

Etude de l'écoulement en mode de convection forcée d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite maintenue à température pariétale uniforme.

Abdelkader BOUTRA, Nabila LABSI*, Youb Khaled BENKAHLA

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés
 Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene USTHB
 B.P. 32, El-Alia Bab-Ezzouar, 16111 Alger, Algérie.
 *(auteur correspondant : nabilalabsi@yahoo.fr)

Résumé - La présente étude numérique traite de l'effet de quelques paramètres, à savoir : le nombre de Reynolds et le nombre de Herschel-Bulkley, sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide viscoplastique incompressible. L'écoulement, en mode de convection forcé et en l'absence de la dissipation visqueuse, a lieu dans une conduite horizontale à section droite circulaire maintenue à température pariétale constante et uniforme. Le fluide en question obéit au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley.

Nomenclature

C_p	chaleur spécifique à pression constante, $J kg^{-1} K^{-1}$	r_w	rayon de la conduite, m
D	diamètre de la conduite, m	R	coordonnée radiale réduite, $= r/D$
Gz^{-1}	inverse du nombre de Graetz, $= x/D Re Pr$	Re	nombre de Reynolds, $= \rho V_0^{2-n} D^n / K$
HB	nombre adimensionnel de Herschel-Bulkley, $= \tau_0 D^n / \mu_0 V_0^n$	T	température, K
k	conductivité thermique, $W m^{-2} K^{-1}$	T_0	température d'entrée, K
K	consistance du fluide, $kg m^{-1} s^{-1}$	T_w	température à la paroi, K
L	longueur de la conduite, m	U	vitesse axiale réduite, $= V_x/V_0$
m	paramètre de croissance exponentielle, s	V	vitesse radiale réduite, $= V_r/V_0$
M	paramètre réduit de croissance exponentielle, $= m V_0 / D$	V_0	vitesse moyenne, m/s
n	indice d'écoulement du fluide	x	coordonnée axiale, m
Nu	nombre adimensionnel de Nusselt, $= (-1/\phi_m)(\partial\phi/\partial R) _{R=0.5}$	X	coordonnée axiale réduite, $= x/D$
p^*	pression, Pa	<i>Symboles grecs</i>	
P^*	pression réduite, $= p^*/\rho V_0^2$	$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement réduit
Pr	nombre de Prandtl, $= K C_p V_0^{n-1} / k D^{n-1}$	η	viscosité effective, $kg m^{-1} s^{-1}$
R	coordonnée radiale, m	η_{eff}	viscosité effective réduite, $= \eta/K$
		ρ	masse volumique, $kg m^{-3}$
		τ	contrainte de cisaillement, Pa
		τ_0	contrainte seuil de cisaillement, Pa
		ϕ	température réduite, $= (T - T_w)/(T_0 - T_w)$
		ϕ_m	Température moyenne réduite, $= (T_m - T_w)/(T_0 - T_w)$

1. Introduction

Les fluides viscoplastiques, ou fluides à seuil, sont une catégorie de fluides non newtoniens très répandus dans les applications industrielles agroalimentaires, pharmaceutiques, pétrolières et autres. Ils sont caractérisés par une contrainte seuil à partir de laquelle le fluide commence à s'écouler. Le transfert thermique est d'une importance pratique dans beaucoup de ces applications. Par conséquent, les études dans cet axe n'ont pas omis de traiter la convection thermique lors de l'écoulement de ces fluides. Parmi les travaux entrepris dans ce

sens, l'étude de Soares et al. [1] qui ont analysé, par le biais d'une méthode numérique, le transfert de chaleur dans la région d'entrée d'un écoulement axial laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley en tenant compte de la diffusion axiale. Deux conditions aux limites thermiques à la paroi interne ont été considérées à savoir : flux de chaleur pariétal et température pariétale uniformes, en considérant la paroi externe adiabatique. Récemment, Nouar [2] a étudié le transfert de chaleur en mode de convection libre et forcée du fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite horizontale chauffée uniformément par un flux de chaleur constant. La conduction axiale ainsi que la dissipation visqueuse ont été négligées. L'objectif de leur étude était de quantifier l'effet de la thermodépendance de la consistance du fluide ainsi que de sa densité sur l'ampleur des écoulements secondaires. Des corrélations utiles pour le nombre de Nusselt local ainsi que pour la contrainte de cisaillement à la paroi ont été données. Ces résultats pourraient être également utilisés pour les fluides de Bingham et les fluides d'Ostwald-De Weale.

