

Identification de modèles réduits couplés pour des problèmes de convection forcée

Yassine ROUIZI¹, Manuel GIRAULT¹, Yann FAVENNEC², Daniel PETIT¹

¹Laboratoire d'Etudes Thermiques, U.M.R. C.N.R.S. 6608, ENSMA, B.P. 40109, 86961 Futuroscope Cedex. Auteur correspondant : yassine.rouizi@let.ensma.fr

²Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, U.M.R. C.N.R.S. 6607, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes. La Chantrerie, Rue Christian PAUC, B.P. 50609, 44 306 NANTES Cedex 03

Résumé – Cette étude numérique vient en complément des travaux précédents [1]. Elle porte sur l'identification de Modèles Réduits (MR), incluant le couplage (faible) vitesse-température et capables de fournir le champ de température, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds (Re) dans une gamme considérée et quelle que soit la densité de flux $\varphi(t)$ appliquée. Le principe consiste à minimiser une fonctionnelle d'écart entre les sorties (vitesses ou températures) du Modèle Détaillé (MD) et celles du MR. La structure du MR est définie à partir de la discrétisation spatiale des équations locales. La méthode est appliquée sur un écoulement de convection forcée 2D stationnaire, laminaire, d'un fluide incompressible le long d'une marche descendante.

Nomenclature

n	ordre du MR	<i>Symboles grecs</i>	
T	Température, K	λ	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\vec{V}(u, v)$	Vecteur vitesse	ρ	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
MD, MR	Modèle détaillé, modèle réduit	φ	Densité de flux, $W.m^{-2}$

1. Introduction

Les méthodes de réduction présentent un intérêt indéniable pour l'ingénieur, en particulier lorsque les MD nécessitent des temps de calcul importants. La méthode d'identification modale est développée depuis plusieurs années dans notre laboratoire, pour des problèmes de convection forcée [1] et de conduction [2]. Le principe consiste à identifier un MR en minimisant une fonctionnelle d'écart entre les sorties du MD et celles du MR. Après avoir donné la forme des MR et présenté la méthode d'identification, l'approche sera illustrée avec un écoulement localement chauffé le long d'une marche descendante.

2. Modélisation du système étudié

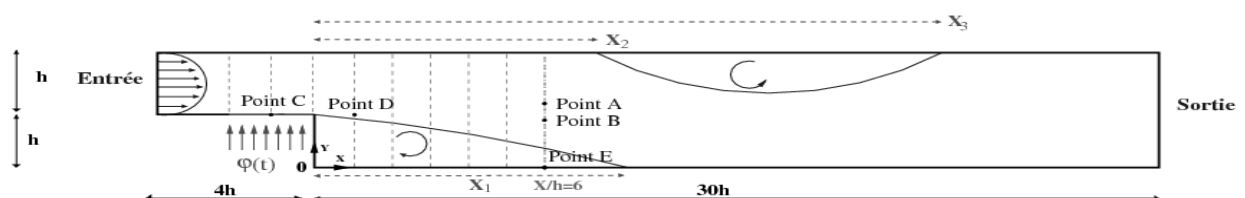


Figure 1: Géométrie du système étudié

On considère l'écoulement de convection forcée 2D stationnaire, laminaire, d'un fluide incompressible newtonien le long d'une marche descendante (cf. Figure 1). On suppose que les propriétés thermophysiques du fluide (air) ne dépendent pas de la température et que celle-ci est un scalaire passif. On considère un profil de vitesse parabolique à l'entrée du canal,

avec un nombre de Reynolds $Re = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{h}/\nu$ et on impose la condition $\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \mathbf{x}} = 0$ à la sortie du domaine. Les conditions aux limites thermiques sont une température $T_\infty = 300\text{K}$ imposée à l'entrée et une densité de flux $\varphi(t)$, appliquée juste avant la marche. Les équations du problème sont :

$$\text{Conservation de masse (continuité):} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Quantité de mouvement :} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} \quad (2)$$

$$\text{Energie :} \quad \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla T \right) = \lambda \Delta T \text{ avec } T(t=0) = T_\infty \quad (3)$$

