

Équations adjointes et mesure d'erreur en thermique radiative pour un environnement diffus.

Pierre VUEGHS^{1*}

¹LTAS, Université de Liège, Belgique

Chemin des Chevreuils, B4000 Liège

* (auteur correspondant : Pierre.Vueghs@ulg.ac.be)

Résumé - En thermique spatiale, les liens radiatifs entre les surfaces qui composent le modèle géométrique tridimensionnel sont habituellement évalués par lancer de rayons. Ce processus induit dans le calcul des facteurs de vue une erreur géométrique qui peut être estimée en termes de probabilités. Dans cet article, nous introduisons la notion d'importance, duale de la radiosité, dont la distribution est gouvernée par les équations adjointes aux équations de radiosité. Nous établissons les bases d'une mesure de l'erreur énergétique, en vue d'adapter le lancer de rayons au calcul des liens énergétiques les plus importants.

Nomenclature

E_b émission propre, Wm^{-2}

F_{i-j} facteur de vue, [-]

I importance, m^2

J radiosité thermique, Wm^{-2}

N nombre total de rayons, [-]

R terme de réception, m^2

S source de radiosité, Wm^{-2}

\mathcal{T} opérateur de transport, [-]

Symboles grecs

α intervalle de confiance, [-]

ε erreur relative maximale, [-]

1. Introduction

En thermique spatiale, la composante radiative joue un rôle prépondérant dans l'équilibre énergétique final. Les surfaces mutuellement visibles échangent des flux de chaleur par rayonnement. Pour calculer les échanges énergétiques entre deux surfaces, nous utilisons la notion de facteur de vue, qui permet d'obtenir la distribution de radiosité à travers le modèle géométrique. Le calcul des facteurs de vue se fait habituellement par une méthode de lancer de rayons de type Monte Carlo. L'erreur associée au lancer de rayons peut être facilement évaluée. Il s'agit d'une erreur purement géométrique qui caractérise les facteurs de vue. Sur base de la mesure de cette erreur, un contrôle statistique de précision permet d'adapter le nombre de rayons en fonction de la configuration, de manière à garantir une précision requise par l'utilisateur. L'inconvénient d'une telle mesure est qu'elle ne tient aucun compte de la distribution énergétique à travers le modèle. Un lien radiatif entre deux surfaces de températures voisines va être calculé avec une précision inutile, alors que ce lien n'a pas une influence importante sur la distribution finale de températures. D'autres liens, qui ont un fort impact sur l'équilibre thermique, vont être calculés avec une précision insuffisante. L'intérêt d'une mesure énergétique, basée sur la mesure géométrique, apparaît clairement.

Dans cet article, nous présentons une application de l'équation d'importance, qui est une équation adjointe de l'équation de radiosité, dans le cas de surfaces isothermes et diffuses. Les équations peuvent être utilisées après la résolution du problème thermique, dans une étape de post-traitement, pour établir la précision de chaque lien radiatif, entre les surfaces qui composent le modèle géométrique.

2. Facteurs de vue et lancer de rayons

En thermique radiative, les échanges d'énergie entre deux carreaux dépendent de la configuration de ces surfaces (leurs tailles, leurs orientations relatives et la distance qui les sépare). Cette dépendance géométrique s'exprime par le facteur de vue. Par définition, le facteur de vue entre deux carreaux P_i de surface A_i et P_j de surface A_j est la fraction d'énergie émise de manière diffuse par P_i qui atteint directement P_j [3].

$$F_{i-j} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi s_{ij}^2} dA_j dA_i \quad (1)$$

Le calcul de cette expression devient complexe lorsque des obstacles sont présents dans le modèle. Des méthodes discrètes doivent être utilisées. Parmi ces méthodes, une des plus courantes est le lancer de rayons aléatoire. Un grand nombre N_i de rayons sont générés depuis le carreau initial. Chaque rayon transporte une fraction de l'énergie totale. La surface émettrice est supposée diffuse.

