

# Pénalisation sur des maillages curvilignes pour la simulation des transferts de masse et de chaleur dans la grotte de Lascaux.

Delphine LACANETTE<sup>1\*</sup>, Stéphane VINCENT<sup>1</sup>, Arthur SARTHOU<sup>1</sup>, Jean-Paul CALTAGIRONE<sup>1</sup>, Philippe MALAURENT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Transferts, Ecoulements, Fluides, Energétique (TREFLE)  
16 avenue Pey-Berland – 33607 Pessac Cedex

<sup>2</sup>Laboratoire Géosciences Hydrosociétés Matériaux Constructions (GHYMAC)

Avenue des Facultés – 33405 Talence Cedex

\* (auteur correspondant : [lacanette@enscpb.fr](mailto:lacanette@enscpb.fr))

**Résumé** – Des techniques de pénalisation sur maillage curviligne sont présentées et validées sur un cas de convection naturelle bidimensionnelle en interaction avec des obstacles. Ces techniques sont utilisées pour simuler les transferts de masse et de chaleur dans la grotte de Lascaux, qui constitue un obstacle de forme complexe. L’outil de simulation permet de différencier des scénarios climatiques avec pour objectif l’aide à la décision dans le cadre de la conservation du patrimoine.

## Nomenclature

$C$  fonction de présence

$C_p$  chaleur spécifique,  $J.(kg.K)^{-1}$

$\mathbf{g}$  accélération de la gravité,  $m.s^{-2}$

$K$  perméabilité,  $m^2$

$p$  pression,  $Pa$

$t$  temps,  $s$

$T$  température,  $K$

$\mathbf{u}$  vitesse,  $m.s^{-1}$

*Symboles grec*

$\beta$  coefficient de dilatation,  $K^{-1}$

$\lambda$  conductivité thermique,  $W.(m.K)^{-1}$

$\mu$  viscosité dynamique,  $Pa.s$

$\rho$  masse volumique,  $kg.m^{-3}$

$\Sigma_h$  maillage des objets

*Indices et exposants*

$0$  état thermodynamique de référence

## 1. Introduction

La réalisation d’un modèle numérique pour traiter de la convection naturelle dans les cavités et de la conduction dans la roche environnante est importante pour la conservation des milieux confinés. Pour être pertinent, l’outil numérique doit prendre en compte la géométrie souvent complexe de la grotte avec suffisamment de précision. Deux approches sont communément employées. La première consiste à considérer deux sous domaines avec leur propre maillage non structuré (body fitted grid) connectés par une condition limite à l’interface entre les deux milieux solide et fluide. L’avantage des méthodes non structurées est leur prise en compte naturelle de la forme complexe des objets, ainsi que leur description explicite à l’interface. Cependant la génération du maillage est complexe voire parfois impossible à cause des fortes irrégularités de l’interface. La seconde méthode numérique pour la gestion de l’interface est l’approche des domaines fictifs. Cette technique est basée sur le concept de l’utilisation d’un maillage structuré pour gérer les équations de conservation (Navier-Stokes, énergie). Les obstacles solides sont projetés sur le maillage structuré de la simulation et des termes spécifiques, dits de pénalisation, sont ajoutés aux équations de conservation pour tenir compte de la présence d’obstacles. Cette méthode possède l’avantage d’être facile à implémenter même en 3D et de pouvoir intégrer des outils CFD existants. En outre, elle peut s’appliquer à des objets mobiles et plusieurs approches ont été étendues à des ordres élevés.

Les travaux proposés ici présentent les premières pénalisations avec l'approche des domaines fictifs sur des maillages curvilignes en 3D, avec pour objectif la simulation des écoulements de convection naturelle dans la grotte de Lascaux. Après une validation sur un cas de convection naturelle sur un tapis de Sierpinski avec un maillage curviligne, l'outil numérique est utilisé afin de comprendre le comportement de la grotte de Lascaux lorsqu'elle est soumise à différentes conditions limites thermiques, avec un objectif d'aide à la conservation de ce patrimoine. L'aspect non intrusif et prédictif de cet outil, appelé Simulateur Lascaux, en fait une technique conservative originale.

