



de barre infinie est utilisé, permettant de différer la prise en compte de l'intervention des pertes conductives par les mors, difficilement modélisables et sources d'incertitudes. Ce modèle utilise une transformation intégrale de Fourier le long de l'éprouvette. Les sources sont d'abord supposées uniformes et constantes, et les transformées de Fourier discrètes sont calculées sous Matlab™. La résolution explicite de l'équation de la chaleur par transformée intégrale représente une alternative à la méthode nodale fréquemment utilisée pour le calcul des sources thermo-mécaniques [2,3].

## 2. Modèle thermique

### 2.1. Ailette infinie unidimensionnelle

On considère le problème comme celui d'une barre infinie, de section  $S=b \times c$  et de périmètre  $p=2(b+c)$ , soumise sur une longueur  $L$  à une source volumique de chaleur  $q$ .

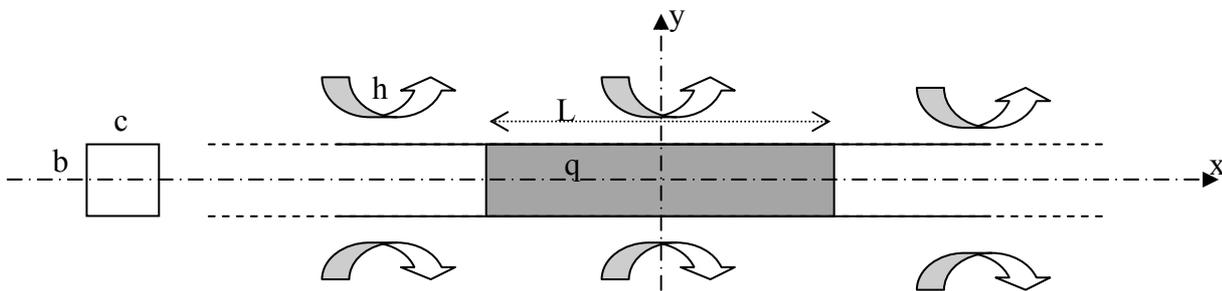


Figure 1 : Modèle de barre infinie

Hypothèses :

- On suppose la source de chaleur uniforme selon  $y$  et  $z$  soit  $q = q(x, t)$ .
- Le coefficient d'échange radio-convectif  $h$  est considéré uniforme tout au long de la barre.
- Le volume  $V$  engendré par  $S \cdot \delta x$  est considéré isotherme,  $\delta x$  représentant un incrément infinitésimal de longueur.

Soit le flux des pertes par convection et par rayonnement défini comme suit :

$$\varphi_{cv} = h_{cv}(T - T_f) + h_{rad}(T - T_{amb}) = h(T - T_f) \quad (1)$$

Où  $T_f$  représente la température du milieu environnant.

On définit la puissance  $P_e$  équivalente aux pertes latérales par convection et rayonnement :

$$P_e = -\varphi_{cv} \cdot S_{env} = -2h(T - T_f)(b + c)\delta x \quad (2)$$

où  $S_{env}$  représente la surface de l'enveloppe de la barre, et  $q_e$  la puissance volumique correspondante :

$$q_e = \frac{-2h(T - T_f)(b + c)\delta x}{S \cdot \delta x} \quad (3)$$

On choisit l'origine des températures de telle manière que :  $T_{amb} = T_f = 0$  , où  $T_{amb}$  représente la température ambiante. L'équation de la chaleur unidimensionnelle aux pertes intégrées dans le cas d'une ailette infinie s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q(x,t)}{k} + q_e \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q(x,t)}{k} + \frac{hTp}{kS} \quad (5)$$

Dans le cas d'une ailette classique [4], on définit le coefficient  $m$  tel que :  $m^2 = \frac{hp}{kS}$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - m^2 T = -\frac{q(x,t)}{k} \quad (6)$$

## 2.2. Résolution

On choisit de résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace de Fourier. Soit  $\bar{T}(u,t)$  la transformée de Fourier de  $T(x,t)$  :

$$\bar{T}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t) e^{-2j\pi ux} dx \quad (7)$$

Dans l'espace de la transformée l'équation de la chaleur devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} e^{-2j\pi ux} dx - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}(u,t)}{\partial t} - m^2 \bar{T}(u,t) = -\frac{1}{k} \bar{q}(u,t) \quad (8)$$

et peut s'écrire :

$$a(4\pi^2 u^2 + m^2) \bar{T}(u,t) + \frac{\partial \bar{T}(u,t)}{\partial t} = A(u,t) \quad (9)$$

où  $A(u,t)$  représente le terme des inhomogénéités, volumiques et aux frontières [4].

