

Convection au sein d'une couche horizontale fluide superposée à une couche poreuse.

Zineddine ALLOUI^{1*}, Hassen BEJI², Patrick VASSEUR^{1,2}

¹Ecole Polytechnique, Université de Montréal, C.P. 6079, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada (<http://www.meca.polymtl.ca/convection>)

²Laboratoire des Technologies Innovantes, Université Jules Vernes d'Amiens, rue des Facultés le Bailly, 800025 Amiens Cedex, France

* (auteur correspondant : zineddine.alloui@polymtl.ca)

Résumé - Dans la présente étude on considère le cas de la convection naturelle dans une cavité horizontale constituée d'une couche de fluide superposée à une couche poreuse saturée. Les équations de base décrivant l'écoulement sont résolues analytiquement pour des conditions thermiques de type Neumann en utilisant la condition de Beavers et Joseph. Les résultats sont présentés pour une large gamme des paramètres de contrôle du problème. Les résultats se trouvent être en bon accord avec ceux disponibles dans la littérature pour les cas limites de ce problème.

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité	u	vitesse adimensionnelle dans la direction x
g	accélération gravitationnelle, m/s^2	v	vitesse adimensionnelle dans la direction y
H'	hauteur de la cavité, m	x, y	coordonnées adimensionnelles
K	perméabilité du milieu poreux, m^2	<i>Symboles grecs</i>	
k	conductivité thermique, $W/m K$	α	diffusivité thermique, m^2/s
L'	largeur de la cavité, m	β'	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
Nu	nombre de Nusselt	ν	viscosité cinématique du fluide, m^2/s
q'	flux de chaleur par unité de surface, W/m^2	ρ	densité du fluide, kg/m^3
Ra	nombre de Rayleigh	Ψ	fonction de courant adimensionnelle
t	temps adimensionnel	<i>Indices et exposants</i>	
T	température adimensionnelle	o	état de référence

1. Introduction

La convection naturelle au sein d'un système composé d'une couche horizontale de liquide superposée au dessus d'une couche poreuse, chauffée par le bas, représente une idéalisation de nombreuses situations pratiques pouvant être rencontrées dans l'ingénierie et l'environnement. Les applications comprennent la solidification des pièces moulées, la production des aérosols, la pollution des eaux souterraines, l'isolation thermique, les systèmes géophysiques, etc. Une revue bibliographique complète des nombreux travaux effectués dans ce domaine a été présentée par Nield et Bejan [1]

La plupart des travaux sur la convection naturelle dans des systèmes bidimensionnels fluides/poreux sont concernés par le cas d'une cavité rectangulaire peu profonde, partiellement remplie par un milieu poreux. L'interaction qui se produit à l'interface entre le liquide et la couche poreuse a été formulée dans le passé selon deux approches différentes. La première consiste à modéliser la couche poreuse avec les équations de Brinkman et d'imposer à l'interface la continuité de la vitesse et du cisaillement visqueux (Somerton et Catton [2]). La seconde approche à ce problème est de considérer l'équation de Darcy pour la couche poreuse et d'appliquer à l'interface la condition empirique de Beavers-Joseph [3].

La présente investigation est concernée par une étude analytique de la stabilité et la convection naturelle dans un système constitué d'une cavité horizontale rectangulaire mince, constituée d'une couche de fluide superposée à une couche poreuse saturée. À l'interface entre le fluide et la couche poreuse la condition de glissement, proposée par Beavers et Joseph [3], est employée.

2. Formulation mathématique

La configuration considérée est une couche horizontale infinie poreuse s'étendant au-dessous d'une couche liquide. Les parois verticales délimitant la couche sont considérées imperméables et adiabatique, tandis que les parois horizontales inférieure et supérieure sont chauffés et refroidis respectivement par un flux de chaleur uniforme. Le fluide est supposé Newtonien et satisfait l'approximation de Boussinesq. En considérant l'écoulement résultant bidimensionnel et laminaire les équations gouvernantes adimensionnelles exprimées en termes de la fonction de courant sont les suivantes

En milieu fluide:

$$-J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \text{Pr} \nabla^4 \Psi - \text{Pr} Ra (\partial T / \partial x) \quad (1)$$

$$-J(\Psi, T) = \nabla^2 T \quad (2)$$

En milieu poreux:

$$\nabla^2 \Psi_p = -R (\partial T_p / \partial x) \quad (3)$$

$$-J(\Psi_p, T_p) = \gamma \nabla^2 T_p \quad (4)$$

avec la fonction de courant Ψ définie par $u = \partial \Psi / \partial y$, $v = -\partial \Psi / \partial x$ et l'opérateur Jacobien J par $J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x$.