Considérons une discrétisation spatiale de ces équations impliquant N nœuds de discrétisation, avec $\mathbf{V} = [(u_i, v_i) \ i = 1, \dots, N]^t$, $\mathbf{P} = [(p_i) \ i = 1, \dots, N]^t$ et $\mathbf{T} = [(T_i) \ i = 1, \dots, N]^t$ les vecteurs contenant respectivement les valeurs des variables discrètes de vitesse, pression et température. Quelle que soit la discrétisation spatiale de l'équation de quantité de mouvement, on arrive à écrire la forme dite de « représentation d'état » [1]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_f \mathbf{V} + \mathbf{Q}_f \Psi(\mathbf{V}) + \mathbf{B}_f Re \\ \mathbf{Y}_f = \mathbf{C}_f \mathbf{V} \end{cases} \quad (4)$$

On peut constater que le champ de vitesse dépend uniquement de Re ($\mathbf{V}(t=0) = 0$). Ici \mathbf{B}_f est un vecteur d'entrée qui applique la contribution de Re sur chaque nœud. En effet, le profil de vitesse à l'entrée dépend uniquement de Re . \mathbf{C}_f est une matrice d'observation permettant de sélectionner tout ou partie du champ, \mathbf{Y}_f est le vecteur des observables (de taille $q \leq 2N$) et $\Psi(\mathbf{V})$ représente le terme $(\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}}$.

Une approche similaire permet d'écrire la représentation d'état de l'équation de l'énergie (3):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_d \mathbf{T} + \mathbf{Q}_T \Pi(\mathbf{V}, \mathbf{T}) + \mathbf{B}_T \varphi(t) \\ \mathbf{Y}_T - \mathbf{T}_\infty = \mathbf{C}_T \mathbf{T} \end{cases} \quad (5)$$

où $\Pi(\mathbf{V}, \mathbf{T})$ est le vecteur modélisant les termes de transport et rassemblant les termes $\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla T$. \mathbf{B}_T est le vecteur qui relie l'évolution des températures au flux $\varphi(t)$. \mathbf{C}_T est une matrice d'observation permettant de sélectionner tout ou partie du champ, \mathbf{Y}_T est le vecteur des observables ou vecteur de sortie.

Le principe repose sur l'identification d'un MR représenté par une équation d'état sous forme modale. Deux MR seront construits ici: l'un relatif à la mécanique des fluides appelé Modèle Réduit Fluide (MRF), l'autre relatif aux transferts de chaleur instationnaires couplé au MRF, appelé Modèle Réduit Thermique (MRT).

Dans [1], nous avons vu qu'en introduisant dans les équations (4) un changement de variable $\mathbf{V} = \mathbf{M}_f \mathbf{Z}$, où \mathbf{M}_f est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de \mathbf{A}_f , on obtient un MD sous forme modale. L'idée est alors de chercher un MR de structure analogue mais avec n_f équations où $n_f \ll 2N$:

$$\text{MRF :} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_f \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma}_f \Psi(\mathbf{Z}) + \mathbf{G}_f Re \\ \mathbf{Y}_f = \mathbf{H}_f \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6)$$

Dans cette étude, l'ensemble du champ de vitesse sera observé: $\mathbf{Y}_f = \mathbf{V}$, correspondant à $q=2N$. De plus, l'écoulement étant supposé stationnaire, les équations (6) deviennent:

$$\text{MRF} : \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma}'_f \Psi(\mathbf{Z}) + \mathbf{G}'_f Re \\ \mathbf{V} = \mathbf{H}'_f \mathbf{Z} \end{cases} \quad (7)$$

De manière analogue, on peut écrire la forme du MRT. Soit \mathbf{M}_T la matrice modale de \mathbf{A}_d . En introduisant les changements de variable $\mathbf{T} = \mathbf{M}_T \mathbf{X}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{M}_f \mathbf{Z}$ dans l'équation (5) on obtient un MD sous forme modale et on va chercher un MR de structure analogue mais avec n_T équations où $n_T \ll N$:

$$\text{MRT} : \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_d \mathbf{X} + \mathbf{\Gamma}_T \mathbf{\Pi}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) + \mathbf{G}_T \varphi(t) \\ \mathbf{Y}_T - \mathbf{T}_\infty = \mathbf{H}_T \mathbf{X} \end{cases} \quad (8)$$

Où \mathbf{F}_d est une matrice diagonale de rang n_T . Le terme de transport $\mathbf{\Gamma}_T \mathbf{\Pi}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ dépend à la fois de l'état réduit thermique \mathbf{X} et de l'état réduit fluide \mathbf{Z} calculé avec le MRF.

