

Le premier modèle abordé ici est un modèle monocouche à une température où le milieu est considéré parfaitement homogène, sans effet de paroi, voir la figure 1. La vitesse de Darcy du fluide est donc uniforme au sein du réacteur, tout comme la porosité du lit ou encore le tenseur de dispersion thermique. La première évolution de ce modèle prend en compte les effets de paroi en distinguant une zone à cœur de réacteur semi-infinie homogène, et une seconde zone homogène en proche paroi d'épaisseur faible mais dont les propriétés physiques diffèrent (voir la Figure 2). On parle alors de modèle bicouche. L'introduction de la paroi elle-même et de ses propriétés, via une troisième couche, permet de rendre plus réaliste ce modèle, ce qui permet d'introduire les pertes de chaleur par conduction dans la paroi et modifie la forme du chauffage. Elle est destinée à améliorer de futures inversions de mesures sur un dispositif existant. Enfin une réduction de ce modèle est présentée afin d'obtenir un modèle plus simple dont les paramètres puissent être estimés.

2. Le modèle monocouche : la mise en place d'une référence

Ce modèle, est un modèle « à une température » [1]. On considère ici une température qui n'est ni celle de la phase fluide, ni celle de la phase solide, mais une température « enthalpique » locale résultant de la prise de moyenne volumique appliquée autour du point P étudié. Cette température est définie comme suit:

$$T_H(P) = \frac{1}{\rho c_t V(P,D)} \int_{V(P,D)} \rho c_t(P') T(P') dV(P') \quad \text{avec} \quad \rho c_t = \varepsilon \rho c_f + (1-\varepsilon) \rho c_s \quad (1)$$

Une telle température présente l'avantage de reposer sur un modèle à une seule équation de la chaleur pour tout le milieu, avec un nombre réduit de paramètres, par rapport à un modèle à deux températures. De plus, elle dérive directement, via la capacité calorifique totale ρc_t , de la définition de l'enthalpie, et possède donc un sens énergétique intrinsèque. L'équation de la chaleur en deux dimensions dans un milieu poreux homogénéisé s'écrit alors:

$$\rho c_t \frac{\partial T_H}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T_H}{\partial y^2} - \rho c_f u_D \frac{\partial T_H}{\partial x} \quad (2)$$

Dans le cas du modèle monocouche avec chauffage plan en paroi, la paroi est considérée comme parfaitement isolante et les propriétés du milieu sont considérées comme uniformes (vitesse de Darcy du fluide, porosité, tenseur de dispersion thermique, capacité calorifique du fluide, capacité calorifique totale...). On écrit les conditions aux limites comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_{exc} = -\lambda_y \frac{\partial T_H}{\partial y} &= W(H(x) - H(x-l_p))H(t) \quad \text{en } y = 0, \\ T &\rightarrow 0 \quad \text{en } x \rightarrow \pm\infty \quad \text{et } T \rightarrow 0 \quad \text{en } y \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3)$$

La température initiale est prise égale à zéro. La méthode des quadripôles thermiques [2] permet alors de résoudre ce problème de façon analytique, en utilisant une transformée de Fourier spatiale dans la direction x , et une transformée de Laplace temporelle. Après retour dans l'espace réel, le champ de température est alors obtenu par :

$$T(x, y, t) = \frac{W}{\rho C_f u \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \int_0^{\frac{(\rho C_f u)^2}{4 \rho C_f \lambda_x} t} e^{-\left(\frac{(\rho C_f u)^2}{16 \lambda_x \lambda_y} \frac{y^2}{\theta}\right)} (\operatorname{erf}(z_1) + \operatorname{erf}(z_2)) \frac{1}{\sqrt{\theta}} d\theta \quad (4)$$

$$\text{Avec } z_1 = \frac{1}{4} \frac{\rho C_f u}{\lambda_x} \frac{x}{\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{4} \frac{\rho C_f u}{\lambda_x} \frac{l-x}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}$$

Testu [3] a établi expérimentalement les corrélations suivantes pour les coefficients de dispersion thermiques en milieu billes de verre / air :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{equ}}{\lambda_f} + 0.126 Re^{1.45} = \frac{\lambda_{equ}}{\lambda_f} + 0.211 Pe^{1.45} \quad \text{pour } 12 < Re < 130 \quad (5)$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = 6.4 + 0.079 Re = 6.4 + 0.11 Pe \quad \text{pour } 16 < Re < 130$$

Ce modèle présente l'avantage d'être simple, avec un nombre minimum de paramètres, mais il suppose le milieu poreux semi-infini, isolé à la paroi, et homogène : une telle approximation est rarement atteignable expérimentalement et ce modèle doit être amélioré.