Les conditions aux limites relatives à ce problème sont données par:

$$y = -\eta \quad \Psi_p = 0, \quad \partial T_p / \partial y = -\gamma \quad (5)$$

$$y = \bar{\eta} \quad \Psi = \partial \Psi / \partial y = 0, \quad \partial T / \partial y = -1 \quad (6)$$

À l'interface $y = 0$ on a:

$$v = v_p, \quad T = T_p, \quad \partial T / \partial y = \gamma \partial T_p / \partial y \quad (7)$$

$$-P + 2 \text{Pr} (\partial v / \partial x) = -P_p, \quad \partial u / \partial y = \alpha (u - u_p) / Da^{1/2} \quad (8)$$

Les paramètres régissant le problème sont ainsi le nombre de Rayleigh thermique, Ra , la position de l'interface entre les couches, η , nombre de Darcy, Da , paramètre de glissement, α , et le rapport de conductivité thermique, γ .

3. Solution analytique

Les équations gouvernant le problème (1)-(4) peuvent être considérablement simplifiées avec l'approximation de l'écoulement parallèle

$$\Psi(x, y) \approx \Psi(y) \quad \Psi_p(x, y) \approx \Psi_p(y) \quad (9)$$

$$T(x, y) \approx Cx + \theta(y) \quad T_p(x, y) \approx Cx + \theta_p(y) \quad (10)$$

C est le gradient de température sans dimension dans le sens horizontal. Cette approximation a été utilisée dans le passé par Cormack et al. [4], Vasseur et al. [5] et Sen et al. [6], entre autres.

En utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle les équations (1)-(4) se réduisent aux équations suivantes:

$$d^4\Psi / dy^4 = RaC \quad (11)$$

$$d^2\theta / dy^2 = C(d\Psi / dy) \quad (12)$$

$$d^2\Psi_p / dy^2 = -RC \quad (13)$$

$$d^2\theta_p / dy^2 = C(d\Psi_p / dy) / \gamma \quad (14)$$

La solution du système d'équation (11)-(14), satisfaisant les conditions aux limites (5)-(8) est:

$$u(y) = \Psi_0(\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}Ly^2 + My + N) \quad (15)$$

$$\theta(y) = C\Psi_0[y^5 + 5Ly^4 + 20My^3 + 60Ny^2 + 120PDa y] / 120 - y \quad (16)$$

$$u_p(y) = -Da\Psi_0(y + L) \quad (17)$$

$$\theta_p(y) = [C\Psi_0Da(-y^3 - 3Ly^2 + 6Py) - y] / \gamma \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} L &= E_1 / E, \quad M = E_2 / E, \quad N = E_3 / E, \quad P = \eta(\frac{1}{2}\eta - L) \\ E &= \bar{\eta}^3(\bar{\eta} + 4Da^*) + 12Dan\eta(\bar{\eta} + Da^*) + 6Da\bar{\eta}^2 \\ E_1 &= -\frac{1}{2}\bar{\eta}^4(\bar{\eta} + 3Da^*) + 6Dan\eta^2(\bar{\eta} + Da^*) \\ E_2 &= \frac{1}{12}\bar{\eta}^6 - \frac{3}{2}Da\bar{\eta}^4 - 3Dan\eta^2\bar{\eta}^2 + 6Da^2\eta^2 - 2Da\bar{\eta}^3\eta \\ E_3 &= -\frac{1}{12}\bar{\eta}(-\bar{\eta}^5Da^* + 24DaDa^*\eta\bar{\eta}^2 + 36DaDa^*\eta\bar{\eta} - 6Da\bar{\eta}^4 + 72Da^2\eta^2) \\ \Psi_0 &= RaC, \quad Da^* = \sqrt{Da} / \alpha \end{aligned} \quad (19)$$

