etc. De nombreux auteurs utilisent pour résoudre ce problème un coefficient d'échange variable en espace et en temps.

$$\varphi_s(x, t) = h(x, t)(T_s(x, t) - T_{ref}) \quad (2)$$

Cette représentation n'est pas réellement intéressante car elle dépend, non seulement de la géométrie du système et des propriétés de l'écoulement mais aussi des conditions aux limites (voir par exemple [1,2]. Ce problème a été largement discuté par différents auteurs [3,4] mais sans donner de solutions satisfaisantes ; on trouve de nombreuses références dans [5].

Nous montrons que la bonne représentation est une impédance généralisée ( $Z(\omega, p)$ ), ce qui revient dans l'espace réel à remplacer le produit simple (relation 2) par un produit de convolution.

## 2. Le problème générique

### 2.1. Le problème

Considérons le problème générique suivant : un écoulement établi à vitesse  $u(y)$  entre deux plans ( $y = 0$  et  $y = e$ ) (voir figure 1) soumis à une densité de flux variable en espace ( $x$ ) et en temps ( $t$ ) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{u(y)}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{en } x = \pm\infty \quad T = T_e \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

en  $y = e$  n'importe quelle condition aux limites

$$\text{en } y = 0 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x, t) \text{ ou } T = T_0(x, t) \quad (5)$$

$$\text{à } t = 0 \quad T = T_e \quad (6)$$

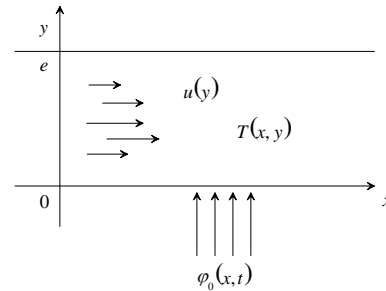


figure 1 : Schéma de principe

En dehors de la géométrie, le système est défini par les grandeurs  $\lambda, a, u(y)$ , qui apparaissent dans les parties homogènes des relations (3) et (5) et qui sont indépendantes de  $x$  et de  $t$  ; la perturbation est définie par  $\varphi_0$  ou  $T_0$  qui sont des fonctions de  $x$  et de  $t$ .

### 2.2. La solution

La solution est obtenue facilement en utilisant deux transformées intégrales : une de Laplace sur  $t$  et une de Fourier sur  $x$  (pour d'autres géométries et d'autres conditions aux limites en  $x$ , il faudra utiliser d'autres transformées spatiales), soit :

$$\theta(\omega, y, p) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (T(x, y, t) - T_e) \exp(-i\omega x) \exp(-pt) dx dt \quad (7)$$

L'équation (3) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \left( \frac{u(y)}{a} i\omega + \omega^2 + \frac{P}{a} \right) \theta \quad (8)$$

En utilisant la transformée de la densité de flux :

$$\phi = LF[\varphi] \quad \text{avec} \quad \varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9)$$

La solution générale de l'équation 8 peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta(\omega, 0, p) \\ \phi(\omega, 0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega, p) & B(\omega, p) \\ C(\omega, p) & D(\omega, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\omega, e, p) \\ \phi(\omega, e, p) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Par exemple, si  $T = T_e$  en  $y = e$  :  $\theta(\omega, 0, p) = \frac{B(\omega, p)}{D(\omega, p)} \phi(\omega, 0, p)$

$$\text{Soit} \quad \theta(\omega, 0, p) = Z_T(\omega, p) \phi(\omega, 0, p) \quad (11)$$

La relation (11) montre que la bonne représentation globale du système est une impédance généralisée  $Z(\omega, p)$ . Cette impédance caractérise le système indépendamment de la perturbation thermique.

Par exemple dans le cas  $u(y) = U_0$  et  $e \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$Z_\infty = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{U_0}{a} i \omega + \omega^2 + \frac{p}{a}}} \quad (12)$$

Il est possible de définir par extension de l'approche classique, un « coefficient d'échange »  $\hat{h}(x, t)$  :

$$\hat{h}(x, t) = L^{-1} F^{-1} [1/Z(\omega, p)] \quad (13)$$

Mais dans ce cas la relation :

$$\varphi(x, 0, t) = h(x, t) (T(x, 0, t) - T_e) \quad (14)$$

doit être remplacée par une double convolution :

$$\varphi(x, 0, t) = \hat{h}(x, t) \otimes (T(x, 0, t) - T_e) \quad (15)$$

D'autre part, pour des raisons de causalité  $\hat{h}$  est une distribution et ne peut donc pas être obtenue simplement. En pratique, il est nécessaire de réécrire la relation 15 en utilisant l'original de l'impédance soit  $\hat{r}(x, t) = L^{-1} F^{-1} [Z(\omega, p)]$  et par suite :

$$T(x, 0, t) - T_e = \hat{r}(x, t) \otimes \varphi(x, 0, t) \quad (16)$$

### 2.3. Exemple

Pour illustrer la démarche précédente, prenons le cas simple d'un écoulement à vitesse uniforme sur une plaque plane en régime permanent (on néglige la conduction suivant x) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{U_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (17)$$

$$\text{en } x = 0 \quad T = 0 \quad (18)$$

$$\text{en } y \rightarrow \infty \quad T = 0 \quad (19)$$

en  $y = 0$  une condition aux limites

Après transformée de Laplace, la solution est :

$$\theta(y, p) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{U_0 p}{a}} y\right) \quad (20)$$

