

# Modélisation TDF des moteurs "isothermes" avec pertes : application à l'évaluation d'un moteur Stirling LTD

Pierre ROCHELLE<sup>(1,2)</sup>, Nadia MARTAJ<sup>(1)</sup>, Lavinia GROSU<sup>(1)</sup>

(1) Laboratoire d'Energétique, de Mécanique et d'Electromagnétisme, Université Paris10, France, 50, rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray

(2) Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Paris6, France, 2, place de la gare de ceinture, 78210 Saint Cyr l'Ecole.

Auteur référent : [pierre.rochelle@u-paris10.fr](mailto:pierre.rochelle@u-paris10.fr)

**Résumé** - Ce travail présente un modèle basé sur les méthodes de la Thermodynamique en Dimensions physiques Finies (TDF) dans lequel les pertes thermiques (conduction, convection) et mécaniques (frottements) tant "solides" que "gazeuses" sont individualisées. Les équations développées ici constituent un outil permettant la quantification indirecte de ces pertes lors du fonctionnement réel du moteur. Ajoutées aux grandeurs classiquement obtenues au banc d'essai (travail, quantité de chaleur, rendement), les valeurs de ces pertes ainsi déduites autorisent l'évaluation de certaines grandeurs physiques de la machine (conductances, par ex.). Un exemple concret est donné qui permettra de valider, ou pas, les hypothèses adoptées lors des analyses de type TDF.

## Nomenclature

$C$	Course, mm
$D$	Diamètre, mm
$k$	Coefficient adimensionnel, -
$K$	Conductance, W/K
$n$	Vitesse de rotation, tr/s
$Q$	Quantité de chaleur, J
$\dot{Q}$	Puissance calorifique, W
$T$	Température, K
$W$	Travail, J

## Symboles grecs

$\alpha$	Rapport des conductances, -
$\beta$	Pourcentage de pertes par frottement intérieur
$\eta$	Rendement, -
$\tau$	Rapport de températures, -
$\rho$	Rapport des quantités de chaleur, -
$\varphi$	Déphasage entre les 2 pistons, °

## Indice

$cd$	conduction
$cv$	convection
$d$	piston déplaceur
$e$	effectif
$fext$	frottement extérieur
$fint$	frottement intérieur
$h$	gaz chaud
$H$	paroi chaude
$i$	interne
$in$	entrée
$ind$	indiqué
$l$	gaz froid
$L$	paroi froide
$out$	sortie
$p$	piston moteur
$rev$	réversible
$0$	moteur à l'arrêt

## 1. Introduction

La thermodynamique en temps fini (FTT) ou -à vitesse finie (FSpT) ou -à dimensions physiques finies (TDF) permet de prendre en compte les phénomènes physiques qui ne peuvent être considérés comme instantanés dans les systèmes thermiques, en particulier ceux liés aux transferts d'énergie ou de matière [1-5]. Son application aux moteurs fonctionnant avec un cycle équivalent à celui de Carnot a permis de dégager des particularités (valeurs optimales, en particulier) des caractéristiques de fonctionnement de ces machines [6, 7]. Les moteurs Stirling sont parmi ceux ayant suscité le plus d'intérêt mais les tentatives de prise en compte des pertes énergétiques se sont révélées difficiles, approximatives et, pour l'instant, incomplètes [8-9]. Nous proposons dans cet article un modèle qui globalise les pertes en les regroupant par catégories (thermiques et mécaniques, internes au gaz ou externes) afin de

constituer un outil capable de faire le tri entre ces pertes lors d'essais réels de machines. On pourra remonter ainsi à l'identification de paramètres, établir leur relation, ou non, avec la vitesse de rotation et d'autres grandeurs, évaluer la qualité des machines et mettre en évidence les points à travailler. L'application est faite à un moteur Stirling à faible différence des températures (LTD).

## 2. Modèle

Ce modèle, dans son esprit, est peu différent de ceux déjà proposés [2,10,11] qui associent cycle idéal ou irréversible et certaines pertes. Il est cependant plus complet car il assimile le moteur thermique réel à un moteur à cycle "isotherme" réversible associé à la totalité des pertes subies par le moteur réel. Le modèle comporte ainsi 3 volumes de contrôle imbriqués (fig. 1) : le moteur réversible (cercle grisé, frontière en trait plein), le moteur thermodynamique (frontière en trait mixte) et le moteur thermique (en trait interrompu).