L'avantage du lancer de rayons aléatoire est la définition d'une mesure de l'erreur relative maximale ε , atteinte pour un pourcentage de réalisations de l'événement statistique α (appelé intervalle de confiance), en fonction du nombre d'échantillons (nombre de rayons lancés). Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé la méthode de l'hémisphère stratifié [4] pour générer les rayons. Cette méthode est caractérisée par une convergence supérieure à celle des méthodes aléatoires classiques. Pour un nombre fixé N de rayons, pour un intervalle de confiance α donné, l'erreur relative maximale observée est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2d} \operatorname{erf}^{-1}(\alpha)}{F_{i-j} N^{3/4}} \quad (2)$$

où d est une constante liée à la géométrie considérée, calculée durant une étape de prétraitement ; $\operatorname{erf}^{-1}(\alpha)$ est l'inverse de la fonction d'erreur.

3. Équations adjointes

3.1. Définition de l'importance

En rendu réaliste [1], on peut distinguer deux grandes familles d'algorithmes. La première famille considère la propagation de la lumière depuis les sources à travers le modèle ; on parle d'*algorithmes de radiosité*. Une seconde famille d'algorithmes ne considère que la lumière qui atteint l'observateur (œil, caméra...) ; parmi ces algorithmes, on retrouve le lancer de rayons classique. Ces deux familles de méthodes peuvent être considérées comme duales l'une de l'autre. Si la première famille est basée sur la résolution de l'équation de transport, la seconde famille est basée sur le système d'équations adjoint à l'équation de transport initiale.

Si l'équation de transport initiale décrit la distribution de radiosité, les équations adjointes décrivent la distribution d'importance, quantité duale de la radiosité. Considérons un environnement où toutes les lampes sont éteintes [6]. On émet de la lumière depuis les surfaces « importantes », visibles depuis l'observateur. Cette lumière est propagée dans le modèle et subit plusieurs multi-réflexions avant d'être absorbée. La contribution de chaque surface à l'image finale est proportionnelle à la lumière reçue. L'intérêt de l'importance en rendu réaliste est de permettre de concentrer l'effort de calcul sur les surfaces qui contribuent le plus à l'image. L'importance est propagée dans le modèle comme de la lumière mais à

contre-sens, dans la direction opposée. On peut montrer que la distribution d'importance à travers le modèle est gouvernée par l'équation suivante [2] :

$$I_i = R_i + \sum_{j=1}^N \rho_j F_{j-i} I_j \quad (3)$$

où I_i représente l'importance du carreau P_i , R_i est le terme de réception, dual du terme source S_i . R_i correspond à l'émission initiale d'importance. En transfert radiatif, si l'on considère des surfaces diffuses et isothermes, le terme de réception R_i correspond à l'aire A_i .

3.2. Équation de radiosité

D'après [3], l'équilibre radiatif d'un modèle thermique est décrit par l'équation

$$\frac{q_i}{\varepsilon_i} = E_{b,i} - \sum_{j=1}^N F_{i-j} J_j - H_{0,i} \quad (4)$$

où $H_{0,i}$ correspond à l'irradiation extérieure. Le flux radiatif q_i , l'émission propre $E_{b,i}$ et la radiosité J_i d'un carreau P_i sont liés par l'expression

$$\frac{q_i}{\varepsilon_i} = \frac{1}{1 - \varepsilon_i} (E_{b,i} - J_i) \quad (5)$$

Pour chaque carreau P_i , deux expressions de l'équation de radiosité peuvent être obtenues en fonction de la nature de la condition limite associée. Supposons que les températures des n premiers carreaux sont connues tandis que les flux des $N-n$ autres carreaux sont fixés. Nous obtenons l'équation de radiosité thermique suivante.

$$\begin{cases} J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + \rho_i H_{0,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N F_{i-j} J_j & \forall i \in [1, n] \\ J_i = q_i + H_{0,i} + \sum_{j=1}^N F_{i-j} J_j & \forall i \in [n+1, N] \end{cases} \quad (6)$$

3.3. Opérateur de transport

Sur base de l'équation de radiosité, nous définissons l'opérateur \mathcal{J} comme l'approximation discrète de l'opérateur de transport. C'est une matrice de nombres réels, ce qui implique que $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^T$.