Il est important de noter que les développements précédents ont pour seul but de nous fournir la structure des équations du MRF et du MRT. Notre approche ne requiert pas la résolution des problèmes aux valeurs propres associés aux matrices \mathbf{A}_f et \mathbf{A}_d (matrices de diffusion).

3. Identification des Modèles Réduits

La structure des deux MR étant établie, l'objectif est d'identifier les paramètres θ de chaque MR. Pour cela, on cherche à minimiser un critère quadratique bâti sur l'écart entre les réponses du MD et celles du MR lorsqu'un même signal d'entrée U est appliqué aux deux modèles.

$$\mathbf{J}(\theta) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{N_d} (\mathbf{Y}_{ij}(\theta) - \mathbf{Y}_{ij}^*)^2 \quad (10)$$

Pour le MRF, les paramètres à identifier sont les composantes de $\mathbf{\Gamma}'_f$, \mathbf{G}'_f et \mathbf{H}'_f . L'entrée U est ici le Re , N_d est le nombre de champs de vitesse utilisés pour l'identification, chacun correspondant à un nombre de Reynolds et le nombre d'observables $q = 2N$ (champ complet). Cette procédure de minimisation utilise une méthode de PNL (Quasi Newton) dans laquelle le gradient de J est calculé par une méthode adjointe [3]. La minimisation de J est d'abord effectuée pour l'ordre $n = 1$. L'ordre n est ensuite incrémenté jusqu'à ce qu'une précision prédéfinie entre MD et MR soit obtenue ou jusqu'à ce que J ne puisse plus être diminué. Les données du MD constituant le vecteur Y proviennent de simulations faites avec le logiciel Fluent®. Le MD Fluent® a été validé en comparant les résultats avec des données issues de la littérature, en particulier les travaux expérimentaux [4] et numériques [5].

Pour le MRT, les paramètres à identifier sont les composantes de \mathbf{F}_d , $\mathbf{\Gamma}_T$, \mathbf{G}_T et \mathbf{H}_T . L'entrée U est ici la densité $\varphi(t)$, N_d est le nombre de valeurs de Reynolds utilisés pour l'identification multiplié par le nombre de pas de temps et q dépend du cas considéré (cf 4.2). Pour cette procédure d'identification, en utilisant la même méthode de minimisation que pour le MRF, nous avons remarqué que les résultats étaient très sensibles aux valeurs initiales des paramètres inconnus. En effet, l'algorithme peut alors rester piégé dans un minimum local. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des méthodes d'optimisation d'ordre zéro telles que les essais particuliers [6]. Ce type d'algorithme, muni d'une population, permet de mieux balayer l'espace de recherche à l'initialisation et s'avère un choix souvent pertinent pour les problèmes à nombreux minima locaux.

4. Résultats

4.1 Modèle Réduit Fluide (MRF) stationnaire

On utilise pour l'identification du MRF $N_d = 8$ champs de vitesse stationnaires ($Re=100$ à 800) calculés avec Fluent® ($q = 2*144247$). Une série de 7 MRF d'ordre $n = 1$ à 7 est alors identifiée. Les résultats de l'identification sont résumés dans le tableau 1 où J est donné, ainsi que les écarts quadratiques moyens σ_u et σ_v entre le MD et le MRF et les écarts maximum pour les composantes de vitesse u et v . Le tableau 2 montre que le MRF d'ordre 7 est capable de reproduire d'une façon satisfaisante les résultats du MD fournis par Fluent®. Notons que ces tests ont été réalisés pour des valeurs de Re qui n'étaient pas utilisées dans la procédure d'identification. Sur la figure 2, sont représentés les champs de vitesse horizontale obtenus avec les deux modèles à $Re=550$, on observe une bonne adéquation entre les champs obtenus des deux modèles. Le tableau 3 vient confirmer la validité du MRF en montrant qu'il est capable de reproduire les zones de recirculation. Notons que les temps des simulations avec le MRF sont de l'ordre de $0,1$ s.