On suppose le moteur en contact avec une source chaude infinie de température de paroi  $T_H$  et un puits froid infini, température  $T_L$ . L'isotherme chaude pour le gaz de travail se trouve à la valeur  $T_h$  et l'isotherme froide à  $T_l$ . La chaleur  $Q_{in}$  fournie par la source chaude se répartit entre celle perdue par conduction solide ( $Q_{cdest}$ ) et celle transmise au gaz par convection ( $Q_{cvin}$ ). Cette dernière, augmentée de la quantité résultante des frottements internes du gaz  $\beta \cdot W_{fint}$ , se répartit entre la chaleur perdue par "conduction" interne équivalente ( $Q_{cdint}$ ) et celle apportée au cycle moteur réversible ( $Q_{revin}$ ). La chaleur, négative, cédée au puits froid ( $Q_{out}$ ) est constituée de celle cédée par le gaz de travail ( $Q_{cvout}$ ), par convection, diminuée de la quantité  $Q_{cdest}$  perdue par conduction solide. La chaleur cédée par convection se décompose en chaleur cédée par le moteur réversible ( $Q_{revout}$ ), en celle des pertes internes par "conduction" ( $Q_{cdint}$ ) et de la part résultant des frottements internes du gaz  $(1-\beta) \cdot W_{fint}$ . Les pertes thermiques et les transferts de chaleur répondent à la loi linéaire de Newton-Fourier.

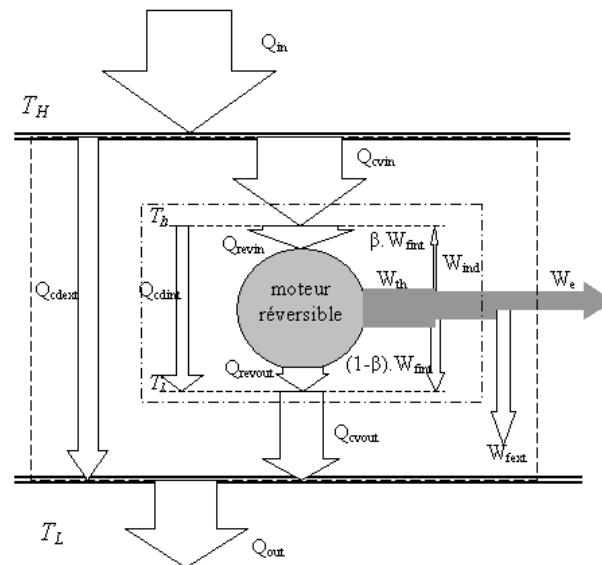


Figure 1 : Schéma des flux d'énergie du modèle

Les pertes mécaniques externes ( $W_{fext}$ ) sont supposées ne dépendre que de la vitesse de rotation. Elles se dispersent librement sous forme de chaleur dans le milieu ambiant sans requérir d'échangeur.

Le travail indiqué ( $W_{ind}$ ), fourni par le gaz aux pistons du moteur, est supposé n'être que la différence entre le travail théorique réversible ( $W_{th}$ ) et le travail des frottements internes ( $W_{fint}$ ). Le travail effectif du moteur ( $W_e$ ) provient du travail indiqué ( $W_{ind}$ ) diminué des pertes mécaniques externes ( $W_{fext}$ ).

### 3. Relations et bilans

On trouve ci-après la liste des équations illustrant les relations évoquées dans le paragraphe précédent, où  $n$  est la vitesse de rotation du moteur :

- entre le travail effectif et le travail théorique :

$$|W_e| = |W_{th}| - |W_{fext}| - |W_{fint}| \quad (1)$$

- entre le flux de chaleur apporté au cycle réversible et le travail théorique :

$$|\dot{W}_{th}| = n \cdot |W_{th}| = \dot{Q}_{revin} \cdot (1 - \tau_i) = (\dot{Q}_{cvin} - \dot{Q}_{cdint} + \beta \cdot \dot{W}_{fint}) \cdot (1 - \tau_i) \quad (2)$$

où  $\tau_i$  est le rapport des températures froide et chaude du gaz ( $=T_l/T_h$ )

- entre le flux de chaleur apporté par convection au gaz et la différence des températures "chaudes" :

$$\dot{Q}_{cvin} = K_h \cdot (T_H - T_h) \quad (3)$$

où  $K_h$  est la conductance entre la paroi de la source chaude et le gaz de travail.