On en déduit la densité de flux :

$$\phi(y, p) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \lambda \sqrt{\frac{U_0 p}{a}} A \exp\left(-\sqrt{\frac{U_0 p}{a}} y\right) \quad (21)$$

Et par conséquent :

$$Z(p) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{U_0}} \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (22)$$

Avec

$$\theta(p, y = 0) = Z(p) \phi(p, y = 0) \quad (23)$$

### 3. Application

Considérons une plaque plane en régime permanent soumise à une densité de flux localisée sur sa face inférieure et en contact sur sa face supérieure, avec un écoulement d'air établi à vitesse uniforme  $U_0$  (voir figure 2). Le problème est résolu de 4 façons différentes :

- le calcul numérique complet du système écoulement + plaque par éléments finis,
- le calcul analytique en utilisant l'admittance  $H(p) = 1/Z(p)$  donnée par la relation 22,
- les calculs numériques utilisant les coefficients d'échange  $h(x)$  donné classiquement pour une paroi soumise à une densité de flux uniforme ou à un créneau de flux (voir [6]).

#### 3.1. Calcul par l'admittance

Le système qui décrit le champ de température dans la plaque s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (24)$$

$$\text{en } y = -e \quad -\lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} = \varphi_0(x) \quad (25)$$

$$\text{en } y = 0 \quad -\lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} = \hat{h}(x) \otimes T(x, 0) \quad (26)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \quad (27)$$

Avec

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(\gamma(x-a) - \gamma(x-b)) \quad (\text{avec } \gamma \text{ la fonction ?})$$

Après transformée de Laplace sur  $x$  ; la solution est de la forme :

$$\theta(p, y) = A \cos(py) + B \sin(py) \quad (28)$$

En particulier, en  $y = 0$

$$\theta(p, 0) = \frac{\phi_0(p)}{H(p) \cos(pe) - \lambda_p p \sin(pe)} \quad (29)$$

Avec 
$$\phi_0(p) = \frac{1}{p} [\exp(-ap) - \exp(-bp)] \quad (30)$$

Enfin 
$$T(x) = L^{-1}[\theta(p)] \quad (31)$$

La transformée inverse est obtenue numériquement par l'algorithme de De Hoog.

### 3.2. Approche classique

La condition 26 est remplacée par :

$$\text{en } y = 0 \quad -\lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} = h(x) T(x,0) \quad (32)$$

Avec (calculé à partir de (22)) 
$$h(x) = \lambda_f \sqrt{\frac{U_0}{a_f}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{densité de flux uniforme}) \quad (33)$$

et 
$$h(x) = \lambda_f \sqrt{\frac{U_0}{a_f}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\gamma(x-a) - \gamma(x-b)}{\gamma(x-a)\sqrt{x-a} - \gamma(x-b)\sqrt{x-b}} \quad (\text{créneau de flux entre a et b}) \quad (34)$$

Les profils de température sont calculés en résolvant le problème (24, 25, 32, 27) par éléments finis (Flex PDE).

### 3.3. Simulation numérique globale

Le problème couplé écoulement + paroi est résolu par éléments finis (code Flex PDE).

### 3.4. Résultats

Données du calcul :

$$\varphi_0 = 100 \text{ W m}^{-2}, U_0 = 1 \text{ m s}^{-1}, \lambda_f = 0,025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$$a_f = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \lambda_p = 10 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, e = 0,01 \text{ m}, a = 0,5 \text{ m}, b = 1 \text{ m}$$

On montre, sur la figure 3, les températures en  $y = 0$  obtenues par la simulation numérique globale et le calcul par impédance, les profils obtenus sont exactement les mêmes. Sur la figure 4 on a reporté les 3 résultats obtenus par les méthodes classiques et le calcul par impédance. On constate que l'approche classique est très loin de reproduire le profil de température, excepté sur le segment  $[a,b]$  en utilisant (34).

## 4. Conclusion

Nous avons montré que le modèle représentatif des échanges entre un écoulement établi et une paroi est une impédance généralisée  $Z(\omega, p)$  et par conséquent un produit de convolution et pas le produit simple d'un coefficient d'échange  $h(x, t)$  avec la température. L'impédance représente le système et est indépendante de la perturbation thermique. Dans les cas complexes, cette impédance ne peut pas être calculée analytiquement mais pourra être obtenue expérimentalement par méthode inverse par exemple. Une seule expérience est théoriquement nécessaire pour obtenir cette impédance qui permettra de simuler les réponses du système à n'importe quelles sollicitations thermiques.