La présente étude repose sur l'analyse de l'influence du nombre de Reynolds et de la contrainte seuil caractérisée par le nombre de Herschel-Bulkley, sur le transfert thermique lors de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite cylindrique maintenue à une température pariétale constante et uniforme. Cette conduite de section droite circulaire, est le siège d'un transfert de chaleur en mode de convection forcée.

2. Equations générales de conservation

Considérons l'écoulement laminaire stationnaire d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley, à l'intérieur d'une conduite cylindrique de longueur L et de rayon r_w maintenue à une température pariétale uniforme T_w . Cette conduite est le siège d'un transfert thermique en mode de convection forcée. Nous supposons aussi que le fluide est incompressible et de propriétés physiques et rhéologiques constantes. La dissipation visqueuse ne sera pas prise en compte. Les équations générales qui régissent l'écoulement sont les suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

Equations de l'impulsion :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RVV)}{\partial R} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\eta_{eff} R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\eta_{eff} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{Re} \left[\frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) - \eta_{eff} \frac{V}{R^2} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{eff}) \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RVU)}{\partial R} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\eta_{eff} R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial X} \left(\eta_{eff} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\eta_{eff}) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{eff}) \frac{\partial U}{\partial X} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV\phi)}{\partial R} + \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} = \frac{1}{Pr Re} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] \quad (4)$$

Le fluide non newtonien de Herschel-Bulkley est un modèle général décrit par la loi rhéologique suivante :

$$\begin{cases} \tau = K \dot{\gamma}^n + \tau_0 & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (5)$$

Cette loi générale décrit aussi bien le modèle du fluide de Bingham ($\tau_0 \neq 0$ et $n = 1$) que celui d'Ostwald-De Waele ($\tau_0 = 0$) en passant par le modèle classique du fluide newtonien ($\tau_0 = 0$ et $n = 1$).

L'équation (6) présente néanmoins une discontinuité. Aussi, dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faible vitesse de cisaillement, la loi constitutive proposée par Papanastasiou décrivant le comportement de ce fluide, est utilisée dans la présente étude [3,4] :

$$\eta_{eff} = \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{HB}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-M \dot{\gamma})] \quad (6)$$

M étant un paramètre adimensionnel qui représente la croissance de l'exponentielle ($M = mV_0/D$). Les auteurs [3,4,5] conseillent de prendre $m = 1000$ s.

Pour pouvoir résoudre les équations (1-4), des conditions aux limites sont prises en considération. Il s'agit d'adopter un profil uniforme de vitesse et de température à l'entrée de la conduite ($U = \phi = 1$ et $V = 0$), d'appliquer les conditions d'adhérence et de température pariétale constante le long de la conduite ($U = V = \phi = 0$) et enfin de considérer sur l'axe de symétrie ($\theta = 0$) que : $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$.

La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de conservation citées précédemment, en tenant compte de la loi rhéologique (6), est celle des volumes finis proposée par Patankar [6]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques qui sont résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER.

3. Résultats et discussion

3.1. Validation du code de calcul

Pour valider notre code de calcul, nous avons au préalable comparé nos résultats avec ceux de la littérature. Nous avons considéré à cet effet, l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour un fluide ostwaldien dilatant ($\tau_0 = 0$ et $n > 1$) et un fluide de Bingham ($\tau_0 \neq 0$ et $n = 1$), s'écoulant en mode de convection forcée, dans une conduite maintenue à une température pariétale constante et uniforme.

Concernant le cas du fluide ostwaldien dilatant, nous avons comparé nos résultats avec ceux de Barkhordari et Etemad [7] pour un fluide ostwaldien d'indice d'écoulement $n = 1,25$. Cette comparaison, illustrée sur la figure 1, s'avère satisfaisante puisque l'écart relatif entre les deux études ne dépasse pas 2,1%.

Pour le cas du fluide de Bingham, nous remarquons sur la figure 2, que nos résultats concordent parfaitement avec ceux de l'étude numérique de Min et al. [5]. L'écart relatif obtenu pour ce cas est de 3%.

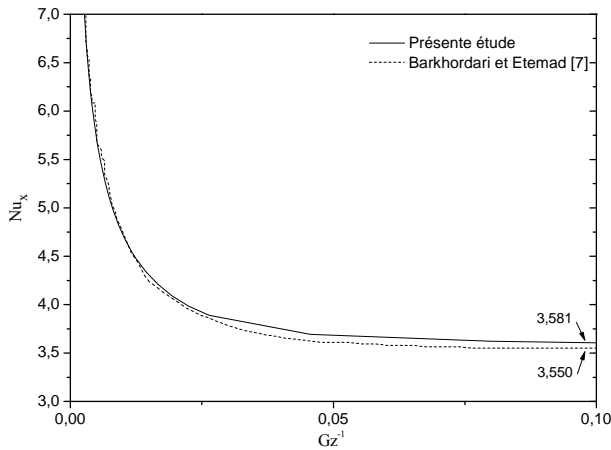


Figure 1 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour un fluide ostwaldien dilatant ($n = 1,25$).
 $Re = 100$; $Pr = 5$; $HB = 0$.