L'effet du retournement de l'écoulement aux extrémités de la couche est pris en compte en faisant un bilan d'énergie sur un volume de contrôle (voir par exemple Bejan [7]). Le gradient de température est alors obtenu comme suit:

$$C = \pm \sqrt{\kappa_1[\kappa_2Ra - \gamma(\eta\bar{\eta} + \bar{\eta})]} / (\kappa_1Ra) \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= Da^2F_1 - \gamma G_1, \quad \kappa_2 = DaF_2 - \gamma G_2 \\ G_1 &= \frac{L}{720}\bar{\eta}^8 + \frac{1}{7}(\frac{13M}{360} + \frac{L^2}{48})\bar{\eta}^7 + \frac{1}{6}(\frac{11N}{120} + \frac{ML}{8})\bar{\eta}^6 + \frac{1}{5}(\frac{7NL}{24} + \frac{M^2}{6} + \frac{PDa}{6})\bar{\eta}^5 \\ &\quad + \frac{1}{4}(\frac{2NM}{3} + \frac{LPDa}{2})\bar{\eta}^4 + (\frac{N^2}{6} + \frac{MPDa}{3})\bar{\eta}^3 + \frac{NPDa}{2}\bar{\eta}^2 \\ G_2 &= \frac{1}{30}\bar{\eta}^5 + \frac{L}{8}\bar{\eta}^4 + \frac{M}{3}\bar{\eta}^3 + \frac{N}{2}\bar{\eta}^2 \\ F_1 &= -\frac{1}{30}\eta^5 + \frac{L}{6}\eta^4 + \frac{1}{3}(P - \frac{L^2}{2})\eta^3 - \frac{PL}{2}\eta^2 \\ F_2 &= \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{L}{2}\eta^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Le nombre de Rayleigh critique, Ra_c , marquant l'apparition de l'écoulement à partir de l'état de conduction est obtenu, comme suit:

$$Ra_c = \gamma(\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}) / \kappa_2 \quad (22)$$

Le nombre de Nusselt est donnée par :

$$Nu = (1 / \Delta T) / [(\eta + \gamma\bar{\eta}) / \gamma] \quad (23)$$

avec $\Delta T = T_p(0,0) - T(0,1)$, ce qui donne :

$$Nu = (1 + W\Psi_0C)^{-1} \quad (24)$$

où

$$W = \gamma \left[\left(\frac{1}{6} \eta^3 - \frac{L}{2} \eta^2 - P\eta \right) Da / \gamma - \left(\frac{1}{120} \bar{\eta}^5 + \frac{L}{24} \bar{\eta}^4 + \frac{M}{6} \bar{\eta}^3 + \frac{N}{2} \bar{\eta}^2 + P Da \bar{\eta} \right) \right] / (\eta + \gamma \bar{\eta}) \quad (25)$$

4. Résultats et discussion

La figure 1 illustre l'effet du paramètre de glissement, α , et le numéro de Darcy, Da , sur le nombre de Rayleigh critique Ra_c pour $\gamma = 1$ et $\eta = 0$. Le cas $\eta = 0$ correspond à une seule couche horizontale de fluide. Indépendamment des valeurs du nombre de Darcy, il est constaté que la limite $Ra_c = 320$, correspondant à une couche fluide limitée par une paroi solide et une paroi libre est retrouvée, lorsque α est très petit. Cette limite est atteinte plus rapidement pour les nombres de Darcy assez importants. Il est bien connu que le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection dans une couche fluide horizontale délimité par deux parois solides est donné par $Ra_c = 720$. Cette valeur est également retrouvée par la présente théorie lorsque le paramètre de glissement α est suffisamment grand. Ainsi, cette limite est atteinte à environ $\alpha = 0.74$ pour $Da = 10^{-8}$ et $\alpha = 7.52$ pour $Da = 10^{-6}$. Pour les grandes valeurs de Da et α la limite on obtient la limite $Ra_c=120$. Toutefois la Fig. 1 indique que les valeurs de Da et α nécessaire pour atteindre cette limite, sont bien au-delà de la limite de validité des conditions BJ.