- entre le flux de chaleur cédé par convection à la paroi du puits froid et la différence des températures "froides" :

$$\dot{Q}_{cvout} = K_l \cdot (T_l - T_l) \quad (4)$$

où  $K_l$  est la conductance entre le gaz et la paroi du puits froid.

En appelant  $K_T$  la somme des 2 conductances précédentes et  $\alpha$  la part correspondant à la conductance "chaude", on obtient :

$$\dot{Q}_{cvin} = K_T \cdot T_H \cdot \alpha \cdot (1 - \tau_h) \quad (5)$$

$$\dot{Q}_{cvout} = K_T \cdot T_H \cdot (1 - \alpha) \cdot (\tau - \tau_l) \quad (6)$$

où  $\tau$ ,  $\tau_h$ ,  $\tau_l$  sont respectivement les rapports  $T_l/T_H$ ,  $T_h/T_H$ ,  $T_l/T_h$  ; on rappelle que  $\tau_i = T_l/T_h = \tau/\tau_h$ . Le flux de chaleur perdu par conduction interne s'exprime par :

$$\dot{Q}_{cdint} = K_{cdint} \cdot (T_h - T_l) = K_{cdint} \cdot T_H \cdot \tau_h \cdot (1 - \tau_i) \quad (7)$$

où  $K_{cdint}$  est la conductance interne équivalente relative aux pertes thermiques du gaz

Et celui perdu par conduction externe s'exprime par :

$$\dot{Q}_{cdext} = K_{cdext} \cdot (T_H - T_l) = K_{cdext} \cdot T_H \cdot (1 - \tau) \quad (8)$$

où  $K_{cdext}$  est la conductance externe relative aux pertes thermiques "solides" de la machine.

Le flux de chaleur apporté par la source chaude peut alors s'écrire :

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{cdext} + \dot{Q}_{cvin} = K_T \cdot T_H \cdot [k_{cdext} \cdot (1 - \tau) + \alpha \cdot (1 - \tau_h)] \quad (9)$$

où  $k_{cdext}$  est le rapport des conductances  $K_{cdext}$  et  $K_T$ .

Le flux cédé à la source froide est :

$$\dot{Q}_{out} = \dot{Q}_{cvout} - \dot{Q}_{cdext} = K_T \cdot T_H \cdot [(1 - \alpha) \cdot (\tau - \tau_i \cdot \tau_h) - k_{cdext} \cdot (1 - \tau)] \quad (10)$$

La puissance mécanique indiquée peut s'exprimer aussi en fonction des flux par :

$$|\dot{W}_{ind}| = \dot{Q}_{revin} + \dot{Q}_{revout} = K_T \cdot T_H \cdot [\alpha \cdot (1 - \tau_h) + (1 - \alpha) \cdot (\tau - \tau_h \cdot \tau_i)] = |\dot{W}_{th}| - |\dot{W}_{fint}| \quad (11)$$

La puissance mécanique effective peut être reliée aux flux, à partir de (1) par :

$$|\dot{W}_e| = |\dot{W}_{ind}| - |\dot{W}_{fext}| = K_T \cdot T_H \cdot [\alpha \cdot (1 - \tau_h) + (1 - \alpha) \cdot (\tau - \tau_h \cdot \tau_i) - k_{wfext}] \quad (12)$$

où  $k_{wfext} = \frac{|\dot{W}_{fext}|}{K_T \cdot T_H}$  ; la puissance de frottement mécanique  $\dot{W}_{fext}$  est surtout fonction de  $n$ .

Le rendement effectif s'écrit :

$$\eta_e = \frac{|\dot{W}_e|}{\dot{Q}_{in}} = \frac{[\alpha \cdot (1 - \tau_h) + (1 - \alpha) \cdot (\tau - \tau_h \cdot \tau_i) - k_{wfext}]}{[\alpha \cdot (1 - \tau_h) + k_{cdext} \cdot (1 - \tau)]} \quad (13)$$