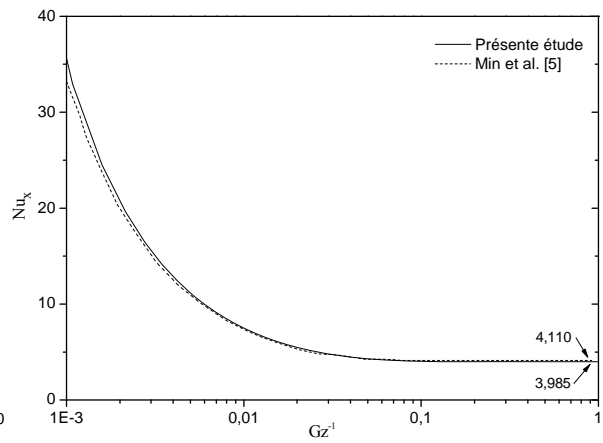


Figure 2 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour le cas d'un fluide de Bingham ($n = 1$). $Re = 25$; $Pr = 1$; $HB = 1,99$.

3.2. Effet du nombre de Reynolds

Les figures 3(a), 3(b) et 3(c) présentent l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour les indices d'écoulement : $n = 1$; $0,5$ et $1,5$ respectivement.

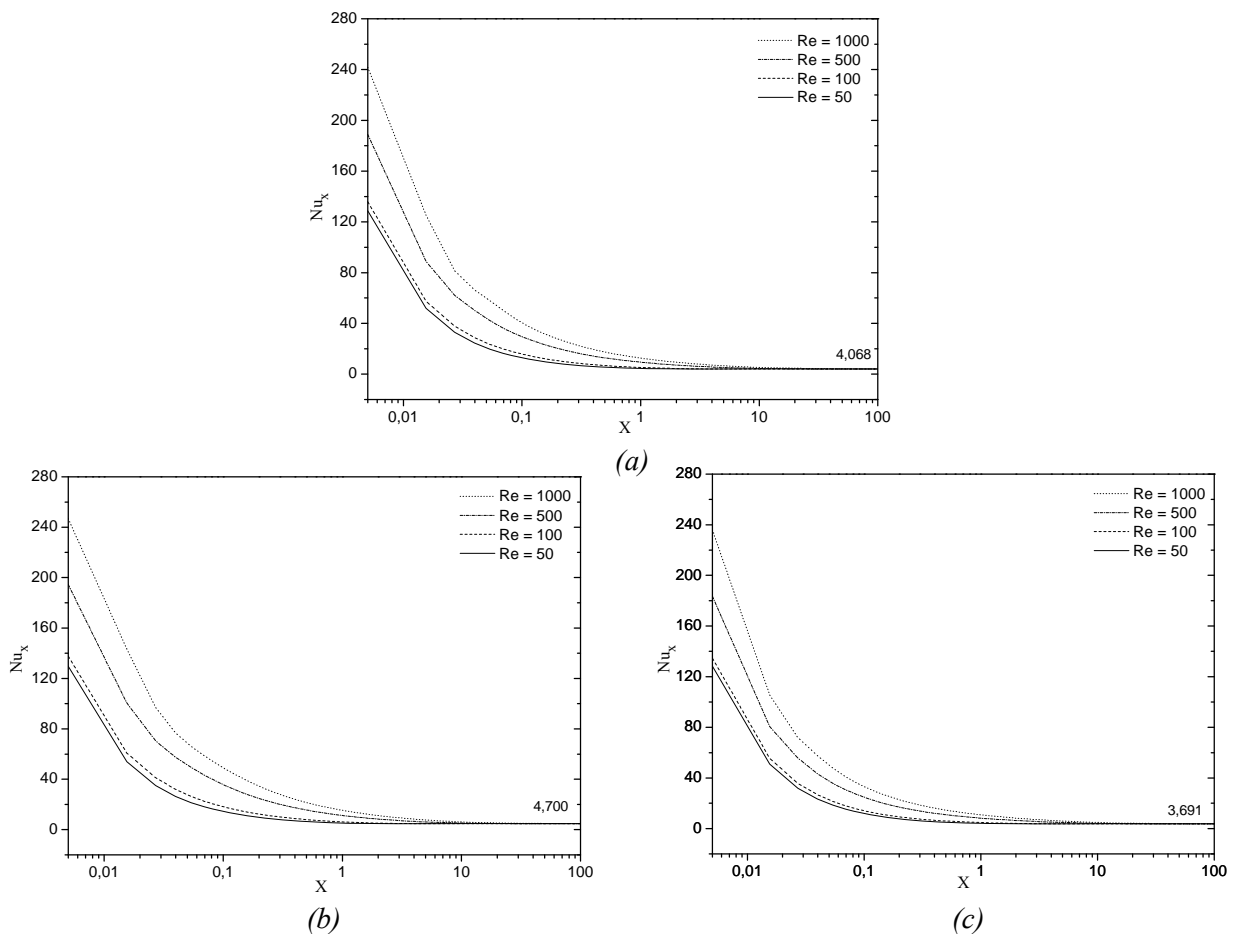


Figure 3 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.
 $Pr = 1$, $HB = 5$. (a) $n = 1$ (b) $n = 0,5$ (c) $n = 1,5$.

Toutes les courbes présentent une diminution aigue localisée au niveau de la zone d'entrée, caractérisée par un fort gradient de température. Puis, une évolution vers une valeur limite qui traduit l'établissement du régime thermique.

Quelque soit la valeur de l'indice d'écoulement n , le nombre de Reynolds n 'a d'influence sur le transfert thermique, que dans la zone d'entrée de la conduite où l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une intensification de l'échange thermique. Loin en aval, les courbes tendent vers des valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt indépendantes du nombre de Reynolds, données dans le tableau ci-dessous, pour $HB = 5$ et $Pr = 1$:

Indice d'écoulement, n	0,5	1	1,5
$Nu_{asym.}$	4,700	4,068	3,691

Tableau 1 : Valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt pour différents indices d'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley. $HB = 5$ et $Pr = 1$

3.3. Effet du nombre de Herschel-Bulkley

L'analyse de l'effet du nombre de Herschel-Bulkley sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt est illustrée sur les figures 4(a), 4(b) et 4(c) pour respectivement, $n = 1$, $n = 0,5$ et $n = 1,5$.