Ainsi la solution de l'équation de la chaleur s'exprime comme suit :

$$\bar{T}(u,t) = e^{-a(4\pi^2 u^2 + m^2)t} \left( \int_0^t A(u,\tau) e^{a(4\pi^2 u^2 + m^2)\tau} d\tau + \bar{I}(u) \right) \quad (10)$$

où  $\bar{I}(u) = \bar{T}(u,0)$  est la transformée de la condition initiale  $T(x,0)$ . Idéalement,  $T(x,0) = T_{amb} = 0$  ; d'où  $\bar{I}(u) = 0$ . Dans le cas d'une barre infinie soumise à une source de chaleur d'intensité  $q$  :

$$A(u,t) = \frac{a}{k} \bar{q}(u,t) = \frac{a}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x,t) e^{-j2\pi ux} dx \quad (11)$$

Alors

$$\bar{T}(u,t) = \frac{a}{k} e^{-a(4\pi^2 u^2 + m^2)at} \int_0^t \bar{q}(u,\tau) e^{a(4\pi^2 u^2 + m^2)a\tau} d\tau \quad (12)$$

## 2.3. Source constante et uniforme de longueur L

Dans le cadre des essais de fatigue, on considère, en première approximation, que la source est uniforme sur la longueur utile de l'éprouvette et a une intensité  $q_0$  constante au cours d'un palier de chargement mécanique.

En considérant que la source de chaleur est uniforme au sein du volume utile et constante au cours d'un palier de chargement,  $q(x,t)$  devient  $q_0$  pour  $x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  et nulle en dehors,

$$\text{soit } \bar{q}(u,t) = \int_{-L/2}^{+L/2} q_0 e^{-2j\pi ux} dx = q_0 \left[ \frac{e^{-2j\pi ux}}{-2j\pi u} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = q_0 \frac{\sin(\pi u L)}{\pi u} \quad (13)$$

La source s'exprime comme suit dans l'espace de la transformée :  $\bar{q}(u,t) = q_0 L \text{sinc}(\pi u L)$

$$\bar{T}(u,t) = \frac{a}{k} e^{-(4\pi^2 u^2 + m^2)at} \left( q_0 L \text{sinc}(\pi u L) \int_0^t e^{(4\pi^2 u^2 + m^2)a\tau} d\tau \right) \quad (14)$$

$$\bar{T}(u,t) = \frac{q_0 L}{k} \text{sinc}(\pi u L) \frac{(1 - e^{-(4\pi^2 u^2 + m^2)at})}{(4\pi^2 u^2 + m^2)} \quad (15)$$

Finalement, le retour à la température dans l'espace réel utilise la transformée de Fourier inverse :

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(u,t) e^{2j\pi ux} du \quad (16)$$

L'identification de la source  $q_0$  peut être entreprise soit dans l'espace des fréquences spatiales, après transformation intégrale discrète sur les mesures [5], soit après retour de la solution analytique dans l'espace réel par la transformée de Fourier inverse. C'est cette dernière solution qui a été choisie dans la présente étude, avec une procédure inverse de Gauss-Newton pour minimiser les écarts entre les profils de température  $T(x,t)$  mesurés par la caméra infrarouge et les transformées inverses calculées par le modèle.

Le modèle de barre infinie présente l'avantage d'éviter le calcul fastidieux des valeurs propres et des coefficients associés à chacune des fonctions propres spatiales, alors même que la complexité de la condition d'échange thermique de l'éprouvette dans les mors amène à douter de la pertinence d'une écriture classique pour cette condition. Il conviendrait alors d'introduire plutôt à chaque extrémité une résistance thermique ou un coefficient d'échange conductif. Il est de toute façon nécessaire d'identifier ces coefficients in situ à partir d'une expérience de refroidissement, en raison des conditions variables de fixation des éprouvettes [2, 6]. La transformée de Fourier rend en outre possible l'utilisation des algorithmes de transformée de Fourier discrète rapide (FFT) disponibles dans Matlab™. Nous avons toutefois constaté que les pertes conductives de la barre infinie ne sont pas suffisantes à des temps longs sur chaque palier de sollicitation, et a fortiori en régime stabilisé.

Dans le cas d'un régime transitoire avec un nombre de Fourier de 1 on a :

$$l = \sqrt{at} \Rightarrow t = \frac{l^2}{a} \quad (17)$$

ce qui, avec une diffusivité  $a=1,12.10^{-5}$ , conduit à une durée de 97 s ; afin de ménager un petit coefficient de sécurité, le modèle de barre infinie n'est donc utilisé ici que pendant la première minute de chaque palier.