3. Le modèle bicouche : prise en compte des effets de paroi

Le modèle bicouche est considéré ici afin de rendre compte de l'hétérogénéité de la porosité en proche paroi [4]. Cette hétérogénéité a une influence tant sur la capacité calorifique locale que sur les vitesses de Darcy locales : les effets de paroi que les non uniformités de ces deux grandeurs génèrent portent à longue distance dans le milieu étudié [5]. Il convient donc d'adapter le modèle précédent afin d'intégrer cet effet. Cependant, le modèle obtenu devra être utilisable pour inverser des mesures expérimentales : le nombre de paramètre du nouveau modèle doit rester minimal. On considère ici un modèle constitué de deux couches homogènes de porosité et donc de propriétés physiques différentes, voir la figure 2. On écrit les équations de la chaleur suivantes pour chacune des deux zones :

$$\begin{cases} \rho c_t \frac{\partial T_H}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T_H}{\partial y^2} - \rho c_f u_D \frac{\partial T_H}{\partial x} & \text{en } y \leq \delta \\ \rho c_t \frac{\partial T_H}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T_H}{\partial y^2} - \rho c_f u_D \frac{\partial T_H}{\partial x} & \text{en } y \geq \delta \end{cases} \quad (6)$$

Les conditions aux limites et la condition initiale restent identiques à celles définies dans le modèle monocouche en (4). On veillera simplement à ce que la continuité à l'interface en δ soit respectée, tant pour la température que pour la densité de flux thermique.

La méthode des quadripôles avec transformées intégrales complexes permet de résoudre ce problème, mais de façon semi-analytique uniquement : si l'on obtient effectivement une solution analytique exacte dans l'espace de Laplace-Fourier, il n'est en revanche plus possible de repasser analytiquement en espace réel : l'inversion de Laplace doit être effectuée numériquement. La solution analytique en température obtenue par la méthode des quadripôles thermiques [2] dans l'espace de Laplace-Fourier est la suivante :

$$\begin{cases} \tilde{T}_n(y, p) = \frac{1}{\lambda_y k_n'} \frac{\lambda_y k_n' ch(k_n'(y-\delta)) - \lambda_x k_n' sh(k_n'(y-\delta))}{\lambda_y k_n' sh(k_n'\delta) + \lambda_x k_n' ch(k_n'\delta)} \tilde{\varphi}_{n,elec}(p) & \text{en } y \leq \delta \\ \tilde{T}_n(y, p) = \frac{e^{-k_n(y-\delta)}}{\lambda_y k_n' sh(k_n'\delta) + \lambda_x k_n' ch(k_n'\delta)} \tilde{\varphi}_{n,elec}(p) & \text{en } y \geq \delta \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{avec } k_n^2 = \frac{\rho c_t}{\lambda_y} p + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha_n^2 + i \frac{\rho c_f u}{\lambda_y} \alpha_n \quad \text{et} \quad k_n'^2 = \frac{\rho c_t}{\lambda_y} p + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha_n^2 + i \frac{\rho c_f u}{\lambda_y} \alpha_n$$

$$\text{Avec pour chaque mode : } \tilde{T}_n(y, p) = \int_{-L}^L \int_0^t e^{-(pt+i\alpha_n)} T(x, y, t) dt dx \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_{n,elec}(p) = \int_{-L}^L \int_0^t e^{-(pt+i\alpha_n)} \varphi_{elec}(x, t) dt dx = \frac{W}{ip\alpha_n} (1 - e^{-il_p\alpha_n})$$

Le retour dans l'espace réel s'effectue par une inversion de Laplace numérique temporelle sur chacun de ces harmoniques, puis par une somme finie des différents modes :

$$T_H(x, y, t) = \frac{1}{2L} \sum_{n=1-N}^N \tilde{T}_n(y, t) e^{i\alpha_n x} \quad (8)$$

Il faut donc utiliser un grand nombre d'harmoniques $2N+1$, sur une longueur $2L$ suffisante.