Ordre du MRF	J ($m^2.s^{-2}$)	σ_u ($m.s^{-1}$)	ϵ_u max ($m.s^{-1}$)	σ_v ($m.s^{-1}$)	ϵ_v max ($m.s^{-1}$)
1	4.96E+02	2.92E-02	1.31E-01	1.62E-04	4.22E-02
2	7.22E+01	1.09E-02	4.95E-02	9.92E-05	1.89E-02
3	1.33E+01	4.63E-03	2.36E-02	6.44E-05	9.02E-03
4	2.18E+00	1.84E-03	1.28E-02	4.06E-05	5.52E-03
5	4.09E-01	7.80E-04	3.71E-03	2.64E-05	2.41E-03
6	5.51E-02	2.79E-04	1.44E-03	1.58E-05	1.03E-03
7	4.80E-03	8.15E-05	4.91E-04	8.54E-06	3.39E-04

Tableau 1: Résultats de l'identification du MRF

Re	σ_u ($m.s^{-1}$)	ϵ_u max ($m.s^{-1}$)	σ_v ($m.s^{-1}$)	ϵ_v max ($m.s^{-1}$)
150	3.98E-04	2.27E-03	2.23E-04	1.44E-03
250	2.06E-04	1.05E-03	1.20E-04	7.15E-04
350	1.25E-04	5.34E-04	7.47E-05	3.82E-04
450	5.81E-05	2.82E-04	3.55E-05	1.81E-04
550	5.77E-05	2.56E-04	2.74E-05	1.47E-04
650	1.35E-04	5.00E-04	6.78E-05	3.19E-04
750	2.57E-04	1.00E-03	1.26E-04	6.09E-04

Tableau 2: Résultats de la validation du MRF d'ordre 7

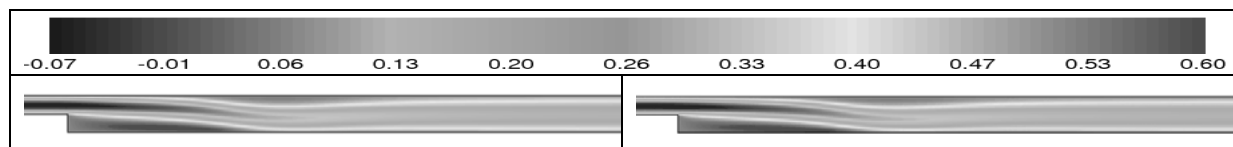


Figure 2: Champs de vitesse horizontale ($m.s^{-1}$) donné par Fluent® (144247 nœuds, à gauche) et le MRF ($n=7$, à droite), pour $Re = 550$

Re	X_1/h MD	X_1/h MR	X_2/h MD	X_2/h MR	X_3/h MD	X_3/h MR
150	3.962	4.038				
250	5.872	5.841				
350	7.507	7.450				
450	8.843	8.770	7.769	8.125	11.633	11.290
550	9.885	9.809	8.190	8.503	14.478	14.281
650	10.71	10.67	8.663	8.982	17.011	16.727
750	11.44	11.39	9.145	9.423	19.361	19.069

Tableau 3 : Position de décollement et de recollement des zones de recirculations. (cf Figure 1)

4.2 Modèle Réduit Thermique (MRT) instationnaire

Dans le but de constituer un ensemble de données représentatives de la dynamique de notre système, une densité de flux de chaleur est appliquée sur une partie du canal, juste avant la marche descendante le long de $2h$ (cf. Figure 1). Il a été vérifié que pour un flux $\varphi = 300$