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{1-1} & \cdots & -\rho_1 F_{1-n} & -\rho_1 F_{1-n+1} & \cdots & -\rho_1 F_{1-N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n-1} & \cdots & 1 - \rho_n F_{n-n} & -\rho_n F_{n-n+1} & \cdots & -\rho_n F_{n-N} \\ -F_{n+1-1} & \cdots & -F_{n+1-n} & 1 - F_{n+1-n+1} & \cdots & -F_{n+1-N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_{N-1} & \cdots & -F_{N-n} & -F_{N-n+1} & \cdots & 1 - F_{N-N} \end{bmatrix} \quad (7)$$

La définition de l'importance (3), introduite en rendu réaliste, doit être modifiée pour être utilisée en thermique radiative. L'importance devient une quantité mathématique, duale de la radiosité, contrôlée par l'ensemble d'équations adjointes basées sur l'opérateur de transport \mathcal{J} . Pour conserver la définition d'imagerie, nous devons définir un jeu de propriétés thermo-optiques alternatif ρ' ; si nous considérons un modèle fictif, où les carreaux à flux fixé sont

caractérisés par une réflectance ρ_i' de 100%, la définition d'imagerie reste correcte. L'opérateur de transport est donné par la relation suivante.

$$\mathcal{F} = I - \rho'F \quad (8)$$

où I est la matrice identité ; F la matrice des facteurs de vue. Les équations d'importance (3) et de radiosité (6) peuvent être réécrites comme suit, sous forme d'un système adjoint :

$$\begin{cases} \mathcal{F}J &= S \\ \mathcal{F}^T I &= R \end{cases} \quad (9)$$

3.4. Énergie radiative

La fonction $v(J)$ [2] est définie comme le produit scalaire du vecteur de radiosité J et du vecteur récepteur R . C'est également le produit scalaire du vecteur d'importance I et du vecteur source S , illustrant la dualité de la radiosité et de l'importance.

$$v(J) = R^T J = I^T S \quad (10)$$

En transfert radiatif, le vecteur récepteur est équivalent au vecteur des aires A_i :

$$v(J) = \sum_{i=1}^N A_i J_i \quad (11)$$

Chaque terme $A_i J_i$ représente l'énergie émise par P_i de manière diffuse, par émission propre et réflexion du rayonnement incident. $v(J)$ est l'énergie radiative, émise de manière diffuse par toutes les surfaces du modèle tridimensionnel.

3.5. Mesure de l'erreur

Le modèle géométrique est discrétisé en carreaux P_i de surface finie. Les facteurs de vue sont calculés par la méthode de l'hémisphère stratifié ; une mesure de l'erreur, donnée par l'équation (2), peut être calculée pour chaque facteur de vue. Sur base de cette erreur géométrique, une erreur énergétique est établie. Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'approximation de l'opérateur de transport \mathcal{F} [2], obtenue par lancer de rayons :

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + \Delta\mathcal{F} \quad (12)$$

Nous supposons que l'erreur est induite par les facteurs de vue. Chaque terme de l'opérateur de transport est associé à une erreur $\rho_i' \Delta F_{i-j}$. Les radiosités, calculées par la résolution du problème thermique, sont également approchées :

$$\tilde{J} = J + \Delta J \quad (13)$$

Si l'on suppose que le terme source S est exact, nous avons la relation suivante entre les grandeurs approchées :

$$\tilde{\mathcal{F}} \tilde{J} = S \quad (14)$$

En combinant les équations (12) et (14), nous obtenons la relation (15), où l'opérateur est l'opérateur de transport exact et où le terme source est perturbé par une quantité $\Delta\mathcal{F} \tilde{J}$:

$$\mathcal{F} \tilde{J} = S - \Delta\mathcal{F} \tilde{J} \quad (15)$$

Finalement, l'erreur énergétique est définie grâce à l'énergie radiative $v(J)$:

$$v(J - \tilde{J}) = R^T (J - \tilde{J}) = I^T \Delta \mathcal{F} \tilde{J} \quad (16)$$