## Références

- [1] R. Siegel, *Forced convection in a channel with wall heat capacity and with wall heating variable with axial position and time*, IJHMT, 6 (1963), 607-620.
- [2] D.E. Adams and B. Gebhart, *Transient forced convection from a flat plate subjected to a step energy input*, J. of Heat Transfer, (1964), 253-258.
- [3] D. Petit, J. Dard et A. Degiovanni, *Determination du coefficient d'échange entre un fluide et une paroi*, Rev. Gén. Therm., 238 (1981), 719-732.
- [4] D.J. Crowther and J. Padet, *Measurement of the local convection coefficient by pulsed photothermal radiometry*, IJHMT, 34(12) (1991), 3075-3081.
- [5] B. Rémy, A. Degiovanni et D. Maillet, *Mesure de coefficients d'échange pour des écoulements à faible vitesse*, Rev. Gén. Therm., 397(1995), 28-42.
- [6] B. Remy and A. Degiovanni, *Alternative and relevant representation to heat transfer coefficient for modelling the heat transfer between a fluid and a non-isothermal wall in transient regime*, Proc. of the 14<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf (Washington, 8-13 August 2010), CD Rom.

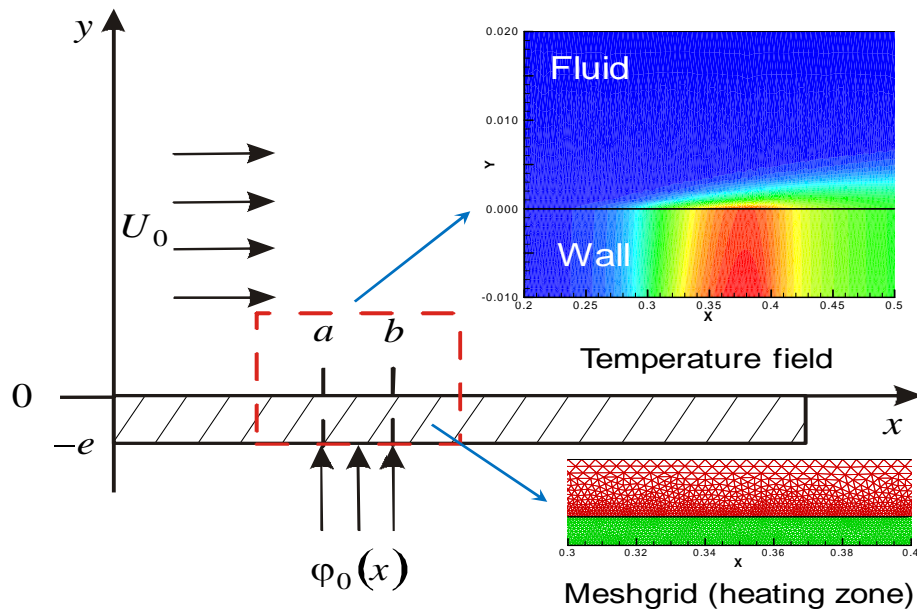


Figure 2 : problème couplé paroi-fluide

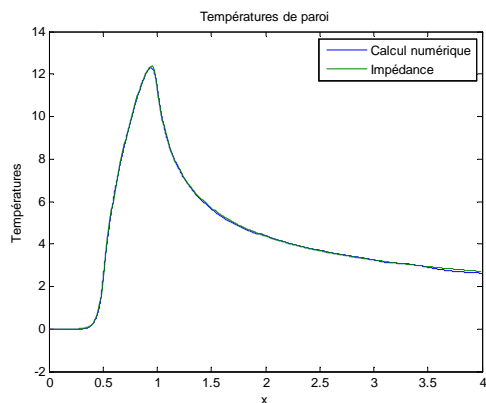


Figure 3: Température en  $y = 0$

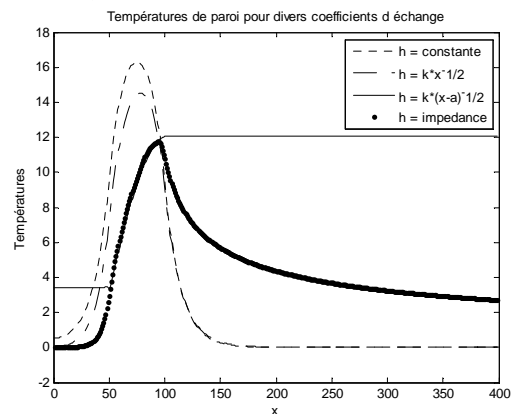


Figure 4 Comparaison impédance-résistance