4. Le modèle tricouche : prise en compte des pertes par la paroi

Le modèle bicouche permet de prendre en compte les effets de variation de porosité au sein du milieu granulaire près de la paroi, mais considère cette paroi comme parfaitement isolante. En pratique, cette approximation est contestable ; il est possible de prendre en compte les fuites thermiques à travers cette paroi en instaurant une troisième couche dans la modélisation : une couche dans la paroi, purement conductrice, et faisant intervenir les propriétés physiques du matériau constituant la paroi.

Une troisième équation traduisant le transfert en paroi complète le système (6) :

$$\rho c_{3t} \frac{\partial T_H}{\partial t} = \lambda_{3x} \frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2} + \lambda_{3y} \frac{\partial^2 T_H}{\partial y^2} \quad (9)$$

Les conditions aux limites dans cette paroi sont les suivantes :

$$-\lambda_{3y} \frac{\partial T_H}{\partial y} = 0 \text{ en } y = -e \text{ (paroi isolée car problème symétrique) et } T \rightarrow 0 \text{ en } x \rightarrow \pm\infty \quad (10)$$

La condition en surface de paroi est obtenue par bilan thermique sur les densités de flux :

$$\varphi_{paroi} + \varphi_{elec} = \varphi_{exc} \quad \text{avec} \quad \varphi_{elec} = W H(t)(H(x) - H(x - l_p)) \quad (11)$$

On peut alors utiliser le quadripôle conductif de la paroi, et obtenir ainsi une relation liant température de surface et densité de flux d'excitation dans l'espace de Laplace-Fourier :

$$\tilde{T}_n(y=0, p) = -\frac{1}{\lambda_{3y} k_{3n} \tanh(k_{3n} e)} \tilde{\varphi}_{n,paroi} \quad \text{avec} \quad k_{3n}^2 = \frac{\rho c_{3t}}{\lambda_{3y}} p + \frac{\lambda_{3x}}{\lambda_{3y}} \alpha_n^2 \quad (12)$$

L'expression de la nouvelle densité de flux d'excitation, avec prise en compte des pertes thermiques en paroi, s'obtient par couplage de cette relation avec le modèle bicouche (7) :

$$\tilde{\varphi}_{n,exc} = \frac{1}{1 + \lambda_{3y} k_{3n} \tanh(k_{3n} e) \left(\frac{1}{\lambda_y k_n} \frac{\lambda_y k_n ch(k_n \delta) + \lambda_y k_n sh(k_n \delta)}{\lambda_y k_n sh(k_n \delta) + \lambda_y k_n ch(k_n \delta)} \right)} \tilde{\varphi}_{n,elec} = K_n \tilde{\varphi}_{n,elec} \quad (13)$$

Le facteur K_n est donc inséré dans le modèle bicouche (7). Le modèle résultant est cohérent vis à vis d'un dispositif expérimental : les pertes thermiques par les parois y sont en effet inévitables et doivent donc être prises en compte afin d'inverser correctement des mesures. Le champ de température est donné en figure 4 et quelques profils correspondant en figure 5 (pour des temps longs). Cependant, une analyse de sensibilité révèle que le trop grand nombre de paramètres de ce modèle très élaboré le rend inutilisable pour des inversions : sa sortie est très peu sensible à certains paramètres, et les sensibilités vis à vis d'autres paramètres sont corrélées entre elles (c'est notamment le cas pour l'épaisseur de la couche δ , liée à la plupart des autres paramètres). Tous ces paramètres sont ainsi inestimables sur un signal mesuré. Bien qu'il soit possible d'utiliser simultanément plusieurs signaux expérimentaux à différentes positions afin de tenter de décorrélérer les sensibilités, on préférera une réduction du modèle et un choix plus parcimonieux des paramètres à estimer.