### 3. Dispositif expérimental

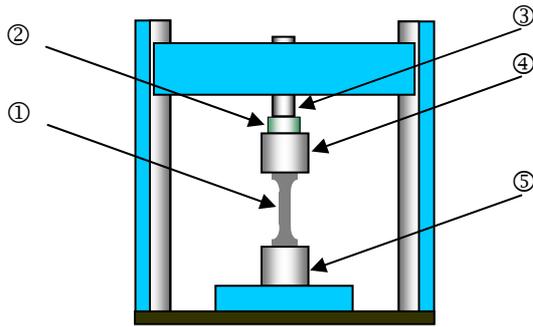


Figure 2 : schéma simplifié de la machine  
 ① : éprouvette, ② : capteur de force,  
 ③ : vérin hydraulique, ④ et ⑤ mors hydrauliques.

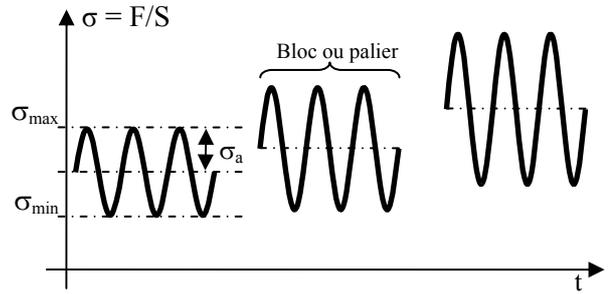


Figure 3 : sollicitation par blocs de chargement croissant

Le dispositif expérimental est constitué d'une machine de sollicitation dynamique d'une capacité de charge dynamique de 60kN, capable d'appliquer un chargement cyclique (sinusoïdal) aux éprouvettes jusqu'à une fréquence de sollicitation de 30Hz. Une caméra de thermographie matricielle CEDIP Jade III, utilisée à une fréquence d'acquisition de 140Hz, enregistre les évolutions des cartes de température de l'éprouvette au fil des cycles. La liaison mors-échantillon étant une liaison métal-métal, avec des états de surfaces très différents (les mors sont rugueux pour éviter le glissement), il est très difficile de quantifier le contact et d'en assurer la reproductibilité d'un essai à l'autre.

### 4. Résultats expérimentaux et identification des sources

Les essais mécaniques, réalisés sur des éprouvettes d'acier XC70, sont faits par blocs de 900 cycles à 15 Hz, pour des rapports de charge  $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  égaux à 0 et -1.