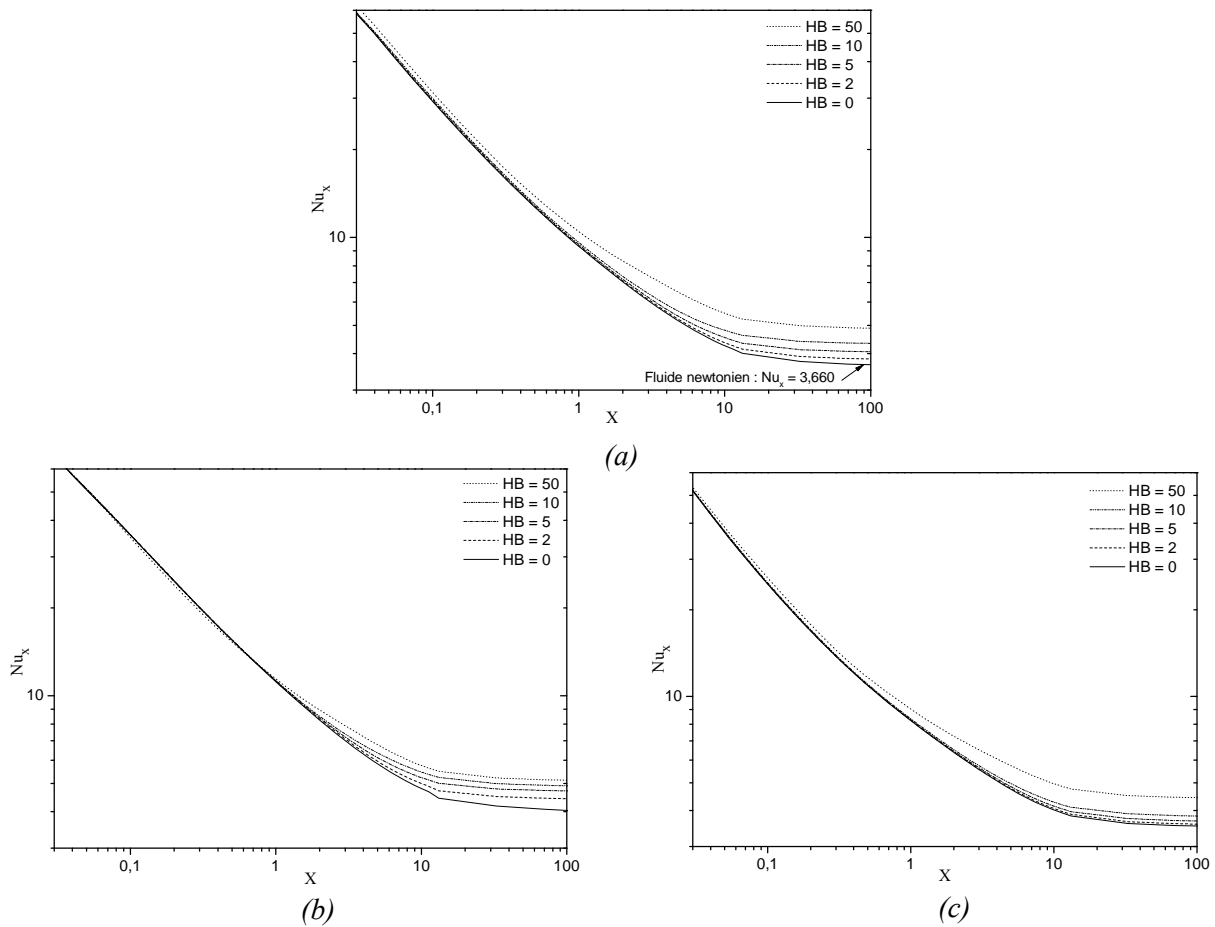


Figure 4 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley. $Re = 500$, $Pr = 1$. (a) $n = 1$ (b) $n = 0,5$ (c) $n = 1,5$.

Les figures montrent que l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley entraîne une très légère amélioration du transfert thermique dans la zone d'entrée de la conduite, qui s'intensifie cependant loin en aval de l'entrée.

Il est à rappeler que le nombre de Herschel-Bulkley est un nombre adimensionnel qui représente la contrainte seuil du fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley. C'est aussi une généralisation du nombre adimensionnel de Bingham. En effet, des résultats similaires ont été obtenus dans une étude antérieure portant sur l'influence de la variation de la contrainte seuil sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement du fluide de Bingham [8].

4. Conclusion

L'analyse numérique de l'effet des nombres adimensionnels de Reynolds et de Herschel-Bulkley sur le transfert thermique, lors de l'écoulement laminaire d'un fluide viscoplastique incompressible obéissant au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley, a permis d'affirmer que l'augmentation de ces nombres entraînait un accroissement appréciable du nombre de Nusselt et par conséquent, une amélioration considérable du transfert thermique.

Pour l'influence du nombre de Reynolds, cette amélioration est observée dans la zone d'entrée de la conduite. Par contre, pour le nombre de Herschel-Bulkley, l'effet n'est ressenti qu'en aval de la conduite.