## 2. Modèles et méthodes numériques

La modélisation des écoulements de convection naturelle en interaction avec des obstacles est basée sur les équations de Navier-Stokes Brinkman incompressibles [1] et l'hypothèse de Boussinesq :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \frac{\mu}{K} \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) \quad (2)$$

$$\rho_0 C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (3)$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)) \quad (4)$$

Dans ce modèle, les obstacles sont vus comme un milieu poreux au travers de la perméabilité  $K$ . La propriété de non-déformabilité est imposée par un terme de Darcy qui est ajouté dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement : il s'agit ici d'une méthode de domaines fictifs dans laquelle le milieu solide est vu comme un fluide de propriétés spécifiques. Concernant les méthodes numériques, les schémas et les solveurs, le détail est donné dans [2]. L'ensemble est basé sur des volumes finis et des maillages structurés. Nous utilisons un schéma d'Euler implicite pour l'intégration en temps, une méthode de lagrangien augmenté pour le couplage vitesse-pression et des schémas centrés pour la discrétisation spatiale. Le système linéaire ainsi obtenu est inversé par une méthode itérative de bi gradient conjugué stabilisé préconditionné par une méthode ILU.

La principale difficulté lorsque l'on souhaite traiter de l'interaction d'un fluide avec un obstacle de géométrie non triviale (grotte de Lascaux par exemple) est la définition *a priori* de la perméabilité en fonction de la géométrie de l'obstacle. Pour réaliser ceci, nous nous appuyons sur les techniques écrites dans [2] qui utilisent une fonction de présence  $C$ , égale à 1 dans le solide et 0 ailleurs. Connaissant cette fonction  $C$ ,  $K$  est définie par  $K=10^{40}$  si  $C < 0.5$  (totalement perméable),  $K=10^{-40}$  sinon. Les caractéristiques physiques des sous domaines sont définies en fonction de  $C$  au travers de lois linéaires.

Dans [2], les auteurs proposent d'utiliser un maillage surfacique lagrangien  $\Sigma_h$  des objets et des méthodes issues des techniques de Immersed Boundary Method (IBM) de [3] pour projeter le maillage surfacique sur la grille de calcul des équations de conservation (1-4). Cette démarche est efficace mais comporte deux désavantages majeurs :

- On résout une équation de diffusion sur  $C$  pour obtenir cette fonction de phase en fonction du maillage  $\Sigma_h$ . Cette étape ne peut gérer les configurations où l'enveloppe de l'objet n'est pas totalement incluse dans le maillage de calcul.

- Les techniques IBM sont difficilement transposables sur des maillages de calcul curvilignes orthogonaux car elles requièrent des étapes d'intersection géométriques entre les éléments du maillage surfacique de l'objet  $\Sigma_h$  et le maillage de calcul.

Nous proposons ici de remplacer les deux étapes précédentes afin de pouvoir gérer des obstacles partiellement inclus dans le maillage de calcul quand celui-ci est curviligne. Nous avons basé notre démarche sur l'utilisation d'une méthode de Ray-Casting [4] qui permet de générer automatiquement  $C$  connaissant  $\Sigma_h$ .

Le principe est le suivant : on parcourt le maillage de calcul et on détermine l'appartenance de chaque nœud à l'obstacle ou non en lançant un rayon dont la source est située sur le point du maillage. On compte ensuite le nombre d'intersections entre ce rayon et les éléments de  $\Sigma_h$ . Si ce nombre est impair, le point du maillage de calcul est dans l'objet, si le nombre est pair, il est à l'extérieur. Connaissant  $C$ , on construit automatiquement  $K$  avec les formules introduites précédemment.

La méthode de Ray-Casting est très efficace, elle voit les objets même lorsqu'ils débordent du maillage de calcul. La technique fonctionne sur des maillages structurés ou non. Par contre, l'efficacité de la méthode est grandement améliorée sur des maillages structurés à pas constants car les nœuds du maillage de calcul et le rayon sont directement localisés par les indices  $I, J, K$  des cellules et non par leurs coordonnées. Pour continuer à utiliser le Ray-Casting sur des grilles à pas constant cartésiennes, même lorsque le maillage de calcul est curviligne orthogonal, nous avons opéré des transformations de coordonnées. Il existe une bijection  $f(x, y, z)$  qui permet de transformer un maillage curviligne orthogonal en un maillage à pas constant. Nous avons utilisé des approximations polynomiales bilinéaires de  $f$  pour réaliser les changements de grille. Cette fonction a été utilisée pour projeter les coordonnées de  $\Sigma_h$  d'un repère à l'autre. Ainsi, on obtient un objet d'enveloppe transformée, compatible avec le maillage à pas constant, lui-même étant la transformée du maillage curviligne orthogonal initial. On utilise ensuite le Ray-Casting sur le maillage à pas constant pour définir  $C$ . Il se trouve que les sommets des cellules de ce maillage gardent leurs valeurs lorsque l'on revient sur le maillage curviligne, il n'est donc pas utile d'utiliser  $f^{-1}$ .