L'effet du paramètre de glissement, α et la position de l'interface, η , sur le nombre de Rayleigh critique, Ra_c , est illustrée sur la figure 2 pour $Da = 10^{-3}$ et $\gamma = 1$. La courbe pour $\eta = 0$, correspondant à une seule couche fluide tel que discuté ci-dessus. La limite $\eta = 1$ représente le cas d'une couche poreuse pour laquelle le nombre de Rayleigh critique de l'apparition de la convection est donné par $Ra_c = 12/Da$. Lorsque la position de l'interface η varie de 0 à 1, on constate que l'influence du paramètre α devient de moins en moins importante sur l'apparition de la convection. Dans le cas limite $\eta = 1$, correspondant à une couche poreuse de Darcy, le paramètre de glissement α n'a aucun effet. Dans ce cas le modèle de Darcy ne peut pas prendre en considération les effets de la condition frontière hydrodynamique tangentielle imposée sur la couche.

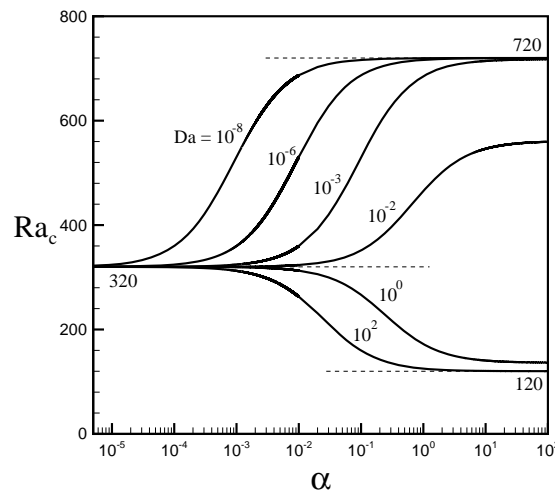


Figure 1 : Effet de α et de Da sur le Rayleigh critique Ra_c pour une couche fluide ($\eta=0$) et $\gamma=1$

L'influence du rapport de conductivité thermique γ , sur le nombre de Rayleigh critique Ra_c pour $\eta = 0.5$ et pour différentes valeurs du coefficient de glissement α et du nombre de Darcy Da est illustré sur la Fig. 3. Les résultats indiquent clairement que, indépendamment du

nombre de Darcy, il y a une augmentation du nombre de Rayleigh critique de façon linéaire avec l'augmentation γ . Cela résulte du fait que l'augmentation γ implique une diminution de la conductivité thermique dans la couche supérieure fluide. Cet effet stabilise le système, et exige en conséquence un nombre plus élevé de Rayleigh pour initier les mouvements convectifs. Il est à noter que la variation du coefficient de glissement α entre 0,1 et 10 n'affecte pas significativement la solution.

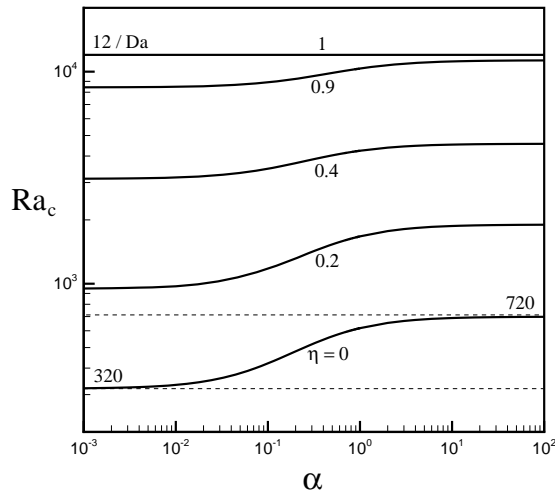


Figure 2 : Effet de α et η sur le Rayleigh critique Ra_c pour $Da=10^{-3}$ et $\gamma=1$