5. Le modèle tricouche réduit : une obtention de paramètres estimables

Le principe de cette réduction de modèle est de faire disparaître la couche en proche paroi en tant que milieu afin d'y considérer la température comme indépendante de la direction transverse y , voir la figure 3. On introduit ainsi une température moyenne débitante dans cette couche, et en intégrant l'équation de la chaleur correspondante entre la paroi et l'interface :

$$\rho c_f \delta \frac{\partial T_H^m}{\partial t} = \lambda_x \delta \frac{\partial^2 T_H^m}{\partial x^2} + \varphi(x, 0, t) - \varphi(x, \delta, t) - \rho c_f \delta u_D \frac{\partial T_H^m}{\partial x} \quad \text{avec} \quad T_H^m = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T_H(y) dy \quad (14)$$

L'uniformisation de la température dans la couche en proche paroi écrasée implique une discontinuité entre cette température moyenne débitante et la température de surface de la paroi, ou encore la température à l'interface entre les deux zones du milieu granulaire. Deux équations de fermeture introduisant des coefficients d'échange qui complètent le modèle :

$$\varphi_{exc} = \varphi(x, 0, t) = h_0(T_H(x, 0, t) - T_H^m(x, t)) \quad \text{et} \quad \varphi(x, \delta, t) = h_\delta(T_H^m(x, t) - T_H(x, \delta, t)) \quad (15)$$

Les harmoniques de la température de Laplace se calculent par la méthode quadripolaire :

$$\begin{cases} \tilde{T}_n^m(p) = \frac{\lambda_y k_n + h_\delta}{h_\delta \lambda_y k_n + \omega_n (\lambda_y k_n + h_\delta)} \tilde{\varphi}_{n,exc} & \text{en } y \leq \delta \\ \tilde{T}_n(y, p) = \frac{h_\delta e^{-k_n(y-\delta)}}{h_\delta \lambda_y k_n + \omega_n (\lambda_y k_n + h_\delta)} \tilde{\varphi}_{n,exc} & \text{en } y \geq \delta \end{cases} \quad (16)$$

avec $k_n^2 = \frac{\rho c_f}{\lambda_y} p + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha_n^2 + i \frac{\rho c_f u}{\lambda_y} \alpha_n$ et $\omega_n = \rho c_f \delta p + \lambda_x \delta \alpha_n^2 + i \rho c_f u \delta \alpha_n$

Le retour dans l'espace réel s'effectue comme dans les cas des autres modèles (8), voir les profils de température en régime asymptotique en figure 6. Ce type de réduction peut également être appliqué au modèle bicouche, en utilisant la densité de flux d'excitation non modifié ($K_n=1$). On obtient ainsi un modèle simplifié dont la température dans la couche en proche paroi est uniforme dans la direction transverse. Du point de vue des sensibilités du modèle aux paramètres, les paramètres dépendant de y en proche paroi dans le modèle tricouche ont été supprimés, et des coefficients d'échange indépendants ont été introduits. Ces paramètres sont plus facilement estimables à partir de données expérimentales. Les paramètres dont les sensibilités restent corrélées seront fixés ou contraints lors de l'estimation (contraintes au sens d'un estimateur de Bayes).

6. Conclusion

Une méthodologie de modélisation a été décrite pour le problème de transfert de chaleur en milieu poreux granulaire. L'analyse des causes des effets de paroi a mis en évidence plusieurs zones au sein du système étudié, rendant possible des améliorations successives du modèle, afin de le rendre plus réaliste. Une réduction de modèle a également été effectuée pour permettre l'inversion de mesures. Cette future inversion nécessite cependant de mener des simulations d'inversion (Monte Carlo) afin de détecter d'éventuel biais lors de l'estimation.

Références

- [1] Moyne, C., Didierjean, S., et al. *Thermal dispersion in porous media: one-equation model*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 43 (2000), 3853-3866.
- [2] Maillet, D., André, S., et al. *Thermal quadrupoles: Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, John Wiley & Sons, Ltd (2000).

- [3] Testu, A., S. Diderjean, et al. *Thermal dispersion for water or air flow through a bed of glass beads*. International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol 50 (2006), 1469-1484.
- [4] Martin, H. *Low Peclet number particle-to-fluid heat and mass transfer in packed bed*. Chemical Engineering Science. Vol 33 (1978), 913-919.
- [5] Fiers, B., Moumini, N., et al. *Thermal dispersion in a granular medium: detection of the wall effects*, Proceedings of the Eurotherm seminar n°81 (2007).