Il est intéressant de noter que les valeurs du nombre de Nusselt relatives au fluide viscoplastique rhéofluidifiant ($\tau_0 \neq 0$, $n < 1$) sont supérieures à celles des autres fluides (fluide de Bingham ($\tau_0 = 0$, $n = 1$) et fluide viscoplastique dilatant ($\tau_0 \neq 0$, $n > 1$)). En effet, dans la zone d'établissement thermique et pour un nombre de Herschel-Bulkley égal à 5 à titre d'exemple, nous obtenons, pour $n = 0,5$, une valeur du nombre de Nusselt supérieure de 15% par rapport au cas d'un fluide de Bingham. En revanche, pour un fluide viscoplastique dilatant ($n = 1,5$), la valeur du nombre de Nusselt est de 10% inférieure à celle correspondant au fluide de Bingham.

Références

- [1] M. Soares, M. F. Naccache, P. R. Souza Mendes, Heat transfer to viscoplastic materials flowing laminarly in the entrance region of tubes, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20 (1999), 60-67.
- [2] C. Nouar, Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 5520-5535.
- [3] E. Mitsoulis, On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects, *Chem. Eng. Sci.*, 59 (2004), 789-800.
- [4] E. Mitsoulis, S. Galazoulas, Simulation of viscoplastic flow past cylinders in tubes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, in press (2008) doi:10.1016/j.jnnfm.2008.10.006.
- [5] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [6] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, (1980), *McGraw*. New York.
- [7] M. Barkhordari, S. Gh. Etemad, Numerical study of slip flow heat transfer of non-Newtonian fluids in circular microchannels, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 28 (2007), 1027-1033.
- [8] A. Boutra, N. Labsi, Y. K. Benkahla, Etude thermique de l'écoulement en convection forcée d'un fluide viscoplastique dans une conduite maintenue à température uniforme : influence de la dissipation visqueuse, *Actes du congrès de la SFT (Toulouse-France, 3-6 juin 2008)*, 103-108.