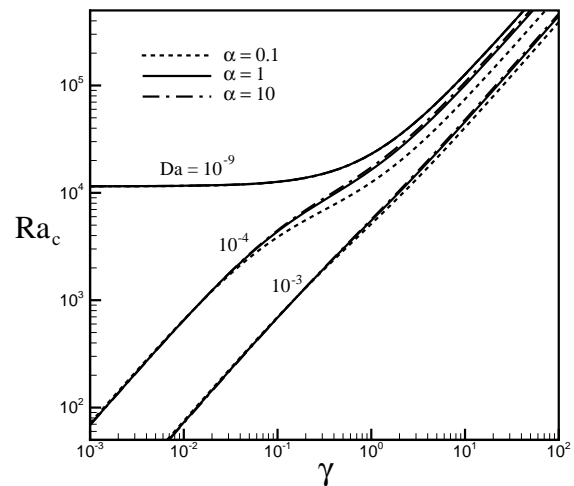


Figure 3 : Effet de γ et Da sur le Rayleigh critique Ra_c pour $\eta=0.5$ et $\alpha=0.1, 1$ et 10

La variation du nombre de Nusselt Nu avec le nombre de Rayleigh Ra est présenté sur la Fig. 4 pour $Da = 10^{-6}$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 1$ et pour différentes valeurs de η . Pour une valeur donnée de η , il y a un nombre de Rayleigh critique Ra_c , Eq. (22), en dessous duquel il n'y a pas de convection. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente au-dessus de la valeur critique, il y a apparition du mouvement de convection et le transfert de chaleur augmente en conséquence. Toutefois, la figure 4 illustre clairement le fait que Nu n'augmente pas de façon monotone, mais tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de η , lorsque Da , γ et α sont fixés. Ce phénomène est dû à l'application des conditions de Neumann sur les frontières horizontales de la couche. L'augmentation du nombre de Rayleigh, affecte au début la différence de température entre le haut et le bas de la couche. Cependant, après une certaine valeur du nombre de Rayleigh et en augmentant ce dernier les températures en haut et en bas de la couche continuent à augmenter, mais la différence entre ces deux température reste constante. Ainsi, à partir de l'équation (31) la limite $Nu = 10/3$ est obtenue pour $\eta = 0$, et la limite $Nu = 6$ pour $\eta = 1$.

La courbe de la figure 5 montre l'évolution du nombre de Nusselt avec la position, de l'interface entre le fluide et la couche poreuse, pour $Ra=10^6$, $Da = 10^{-2}$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 1$. La variation de la position de l'interface η de 0 à 1 engendre une variation du nombre de Nusselt de $Nu=3.8$ (pour une couche de fluide pur $\eta = 0$) à $Nu=6$ (pour une couche poreuse $\eta = 1$). Cependant, le graphique indique que la transition entre ces deux limites n'est pas uniforme. Pour $\eta = 0$, point (1), le profil de vitesse dans la couche de fluide varie d'une vitesse nulle $u=0$ en haut du système à une valeur donnée de u en bas de la couche. Cette vitesse de glissement est le résultat de la condition de BJ. Lorsque le paramètre η augmente, le nombre de Nusselt diminue au début pour atteindre un minimum à $\eta = 0.11$, point (2), pour lequel le profil de vitesse indique une discontinuité relativement important à l'interface. Au dessus de cette valeur de η , le nombre de Nusselt augmente jusqu'à $Nu=4.30$ pour $\eta=0.38$, point (3), pour lequel le profil de vitesse indique une discontinuité négligeable à l'interface et diminue

légèrement à $Nu = 4.20$ pour $\eta = 0.52$, point (4). Le même comportement est observé avec un maximum et un minimum survenant à $\eta = 0.81$, point (5), et 0.90 point (6), respectivement. Enfin, pour $\eta = 1$, point (7), le profil de vitesse linéaire est typique de celui rapporté dans le passé dans la littérature pour un milieu poreux de Darcy. Pour cette situation, le transfert de chaleur atteint un maximum.