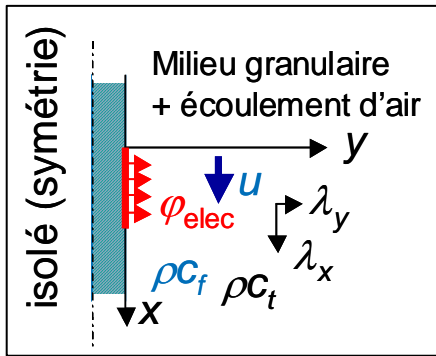


Figure 1: Modèle monocouche

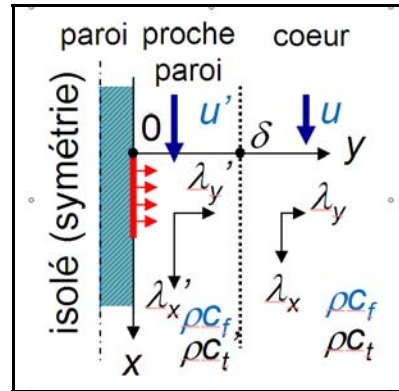


Figure 2: Modèle bicouche

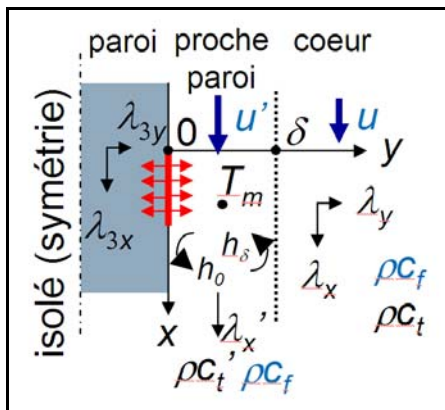


Figure 3: Modèle tricouche

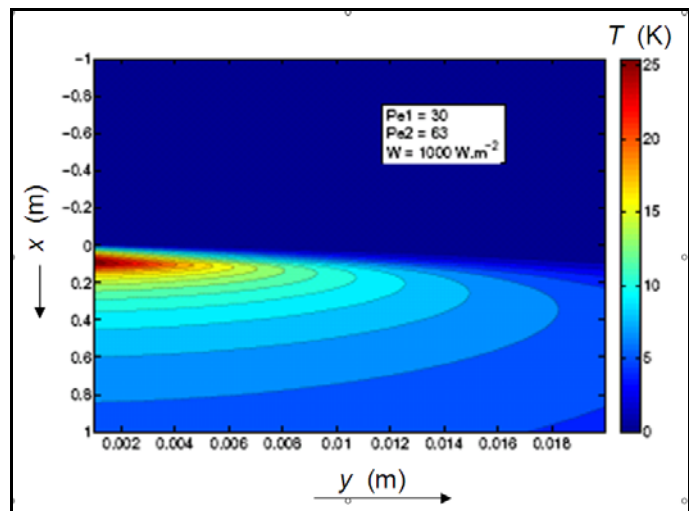


Figure 4: Modèle tricouche – champ permanent

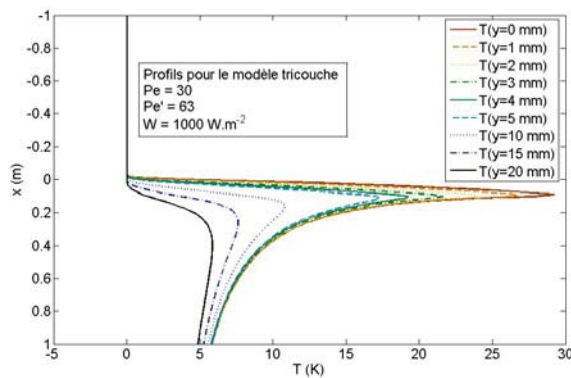


Figure 5: Températures – modèle tricouche

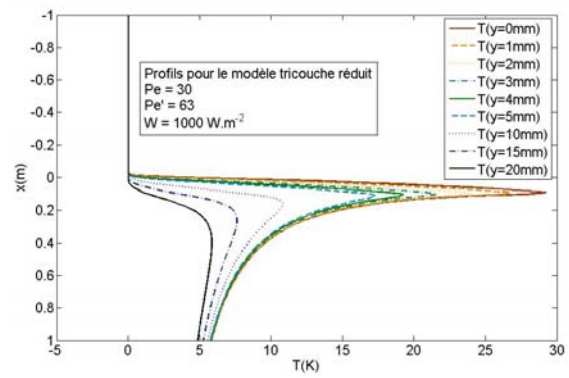


Figure 6: Températures – modèle tricouche réduit