### 3. Validation : le tapis de Sierpinski

Le cas dit du tapis de Sierpinski est un cas de convection naturelle dans une enceinte contenant des obstacles carrés. La disposition des obstacles suit le motif fractal du tapis de Sierpinski dont quelques itérations sont présentées figures 1, 2 et 3.

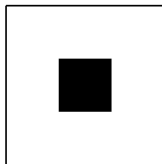


Figure 1 : Première itération du tapis de Sierpinski

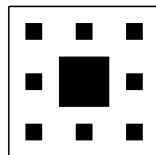


Figure 2 : Deuxième itération du tapis de Sierpinski

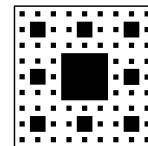


Figure 3 : Troisième itération du tapis de Sierpinski

Un différentiel de température de 5 degrés est imposé aux parois gauche et droite. Les parois supérieures et inférieures sont considérées comme adiabatiques. Le fluide est une huile aux propriétés suivantes :

$$\mu = 0.0815 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}, \rho = 857 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, C_p = 1880 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}, \lambda = 0.132 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}$$

Les résultats obtenus avec notre approche sur un maillage curviligne sont comparés avec ceux obtenus avec le même code sur un maillage cartésien, ainsi qu'avec les résultats

expérimentaux de Amine et al. [5]. Seule la seconde itération du motif est traitée. La boîte de simulation est un carré de 100 mm de côté. L'obstacle central a un côté de 33 mm et les obstacles périphériques un côté de 11 mm. La figure 4 montre le type de maillage curviligne utilisé. Afin d'obtenir un maillage curviligne non trivial, les côtés de la boîte sont étirés et la nouvelle zone ainsi créée est pénalisée afin de retrouver un domaine de calcul carré.

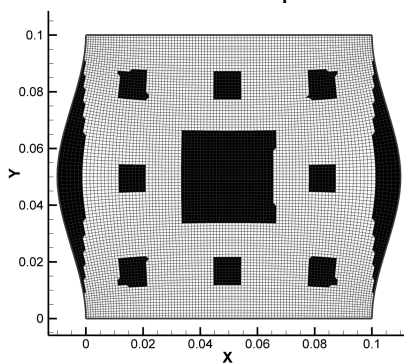


Figure 4 : Exemple de maillage curviligne pour le cas du tapis de Sierpinski. Les zones pénalisées sont coloriées en noir

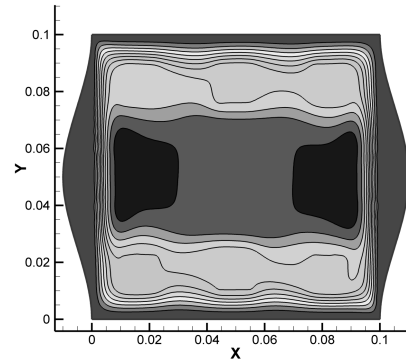


Figure 5 : Lignes de courant pour l'écoulement stationnaire

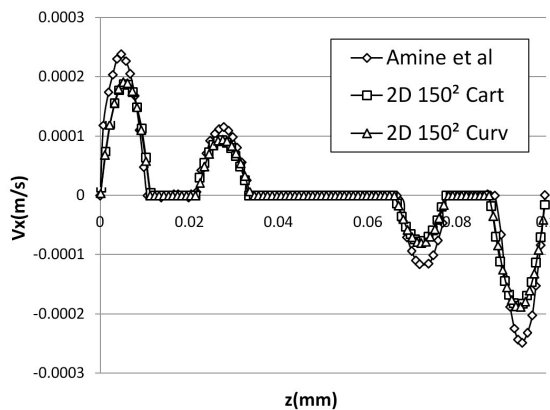


Figure 6 : Comparaison des résultats expérimentaux d'Amine et al et des résultats numériques sur maillages cartésiens et curvilignes  $V_z$  pour  $z=17\text{mm}$