W.m⁻², la température maximale dans le canal est telle que le nombre de Richardson est d'environ 0,1, ce qui nous permet de vérifier l'hypothèse d'un régime de convection forcée. Le champ de température a d'abord été calculé avec le modèle Fluent® ($q = 144247$) pour 6 nombres de Reynolds allant 300 à 800 par pas de 100 et pour un échelon de flux ($\varphi = 0$ à $t=0$ puis $\varphi = 300$ W.m⁻² pendant 300 pas de temps de 0,1s). Les températures obtenues, auxquelles a été retranchée la température à l'entrée du canal $T_\infty = 300$ K, ont été ensuite utilisées comme données. Deux cas, chacun comportant un ensemble de sorties spécifiques, ont été envisagés: une ligne de $q = 135$ nœuds située à $x/h = 6$ (MRT1) et un ensemble de points dans la zone $-2 \leq x/h \leq 6$, constitué de $q = 213$ nœuds (MRT2) (cf. Figure 1). Dans le tableau 4 sont résumés les résultats de l'identification des MRT d'ordre 1 à 10. Seules les erreurs quadratiques moyennes σ_Y peuvent être comparées pour les 2 cas puisque J dépend du nombre de données. Le choix du MRT se fait en fonction du σ_Y , dès que $\sigma_Y < 10^{-2}$ (K). Le tableau 4 montre que le MRT1 d'ordre 7 et le MRT2 d'ordre 10 devraient donner une bonne approximation des résultats de Fluent® pour les deux cas. Le but de la validation est de vérifier que le MRT est capable de reproduire le comportement du MD quand celui-ci est soumis à un autre flux test $\varphi(t)$ (cf. Figure 3) et une autre valeur du nombre de Reynolds que ceux utilisés dans la procédure de l'identification ($Re=550$). La figure 4 montre l'évolution de la température en deux points A et B (cf. Figure 1), à la fois pour le modèle Fluent® et le MRT1 d'ordre 7. La figure 5 donne le profil de température en $x/h = 6$ à l'instant $t = 30$ s calculé par les deux modèles. La figure 6 montre l'évolution de la température calculée avec Fluent® et le MRT2 d'ordre 7 pour les points C, D et E dans la zone $-2 \leq x/h \leq 6$. Le tableau 5 résume tous les résultats de la validation et montre que les températures calculées avec les deux MRT sont très proches de celles données par Fluent®, avec un faible σ_Y . L'erreur maximale et la position correspondante dans l'espace et le temps sont aussi donnés.

5 Conclusion

Cette étude vient compléter la méthode d'identification modale pour les écoulements de convection forcée, en proposant une formulation de modèle réduit incluant le couplage faible vitesse-température. Une application est faite sur un écoulement 2D, laminaire, incompressible le long d'une marche descendante, soumise à une densité flux de chaleur, en considérant la température comme un scalaire passif. Deux types de MR sont formulés. Un premier MR capable de reproduire le champ de vitesse quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds dans la gamme [100,800] d'identification et permettant de fournir l'état réduit fluide \mathbf{Z} . Un second MR dépendant de \mathbf{Z} (donc de Re) et de la densité flux $\varphi(t)$, permettant de calculer le champ de température. Ces résultats constituent une étape, la suite de nos travaux est de mettre en place un outil de contrôle de champ thermique en agissant à la fois sur les conditions aux limites thermique et de dynamiques.

Références:

- [1] Rouizi Y., Girault M., Favennec Y., Petit D., Identification de modèles réduits pour des problèmes de convection forcée : Application à un écoulement laminaire stationnaire le long d'une marche descendante avec conditions aux limites thermiques instationnaires., *SFT 2008 Tome 1*, 439-444, 2008
- [2] M. Girault, D. Petit, Identification methods in nonlinear heat conduction. Part I: Model Reduction, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 48 (2005),105-118.
- [3] Y. Favennec, M. Girault, D. Petit, The adjoint method coupled with the modal identification method for nonlinear model reduction. *Inverse Pbs in Science and Engineering*, 14 (2006), 153-170.
- [4] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira and B. Schonung, 1983, Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, *Journal of Fluid. Mech.* 127 (1983), 473-496.

[5] E. Erturk, Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Flow Over a Backward-Facing Step, Part I: High Reynolds Number Solutions, *Computers & Fluid*, 37(6): 633-655 (2008).

[6] M. Clerc, *L'optimisation par essais particuliers*, Hermes Science publications, Lavoisier, 2005.

Ordre du MRT	Ligne $x/h = 6$ (135 nœuds)		Zone (213 nœuds)	
	J (K ²)	σ_Y (K)	J (K ²)	σ_Y (K)
1	9901.8	0.285	37844.6	0.444
2	549.01	6.71E-002	9552.1	0.223
3	267.16	4.68E-002	1045.03	7.37E-002
4	76.72	2.51E-002	450.09	4.84E-002
5	35.56	1.71E-002	235.74	3.50E-002
6	14.80	1.10E-002	121.59	2.51E-002
7	6.41	7.25E-003	64.24	1.83E-002
8	5.20	6.53E-003	36.33	1.37E-002
9	4.99	6.40E-003	22.34	1.08E-002
10	3.03	4.99 E-003	8.40	8.40 E-003

