

# Identification de modèles réduits pour des problèmes de convection forcée

Application à un écoulement laminaire stationnaire le long d'une marche descendante avec conditions aux limites thermiques instationnaires

**Yassine ROUIZI\***, Manuel GIRAULT, Yann FAVENNEC, Daniel PETIT

Laboratoire d'Etudes Thermiques, U.M.R. C.N.R.S. 6608, Université de Poitiers, ENSMA, Téléport 2, 1 avenue Clément Ader, B.P. 40109, 86961 Futuroscope Cedex, France,

[yassine.rouizi@let.ensma.fr](mailto:yassine.rouizi@let.ensma.fr), [manuel.girault@let.ensma.fr](mailto:manuel.girault@let.ensma.fr), [yann.favennec@univ-poitiers.fr](mailto:yann.favennec@univ-poitiers.fr),  
[daniel.petit@let.ensma.fr](mailto:daniel.petit@let.ensma.fr)

**Résumé** – Cette étude numérique porte sur l'identification de modèles réduits en convection forcée. Le principe consiste à minimiser une fonctionnelle d'écart entre les sorties du modèle détaillé (MD) et celles du modèle réduit (MR). La structure du MR est définie à partir de la discrétisation spatiale des équations locales. La méthode est appliquée sur un écoulement de convection forcée 2D stationnaire, laminaire, d'un fluide incompressible le long d'une marche descendante.

## Nomenclature

$N$	Nombre de nœuds du MD	$\vec{V}$	Vecteur vitesse
$n$	ordre du MR	<i>Symboles grecs</i>	
Re	Nombre de Reynolds	$\lambda$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$T$	Température, K	$\rho$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
$u, v$	Composante de vitesses, $m.s^{-1}$	$\varphi$	Densité de flux, $W.m^{-2}$

## 1. Introduction

Les méthodes de réduction permettent de construire des modèles d'ordre faible reproduisant les résultats de modèles de connaissance plus fins, avec une précision suffisante et des temps de calcul limités. La méthode d'identification modale [1] est développée depuis plusieurs années dans notre laboratoire, pour des problèmes de conduction [2] et de convection forcée [3]. Le principe consiste à identifier un modèle réduit (MR) en minimisant une fonctionnelle d'écart entre les sorties du modèle détaillé et celles du modèle réduit. Après avoir donné la forme des MR et présenté la méthode d'identification, l'approche sera illustrée dans le cas de l'écoulement le long d'une marche descendante pour :

- d'une part la mécanique des fluides seule, dans une gamme de nombres de Reynolds,
- d'autre part les transferts de chaleur instationnaires, pour un Reynolds fixé.

## 2. Modélisation du système étudié

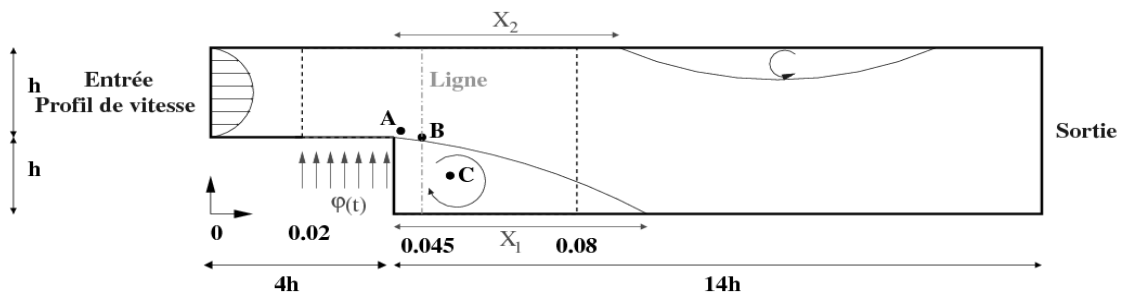


Figure 1: Géométrie du système étudié

On considère l'écoulement de convection forcée 2D stationnaire, laminaire, d'un fluide incompressible newtonien le long d'une marche descendante (cf. Figure 1). On suppose que les propriétés thermophysiques du fluide (air) ne dépendent pas de la température et que celle-ci est un scalaire passif. On considère un profil de vitesse parabolique à l'entrée du canal, avec un nombre de Reynolds  $Re = \bar{U}h/\nu$  et on impose un flux diffusif nul pour toutes les variables à la sortie du domaine. Les conditions aux limites thermiques sont une température  $T_\infty=300K$  imposée à l'entrée et une densité de flux de chaleur pariétale  $\varphi(t)$ , variable au cours du temps, appliquée juste avant la marche. Les équations du problème sont :

$$\text{Conservation de masse (continuité):} \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Quantité de mouvement :} \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2)$$

$$\text{Energie :} \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = \lambda \Delta T \quad (3)$$