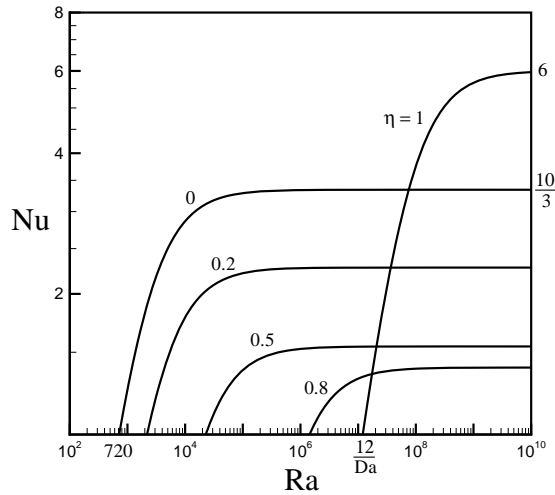


Figure 4 : Effet du nombre de Rayleigh Ra et η sur Nu pour $Da=10^6$, $\alpha=1$ et $\gamma=1$

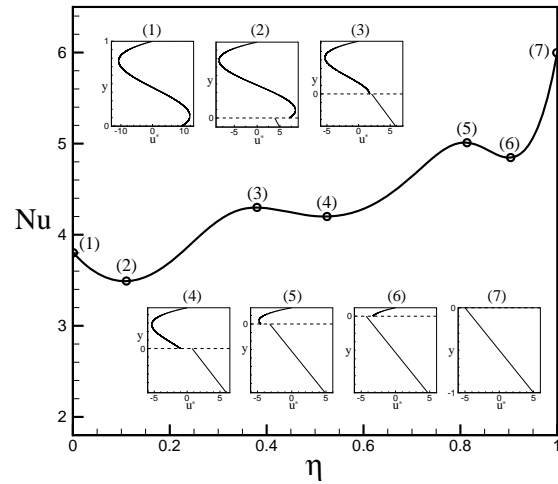


Figure 5 : Effet de η sur Nu pour $Da=10^{-2}$, $\alpha=1$, $Ra=10^6$ et $\gamma=1$

5. Conclusion

Une solution analytique est obtenue sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle. Avec les conditions thermiques considérées dans cette étude l'apparition de la convection unicellulaire supercritique se manifeste à un nombre d'onde extrêmement faible et peut être en conséquence prédite par la présente théorie. Le nombre de Rayleigh critique, Ra_c , les distributions de vitesse et de température et le nombre de Nusselt, Nu , sont obtenus explicitement en termes du rapport de profondeur de la couche poreuse, η , du nombre de Darcy du milieu poreux Da , du rapport des conductivités thermique du milieu fluide et poreux, γ et du paramètre de glissement de Beavers et Joseph α . Le cas limite d'une couche poreuse est retrouvé, pour $\eta = 1$, tandis que celui d'une couche fluide est obtenu lorsque $\eta = 0$. Dans ce dernier cas, le coefficient de glissement α a une forte influence sur la condition frontière imposée sur la partie inférieure de la couche fluide. Ainsi, la frontière se comporte comme une surface libre lorsque $\alpha < 1$, et comme une surface solide lorsque $\alpha > 1$. Pour les valeurs intermédiaires de η la présence du milieu poreux conduit à une situation plus stable, indépendamment de la valeur du coefficient de glissement.

Références

- [1] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer, 2006.
- [2] C.W. Somerton and I. Catton, On the thermal instability of superposed porous and fluid layers, *J. Heat Transfer* 104 (1982) 160-165.

- [3] G.S. Beavers and D.D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall, *J. Fluid Mech.* 30 (1967) 197-207.
- [4] D.E. Cormack , L.G. Leal, J. Inberger, Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls: Part1, Asymptotic theory. *J. Fluid Mech* 65 (1974) 209-230.
- [5] P. Vasseur, C.H. Wang, M. Sen, Thermal instability and natural convection in a fluid layer over a porous substrate, *Waerme-Stoffuebertragung* 24 (1989) 337-347.
- [6] M. Sen, P. Vasseur, L. Robillard, Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 2097-2113.
- [7] A. Bejan, The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26 (1983) 1339-1346.