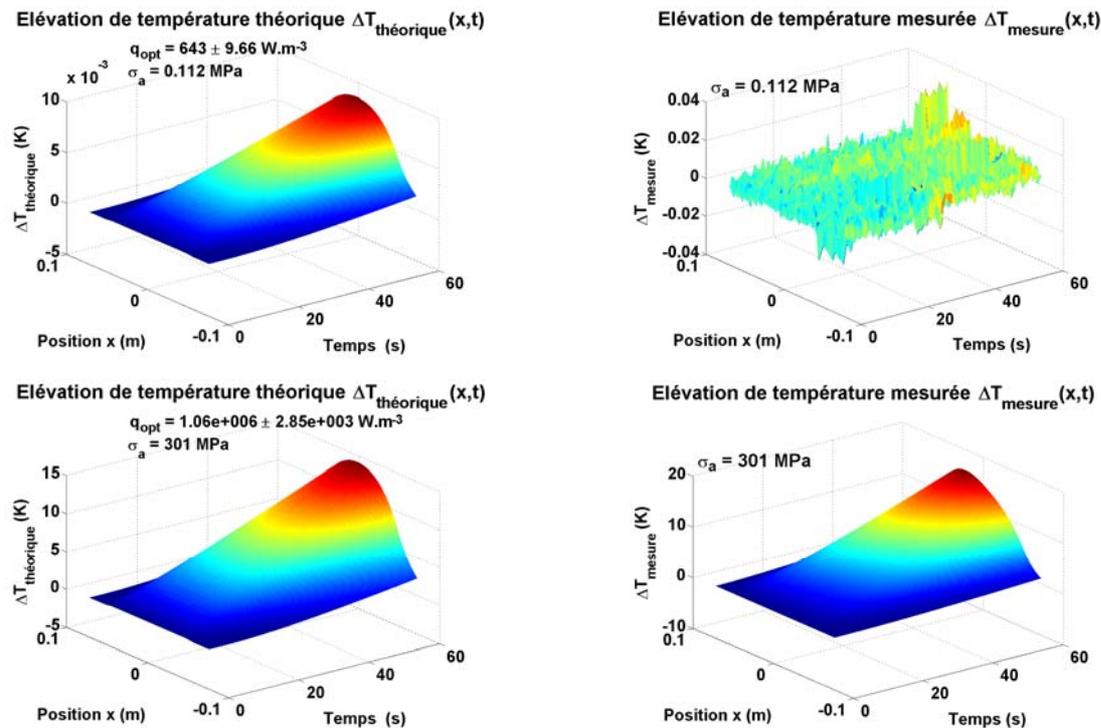


Figure 4 : Comparaison entre profils expérimentaux et théoriques, au fil du temps (acier XC70)

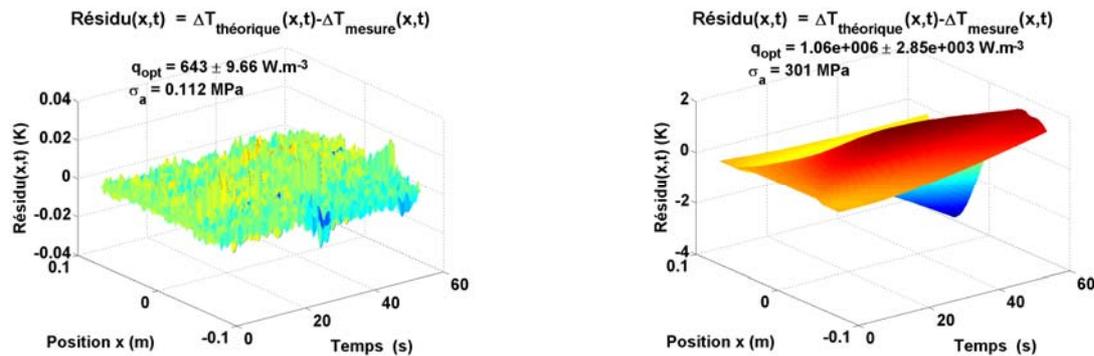


Figure 5 : Résidus d'identification pour les deux chargements précédents

Les sources identifiées sont de l'ordre de un watt par centimètre-cube pour les chargements les plus forts, tout en évitant d'entrer dans le domaine de plasticité macroscopique. La figure correspondant à un chargement très faible permet à la fois d'obtenir l'évolution du bruit au cours de l'essai et une première estimation du seuil de détectabilité des effets recherchés. Enfin, l'observation des résidus (figure 5) permet de mettre en évidence la limite de validité temporelle du modèle réduit : au fil du temps, les écarts modèle/expérience s'amplifient, traduisant une erreur de modèle, puisque leur distribution est très différente de la carte de « bruit » obtenue à faible chargement ; enfin, un écart de plusieurs degrés au bout d'une minute est en cohérence avec la limitation choisie pour l'application du modèle réduit.

## 5. Conclusion

Un modèle thermique par transformation intégrale de Fourier a été développé et utilisé pour identifier les sources de chaleur accompagnant les déformations micro-plastiques intervenant au cours d'un essai de fatigue cyclique. Dans la première minute de chaque palier, un modèle réduit de barre infinie permet de différer la prise en compte des pertes conductives par les mors. L'évaluation des sources à des temps plus longs, et *a fortiori* en régime stabilisé, nécessitera une prise en compte des pertes conductives par les mors, lesquelles doivent être évaluées *in situ*, en raison des conditions variables de fixation des éprouvettes.

## Références

- [1] M.P. Luong, Fatigue limit evaluation of metals using an infrared thermographic technique, *Mech. Of Mater.* 28, (1998) 155-163
- [2] T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru, A. Galtier, Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steel, *Int. J. of Fatigue* 26 (2004), 221-229
- [3] B. Berthel, B. Watrisse, A. Chrysochoos et A. Galtier, Thermographic analysis of fatigue dissipation properties of steel sheets, *Strain* 43 (2007) 273-279
- [4] M.N. Özisik, Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York (1993)
- [5] D. Legaie, H. Pron and C. Bissieux, Characterization of a black paint layer by photothermal lock-in thermography; Parameter identification in the Hankel space", *QIRT Journal* Vol 4 / 2 (2007), 201-218
- [6] F. Maquin, Méthodologie expérimentale d'étude du comportement thermomécanique des matériaux sous sollicitations cycliques, thèse de doctorat, ENSAM Châlons (2006)