La grandeur $I^T \Delta \mathcal{F} \tilde{J}$ est l'erreur introduite dans l'énergie radiative $v(J)$ par l'approximation de l'opérateur de transport et des radiosités thermiques. L'importance ne peut pas être calculée de manière exacte : nous utilisons donc $\tilde{I}^T \Delta \mathcal{F} \tilde{J}$ comme approximation de $I^T \Delta \mathcal{F} \tilde{J}$. Cette grandeur est constituée d'une double somme sur les surfaces qui composent le modèle. Le terme $\tilde{I}_i \Delta \mathcal{F}_{i-j} \tilde{J}_j = -\rho_i \tilde{I}_i \Delta F_{i-j} \tilde{J}_j$ correspond à l'erreur énergétique depuis la surface j vers la surface i . Cette expression nous permet d'établir une mesure de l'erreur énergétique induite par l'approximation de l'opérateur de transport.

4. Application

Le cas test choisi est celui que nous avons présenté dans la référence [7]. Il s'agit du quart de l'intérieur d'un satellite, modélisé par 12 primitives géométriques, représentant un réservoir, un cylindre et deux panneaux de renforts, et un boîtier électronique. Le modèle est maillé en 1100 nœuds et 1800 triangles. La base du satellite est fixée à 20°C, le réservoir est maintenu à 30°C. Les autres composants sont supposés adiabatiques. L'émissivité du réservoir vaut 0.5 tandis que les autres surfaces ont une émissivité de 0.95.

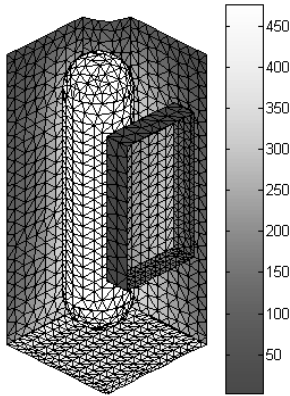


Figure 1: *Distribution de radiosité thermique.*

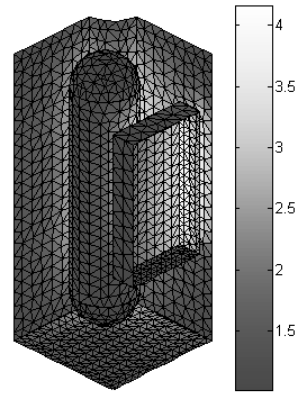


Figure 2: *Evolution de l'importance par unité de surface.*

4.1. Distribution de radiosité et d'importance

L'utilisation des équations adjointes a été présentée comme un post-traitement. Elle est basée sur un calcul préalable des températures et des flux thermiques. Une comparaison de ces résultats avec les logiciels Esarad-Esatan® est fournie dans la référence [7]. Températures et flux thermiques sont combinés de manière à calculer la distribution de radiosité thermique à travers le modèle géométrique, affichée à la figure 1. En thermique radiative, l'importance initiale d'un carreau est égale à sa surface. L'importance associée à un carreau est donc fonction de la surface et peut varier grandement en fonction de la discrétisation. Nous présentons donc à la figure 2 l'évolution de l'importance surfacique, qui apparaît ainsi plus continue. Étant donnée la définition de l'importance, l'importance surfacique est toujours supérieure ou égale à l'unité.

4.2. Énergie radiative et erreur énergétique

Sur base de la distribution de radiosité, l'énergie radiative est calculée au moyen de la relation (8), égale à 288,872W. La relation (2) est utilisée pour calculer l'erreur associée à chaque facteur de vue, pour un nombre fixe de rayons par surface (10 000) et un intervalle de

confiance de 99%. Nous utilisons ensuite la relation (16) pour calculer l'énergie radiative associée à chaque lien. Pour simplifier le traitement des résultats, les facteurs de vue et les erreurs ont été groupées, de sous-système à sous-système. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 1.