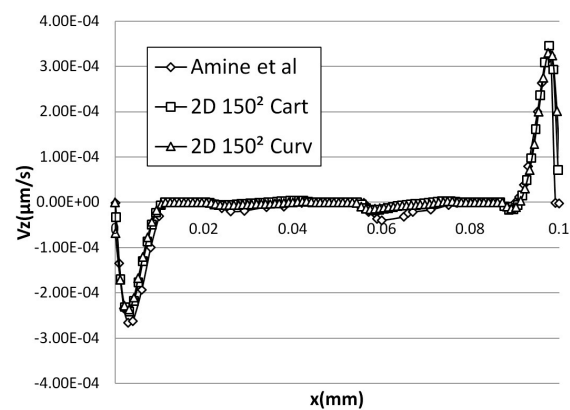


Figure 7 : Comparaison des résultats expérimentaux d'Amine et al et des résultats numériques sur maillages cartésiens et curvilignes  $V_x$  pour  $x=50\text{mm}$

Les résultats numériques obtenus pour des maillages 150 x 150 sont présentés figures 5, 6 et 7. Les valeurs observées sont les vitesses  $V_z(x)$  pour  $z=17\text{mm}$  et  $V_x(z)$  pour  $x=50\text{mm}$ . On observe une corrélation assez moyenne entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Toutefois, les auteurs exposent dans [2] de bien meilleurs résultats en menant un calcul 3D. Quoiqu'il en soit, les résultats sur maillage curviligne sont très proches des résultats obtenus avec un maillage cartésien.

#### 4. Application à la convection naturelle dans la grotte de Lascaux

La méthode présentée dans le paragraphe 2. est utilisée pour prendre en compte la géométrie complexe de la grotte de Lascaux, et résoudre les écoulements de convection naturelle s'y tenant.

##### 4.1. Position du problème

La méthode de pénalisation est utilisée sur un maillage curviligne, la grotte de Lascaux est ainsi présentée dans le massif environnant. L'utilisation d'un maillage curviligne présente plusieurs intérêts, celui d'économiser le nombre de points en ne résolvant pas des zones dans

lesquelles seul le massif est présent, il permet en outre de se rapprocher de la géométrie réelle du massif.

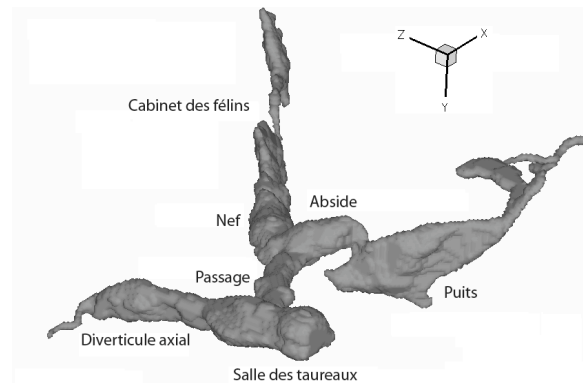


Figure 8 : Grotte de Lascaux telle qu'elle est prise en compte dans le simulateur

Le nombre de Rayleigh relatif à l'écoulement dans la grotte de Lascaux est de  $10^8$ . Ce Rayleigh est transitionnel entre un écoulement laminaire et turbulent. Les gradients de température sont de  $0,1^\circ\text{C}$ . Ce nombre de Rayleigh élevé est lié aux grandes dimensions rencontrées dans la cavité, jusqu'à 10 m de hauteur.

#### 4.2. Phénomène d'inversion des températures

L'un des intérêts du simulateur Lascaux réside dans son aspect prédictif des écoulements. Il permet de se situer à différentes époques en fonction de la configuration thermique correspondante. Les températures sont relevées au-dessus de la colline environnant la grotte depuis les années 1940, ce qui permet de déduire les températures dans la profondeur de la colline et dans la grotte par une loi de conduction. Ainsi on se place à différentes époques afin de retrouver les écoulements correspondants. Les figures 9 et 10 montrent les distributions de températures à deux époques bien distinctes, septembre 1981 et février 2008, sur une coupe longitudinale dans la nef (figure 8). Ces deux époques sont caractéristiques de deux régimes très différents, en septembre 1981 la température augmente lorsqu'on s'enfonce dans les profondeurs, tandis qu'en février 2008, c'est le contraire.



Figure 9 : Distribution des températures dans la configuration thermique de septembre 1981

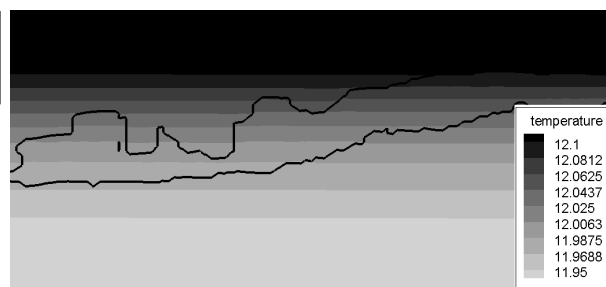


Figure 10 : Distribution des températures dans la configuration thermique de février 2008

Les gammes de vitesse sont différentes selon la configuration thermique. En septembre 1981, elles étaient de l'ordre du cm/s, tandis qu'en février 2008, elles sont 10 fois plus faibles, comme représenté sur les figures 11 et 12 sur une coupe longitudinale dans la nef.