En combinant les équations (2), (5) et (6) on peut exprimer  $\tau_h$  en fonction de  $\tau_i$  :

$$\tau_h = \frac{\alpha \cdot \tau_i + (1 - \alpha) \cdot \tau + k_{wfext} \cdot [1 - \beta \cdot (1 - \tau_i)]}{\tau_i - k_{cdint} \cdot (1 - \tau_i)^2} \quad (14)$$

où  $k_{cdint} = \frac{K_{cdint}}{K_T}$  et  $k_{Wfint} = \frac{|\dot{W}_{fint}|}{K_T \cdot T_H} = \frac{n \cdot |W_{fint}|}{K_T \cdot T_H}$ . On voit que  $\tau_h$  et  $\tau_i$  sont probablement des fonctions de la vitesse  $n$  car celle-ci est contenue explicitement dans certains des coefficients des équations. On remarque aussi que, si  $k_{Wfext} \approx 0$ ,  $\tau_h$  devient

$$\tau_h = \frac{\alpha \cdot \tau_i + (1 - \alpha) \cdot \tau}{\tau_i - k_{cdint} \cdot (1 - \tau_i)^2} \quad (15)$$

#### 4. Application aux essais de moteurs Stirling à faible différence des températures

Dans le cas de ces moteurs, la vitesse de rotation  $n$  est relativement faible et les pertes par frottements internes associées sont négligeables comme peuvent le montrer des modélisations numériques [12]. En conséquence, le terme  $k_{Wfint}$  pourra être négligé.

Nous avons utilisé un moteur Stirling LTD de type Gamma, de démonstration, dont les pistons moteur et déplaceur possèdent respectivement des diamètres  $D_p = 18$  mm et  $D_d = 138$  mm avec un déphasage entre eux de  $90^\circ$  et une course de 10 mm chacun. La différence de température source chaude-puits froid évolue entre 11 et  $37^\circ\text{C}$ . Le banc d'essai utilisé permet de relever différentes grandeurs (températures, pression instantanée, ...). On peut ainsi déduire le rapport de températures  $\tau$ , la quantité de chaleur  $Q_{in}$ , le travail indiqué  $W_{ind}$ , les puissances correspondantes ainsi que les rendements.

A partir de ces informations et en utilisant le modèle mathématique (équations 1 à 15), on obtient les valeurs des paramètres  $\tau_i$ ,  $K_T$ ,  $\alpha$ ,  $k_{cdext}$ ,  $k_{cdint}$ ,  $k_{Wfext}$  qui nous permettront de déduire les grandeurs inaccessibles directement telles le travail de frottement, la chaleur perdue par conduction solide, -par conduction gazeuse, les chaleurs transférées par convection.

La démarche est la suivante :

- le travail de frottement externe  $W_{fext}$  représente le travail indiqué, obtenu du cycle déduit de la valeur instantanée de pression et de volume, moteur hors charge (le travail des gaz ne sert qu'à vaincre les frottements mécaniques du moteur).

$$|W_{fext}| = |W_{ind}| \quad (16)$$

- le coefficient  $K_{cdext}$ , supposé constant quelle que soit la vitesse de rotation, est déduit de la chaleur qui traverse le moteur à l'arrêt et soumis à un flux de chaleur donnant une différence de température entre les parois de sa source et de son puits de chaleur :

$$K_{cdext} = \frac{\dot{Q}_{in0}}{T_{H0} - T_{L0}} \quad (17)$$

- le rapport  $\tau_i$  des températures extrêmes du cycle réversible,  $T_l$  et  $T_h$ , est obtenu en supposant négligeables les frottements internes, hypothèse qui assimile le travail théorique au travail indiqué, et qui suppose le modèle de Schmidt représentatif du cycle réel dans ces conditions. Après avoir relevé les caractéristiques géométriques du moteur, on peut calculer les paramètres utilisés dans ce modèle [13] qui contiennent  $\tau_i$  comme variable ainsi qu'une pression de référence (pression maximum ou moyenne temporelle, obtenue de l'expérience). La valeur de  $\tau_i$  retenue sera celle qui, par approximations successives, fera correspondre la valeur calculée du travail du cycle de Schmidt à la valeur mesurée du travail indiqué :

$$\tau_i^{j+1} = F(\tau_i^j) \text{ jusqu'à ce que } \tau_i^{j+1} \cong \tau_i^j, \text{ avec } \tau_i^1 = \tau \quad (18)$$

- la chaleur  $Q_{revin}$  apportée au cycle réversible peut être obtenue du travail théorique  $W_{th}$  ( $\approx W_{ind}$  connu) et du rapport des températures internes  $\tau_i$  :

$$|W_{ind}| = Q_{revin} \cdot (1 - \tau_i) \Rightarrow Q_{revin} = \frac{|W_{ind}|}{(1 - \tau_i)} \quad (19)$$