	Base	Cylindre	Supports	Réservoir	Boîte électronique
Base	0.0000	$1.2955 \cdot 10^{-6}$	$7.6923 \cdot 10^{-6}$	$8.0509 \cdot 10^{-6}$	$3.4152 \cdot 10^{-6}$
Cylindre	$1.5905 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$2.1802 \cdot 10^{-4}$	$5.8724 \cdot 10^{-4}$	$3.9698 \cdot 10^{-5}$
Supports	$1.9980 \cdot 10^{-4}$	$1.2347 \cdot 10^{-4}$	$9.0150 \cdot 10^{-6}$	$2.0997 \cdot 10^{-4}$	$1.2883 \cdot 10^{-4}$
Réservoir	$1.0587 \cdot 10^{-3}$	$4.9182 \cdot 10^{-4}$	$9.4503 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$2.6656 \cdot 10^{-4}$
Boîte électronique	$8.1720 \cdot 10^{-5}$	$1.1415 \cdot 10^{-5}$	$1.2783 \cdot 10^{-4}$	$1.7733 \cdot 10^{-4}$	0.0000

Tableau 1 : Erreur relative de l'énergie radiative, cumulée, d'un sous-système à l'autre.

Un lien non-nul existe entre les supports, puisque la surface combinée n'est pas convexe. L'énergie du réservoir vers les autres surfaces est la plus imprécise. Ceci est dû à la courbure de la surface [5] et sa radiosité plus élevée. Le réservoir pourrait ainsi nécessiter un lancer de rayons supplémentaire pour atteindre une meilleure précision.

5. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté les bases d'une méthode permettant de calculer l'erreur radiative associée au lancer de rayons, lors du calcul des liens radiatifs. Cette méthode permet d'identifier les liens les moins précis, qui peuvent nécessiter un lancer de rayons supplémentaire. Un développement de cette méthode permettrait de calculer automatiquement le nombre de rayons qui doivent être lancés pour fournir des résultats d'une précision minimale, définie par l'utilisateur. Ce développement fournirait un outil précieux pour le thermicien, qui se base sur sa seule expérience aujourd'hui pour adapter le lancer de rayons.

Références

- [1] Christensen P. H., Adjoint and Importance in Rendering: An Overview, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 9 (3) (2003), 329-340.
- [2] Smits B. E., Arvo J. R., Salesin D. H., An Importance-Driven Radiosity Algorithm, *Computer Graphics (ACM SIGGRAPH 92 Proceedings)* 26 (4) (1992), 273-282.
- [3] Modest M. F., *Radiative Heat Transfer*, second edition, Academic Press, 2003.
- [4] P. Vueghs, H.-P. De Koning, O. Pin, P. Beckers, Random Hemisphere Method for Radiation Ray Tracing Computations, *5th European Thermal-Sciences Conference* (Eindhoven, mai 2008).
- [5] P. Planas, Statistical Error Control for Radiative Software Based on Monte Carlo Methods, *Proceedings of the 23rd ICES Conference, SAE Technical Paper 932258*.
- [6] Pattanaik S. N., Mudur S. P., Adjoint Equations and Random Walks for Illumination Computation, *ACM Transactions on Graphics* 14 (1) (1995), 77-102.
- [7] P. Vueghs, H.-P. De Koning, O. Pin, P. Beckers, Utilisation de la géométrie dans le calcul éléments finis thermique radiatif utilisant le lancer de rayons, *SFT 2008* (Toulouse, juin 2008).

Remerciements

Nos remerciements vont au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique (FNRS) qui subventionne ce projet. Nous remercions également l'Agence Spatiale Européenne pour son soutien à ce projet (contrat 20180/06/NL/PA).