La trajectoire d'un traceur dans la partie droite de la grotte de Lascaux pour la configuration climatique de septembre 1981 est présentée à la figure 13, elle montre l'aspect tridimensionnel de l'écoulement de convection naturelle.

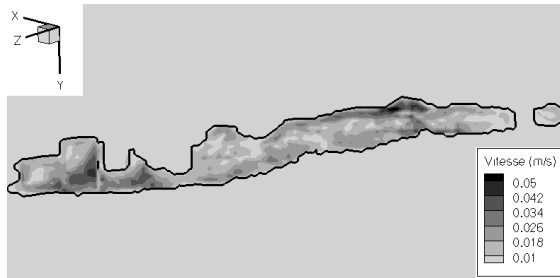


Figure 11 : Distribution des vitesses dans la configuration thermique de septembre 1981

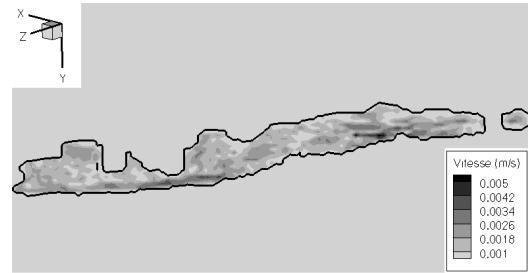


Figure 12 : Distribution des vitesses dans la configuration thermique de février 2008

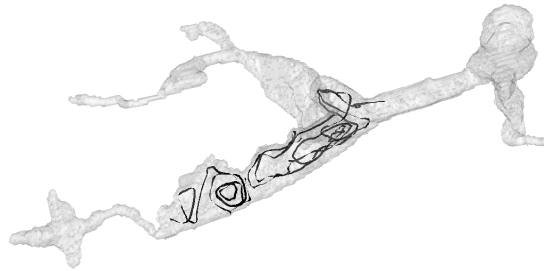


Figure 13 : Trajectoire d'un traceur dans la configuration thermique de septembre 1981

## 5. Conclusion

Les méthodes de domaines fictifs présentées dans [2] sont étendues pour la première fois aux maillages curvilignes grâce à des algorithmes de Ray-Casting. Une validation 2D a démontré le potentiel de la méthode sur un écoulement de convection naturelle interagissant avec un tapis de Sierpinski. Des simulations 3D ont montré l'intérêt de la méthodologie pour étudier les écoulements dans des milieux à géométrie complexe comme la grotte de Lascaux. Ces simulations s'inscrivent dans le projet de conservation préventive innovante qu'est le simulateur Lascaux [6].

## Références

- [1] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, J.P. Caltagirone, Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 34 (2000), 651-684.
- [2] D. Lacanette, S. Vincent, A. Sarthou, P. Malaurent, J.P. Caltagirone, An Eulerian/Lagrangian method for the numerical simulation of incompressible convection flows interacting with complex obstacles: application to the natural convection in the Lascaux cave, *Int. J. Heat Mass Transfer*, under press, 2009.
- [3] A. Sarthou, S. Vincent, J. P. Caltagirone, P. Angot, Eulerian-Lagrangian grid coupling and penalty methods for the simulation of multiphase flows interacting with complex objects, *Int. J. of Num. Meth. In Fluids*, 56-8 (2008), 1093-1099.
- [4] C. J. Ogayar, R. J. Segura, F. R. Feito, Point in solid strategies, *Comp. Graph.*, 29 (2005), 616-624.
- [5] A. Amine, J. K. Platten, M. Hasnaoui, Thermal convection around obstacles: the case of Sierpinski carpets, *Exp. In Fluids*, 36 (2004), 717-727.
- [6] D. Lacanette, P. Malaurent, J.P. Caltagirone, J. Brunet, Étude des transferts de masse et de chaleur dans la grotte de Lascaux : Le suivi climatique et le simulateur, *Karstologia*, 50 (2007), 19-30.

## Remerciements

Les auteurs remercient la DRAC Aquitaine pour son soutien financier. Ils remercient également la région Aquitaine, pour son support financier destiné à l'acquisition d'un cluster de 256 processeurs, situé au laboratoire TREFLE.