- la chaleur transférée par convection au gaz de travail  $Q_{cvin}$  est la différence entre la chaleur totale fournie au moteur et celle perdue par conduction solide :

$$Q_{cvin} = Q_{in} - Q_{cdext} = \frac{\dot{Q}_{in} - K_{cdext} \cdot (T_H - T_L)}{n} \quad (20)$$

- la chaleur perdue par "conduction" dans le gaz  $Q_{cdint}$  est déduite des quantités déjà mesurées ou calculées :

$$Q_{cdint} = Q_{cvin} - Q_{revin} \quad (21)$$

- le coefficient de conductance interne  $k_{cdint}$  peut se déduire du rapport  $\rho_Q$  des chaleurs  $Q_{cdint}$  et  $Q_{cvin}$ , connues, dans lequel on explicite alors  $\tau_h$  (équ. 15) :  $\rho_Q = \frac{Q_{cdint}}{Q_{cvin}}$  qui donne

$$k_{cdint} = \frac{\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (\tau_i - \tau) \cdot \rho_Q}{(1 - \tau_i) \cdot [\alpha \cdot \tau_i + (1 - \alpha) \cdot \tau + \alpha \cdot (1 - \tau_i) \cdot \rho_Q]} \quad (22)$$

avec une hypothèse supplémentaire sur l'équipartition des conductances  $\alpha = 1/2$ .

- le rapport des températures chaudes  $\tau_h$  est donné par l'équation (15) où  $k_{cdint}$  est remplacé par son expression donnée par l'équation (22).

- le coefficient de conductance convective totale  $K_T$  est extrait de  $Q_{cvin}$  (équ. 4 et 20) :

$$K_T = \frac{Q_{cvin} \cdot n}{\alpha \cdot T_H \cdot (1 - \tau_h)} \quad (23)$$

- la conductance des pertes internes  $K_{cdint}$  trouvée à partir des équations (22) et (23) :

$$K_{cdint} = k_{cdint} \cdot K_T \quad (24)$$

On peut ainsi, pour des valeurs du rapport des températures de parois  $\tau$  données, tracer l'évolution des grandeurs caractéristiques de fonctionnement du moteur (travaux, chaleurs, puissances) et des paramètres (conductances) en fonction de la vitesse de rotation du moteur  $n$ . Aussi confirmer, ou non, la validité des hypothèses (constance des paramètres) employées dans les modèles TTF proposés jusqu'à présent. On peut également comparer la valeur théorique de la chaleur de régénération  $Q_{reg}$  associée au cycle de Schmidt [13] avec la valeur de celle perdue par "conduction" interne  $Q_{cdint}$  qui sert, pour une grande part, à compenser la régénération imparfaite. Cette part  $\Delta Q_{reg}$  est fonction du rendement du régénérateur  $\eta_{reg}$  :

$$\Delta Q_{reg} = (1 - \eta_{reg}) \cdot Q_{reg} \quad (25)$$

Remarque : si on pouvait admettre, en première approximation, que la chaleur perdue par "conduction" interne est dédiée entièrement à la compensation des pertes de régénération alors  $Q_{cdint} = \Delta Q_{reg}$ , on pourrait alors déduire le rendement de régénération :

$$\eta_{reg} = 1 - Q_{cdint} / Q_{reg} \quad (26)$$

Les résultats présentés sont le fruit de l'expérimentation conjuguée à la simulation, comme il a été décrit dans la méthode ci-dessus. Ils ont été obtenus d'essais réalisés "hors charge", c'est-à-dire à vitesse maximale du moteur pour un rapport des températures de réservoirs donné. Dans ces conditions particulières de fonctionnement, les chaleurs transférées sont très largement supérieures au travail indiqué obtenu, qui représente les seuls frottements mécaniques du moteur. La conductance  $K_{cdext}$  obtenue expérimentalement vaut 0.082 W/K. L'évolution des puissances  $\dot{Q}_{in}$ ,  $\dot{Q}_{cvin}$  et  $\dot{Q}_{revin}$  (et implicitement des pertes lors du transfert de chaleur) (fig. 2) et des conductances  $K_T$  et  $K_{cdint}$  (fig. 3) est tracée en coordonnées semi-logarithmiques, en fonction de la vitesse de rotation du moteur.