Tableau 4: Résultats de l'identification des MRT

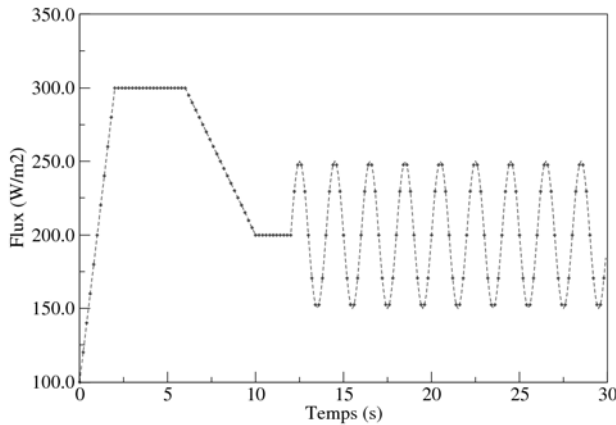


Figure 3: signal test $\varphi(t)$

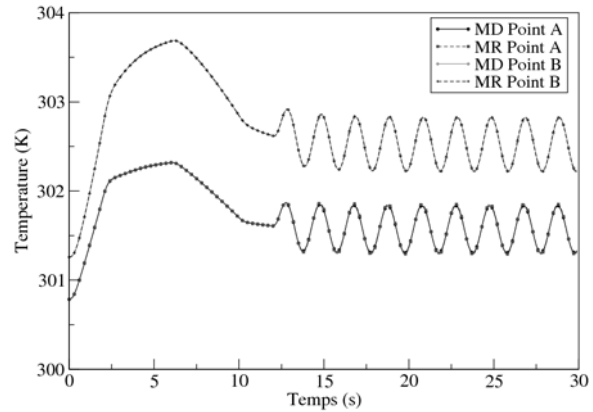


Figure 4: évolution de la température en 2 points du domaine. Comparaison MD/MRT1

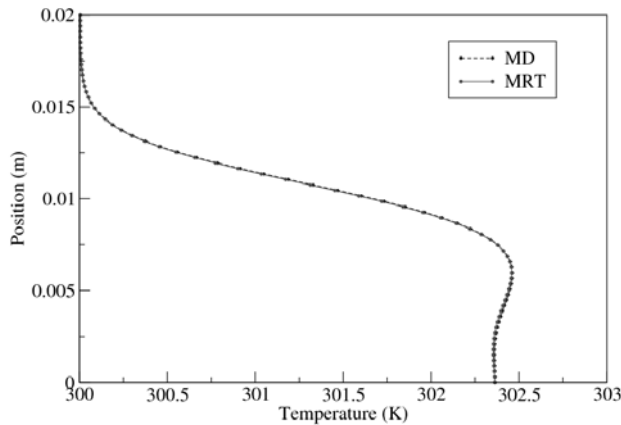


Figure 5: profil de température à $x/h=6$ et $t=30$ s. Comparaison MD/MRT1

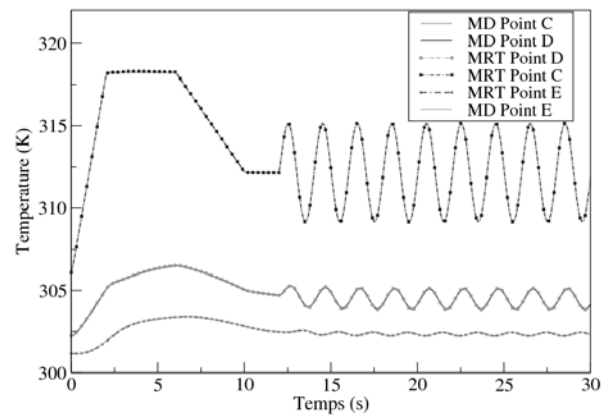


Figure 6: évolution de la température en 3 points du domaine. Comparaison MD/MRT2

Cas	Ordre MRT	σ_Y (K)	ϵ max (K)	Xpos /h	Ypos/h	Temps (s)
Ligne $x/h = 6$ (135 nœuds)	7	6.16E-003	1.83E-002	6	1.075	16.9
Zone (213 nœuds)	10	7.27E-003	3.85E-002	1	0	15.4

Tableau 5: Validation du MRT par un flux test $\varphi(t)$, pour les 2 cas étudiés.