Les chaleurs et conductances obtenues croissent, en moyenne, avec la vitesse de rotation, dans l'intervalle choisi d'utilisation du moteur, ce qui semble infirmer la validité de l'hypothèse de conductance totale constante, souvent considérée par les modèles classiques de la thermodynamique en temps finis.

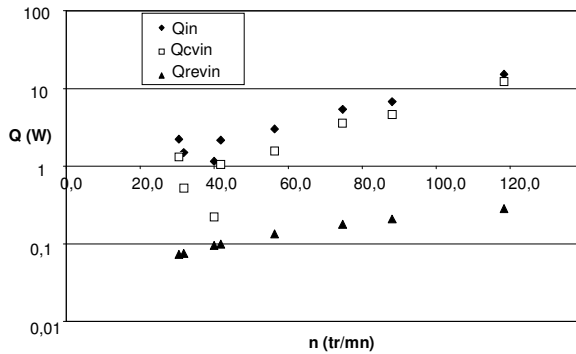


Figure 2 : Evolution des puissances délivrées côté chaud en fonction de la vitesse de rotation

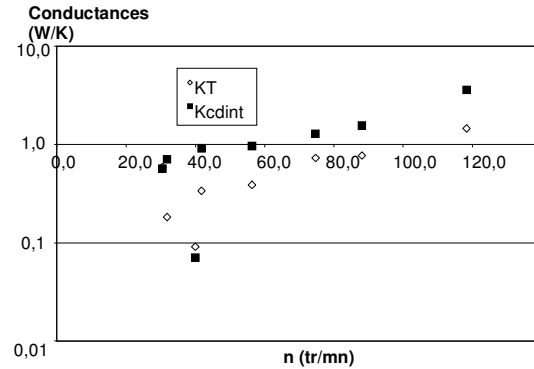


Figure 3 : Evolution des conductances en fonction de la vitesse de rotation

## 5. Conclusion

Un modèle basé sur la thermodynamique en dimensions physiques finies tenant compte des irréversibilités thermiques (conduction, convection) et mécaniques (frottements) a été présenté. Il a été appliqué avec succès à l'exploitation de résultats d'essais d'un moteur Stirling LTD. Les résultats des conductances obtenus pour des valeurs particulières de paramètres de fonctionnement du moteur (vitesse de rotation) semblent invalider des hypothèses (constance des paramètres, ici de la conductance) employées dans les modèles TTF proposés jusqu'à présent. Des essais plus complets devraient permettre de définir leur "loi" de variation.

## Bibliographie

- [1] Bejan A and Paynter H M (1976) Solved Problems in Thermodynamics, Dept. Mech. Eng., *M. I. T. Press*, Cambridge, MA, Problem VII-D.
- [2] Bejan A (1988) *Advanced engineering thermodynamics*. Wiley & Sons, New York, USA.
- [3] Feidt M (1987) *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*. Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, France.
- [4] Andresen B, Salamon P, Berry RS (1984) Thermodynamics in finite time. *Phys Today*, Sept, p.62-70.
- [5] De Vos A (1992) *Endoreversible thermodynamics of solar energy conversion*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [6] Curzon FL, Ahlborn B (1975) Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am J Phys* vol.43, p.22-24.
- [7] Grosu L, Rochelle P, Martaj N (2008) Thermodynamique à échelle finie : optimisation du cycle moteur de Stirling pour l'ingénieur, *COFRET'08*, 11 – 13 juin 2008, Nantes – France.
- [8] Petrescu S, Costea M et al (2002) Application of the Direct Method to irreversible Stirling cycles with finite speed, *International Journal of Energy Research*, vol.26, p.589-609.
- [9] Der Minassians A (2007) Stirling engine for low-temperature solar-thermal-electric power generation *University of California PhD thesis*, Berkeley.
- [10] Costea M, Petrescu S, Harman C (1999) The effect of irreversibilities on solar Stirling engine cycle performance, *Energy conversion and management*, vol.40,p.1723-1731.
- [11] Senft JR (1998) Theoretical limits of the performance of Stirling engines, *International Journal of Energy Research*, vol.22, p.991-1000.
- [12] Martaj N (2008) Modélisation énergétique et exergétique, simulation et optimisation des moteurs Stirling à faible différence des températures – Confrontations avec l'expérience, *thèse de l'Université Paris10-Nanterre*.
- [13] Grosu L, Rochelle P (2009) Application de la méthode de Schmidt avec régénération imparfaite aux 3 types de moteur Stirling-nouvelles solutions analytiques, *Congrès SFT09*.