Considérons une discrétisation spatiale de ces équations impliquant  $N$  nœuds de discrétisation, avec  $\mathbf{V} = [(u_i, v_i) \ i = 1, \dots, N]^t$ ,  $\mathbf{P} = [(p_i) \ i = 1, \dots, N]^t$  et  $\mathbf{T} = [(T_i) \ i = 1, \dots, N]^t$  les vecteurs contenant respectivement les valeurs des variables discrètes de vitesse, pression et température. Quelle que soit la discrétisation spatiale utilisée, les termes linéaires de l'équation (2) peuvent s'écrire sous la forme  $\mathbf{A}_f \mathbf{V}$  et les termes non-linéaires  $\mathbf{Q}_f \Psi(\mathbf{V})$ , où les matrices  $\mathbf{A}_f$  et  $\mathbf{Q}_f$ , ainsi que le vecteur  $\Psi(\mathbf{V})$  dépendent de la discrétisation utilisée.  $\Psi(\mathbf{V})$  contient des produits de la forme  $u_i v_j$ ,  $u_i u_j$  et  $v_i v_j$ . Compte tenu de l'équation de continuité (1), le Laplacien de la pression peut s'écrire en fonction des composantes de vitesse. Par conséquent, les termes venant de la discrétisation des gradients de pression dans l'équation (2) peuvent être écrits sous la forme  $\mathbf{D} \mathbf{P} = \mathbf{Q}_p \Psi(\mathbf{V})$ , où  $\mathbf{D}$  correspond à l'opérateur discrétisé  $-\nabla^2/\rho$ . Ces termes peuvent être intégrés dans la matrice  $\mathbf{Q}_f$ , et en incluant les conditions aux limites associées, on peut obtenir un MD sous la forme dite de « représentation d'état » :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_f \mathbf{V} + \mathbf{Q}_f \Psi(\mathbf{V}) + \mathbf{B}_f Re \\ \mathbf{Y}_f = \mathbf{C}_f \mathbf{V} \end{cases} \quad (4)$$

On peut constater que le champ de vitesse dépend uniquement du nombre  $Re$  ( $\mathbf{V}(t=0) = 0$ ). Ici  $\mathbf{B}_f$  est un vecteur d'entrée qui applique la contribution du nombre de  $Re$  sur chaque nœud. En effet, le profil de vitesse à l'entrée dépend uniquement de  $Re$ .  $\mathbf{C}_f$  est une matrice d'observation permettant de sélectionner tout ou partie du champ,  $\mathbf{Y}_f$  est le vecteur des observables.

Une approche similaire permet d'écrire la représentation d'état de l'équation de l'énergie (3):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_d \mathbf{T} + \mathbf{Q}_t \Pi(\mathbf{V}, \mathbf{T}) + \mathbf{B}_T \varphi(t) \\ \mathbf{Y}_T = \mathbf{C}_T \mathbf{T} \end{cases} \quad (5)$$

où  $\Pi(\mathbf{V}, \mathbf{T})$  est le vecteur modélisant les termes de transport et rassemblant les termes croisés. Le champ de température dépend aussi du flux  $\varphi(t)$ .  $\mathbf{B}_T$  est le vecteur de commande ou d'entrée reliant les nœuds du maillage à l'entrée thermique  $\varphi(t)$ .  $\mathbf{C}_T$  est une matrice d'observation permettant de sélectionner tout ou partie du champ,  $\mathbf{Y}_T$  est le vecteur des observables ou de sortie. Lorsque le champ de vitesse est supposé être connu et stationnaire, l'équation (5) peut être modifiée en écrivant  $\Pi(\mathbf{V}, \mathbf{T}) = \mathbf{M}(\mathbf{V}) \mathbf{T}$  où  $\mathbf{M}(\mathbf{V})$  est une matrice constante ne dépendant que de  $\mathbf{V}$ . L'équation (5) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{dc} \mathbf{T} + \mathbf{B}_T \varphi(t) \\ \mathbf{Y}_T = \mathbf{C}_T \mathbf{T} \end{cases} \quad (6)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_{dc}$  qui tient compte à la fois des phénomènes de diffusion et de convection.

Le principe repose sur l'identification d'un MR représenté par une équation d'état dans une forme modale. Il est montré ici comment formuler le MR. Deux MR seront construits ici: celui relatif à la mécanique des fluides appelé MRF (Modèle Réduit Fluide), l'autre relatif aux transferts de chaleur instationnaires, appelé Modèle Réduit Thermique (MRT).

Nous allons maintenant définir une structure pour le MRF, à partir du MD du système décrit par les équations (4). Imaginons que l'on résolve le problème aux valeurs propres associé à la matrice  $\mathbf{A}_f$ . Appelons  $\mathbf{F}$  la matrice diagonale dont les éléments sont les  $N$  valeurs propres de  $\mathbf{A}_f$  et  $\mathbf{M}_f$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants. Le changement de variables  $\mathbf{V} = \mathbf{M}_f \mathbf{Z}$  injecté dans les équations (4) permet d'obtenir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_f \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma}_f \Psi(\mathbf{Z}) + \mathbf{G}_f \text{Re} \\ \mathbf{Y}_f = \mathbf{H}_f \mathbf{Z} \end{cases} \quad (7)$$

On admet que le MR a la même structure que le MD mais avec  $n$  équations où  $n \ll 2N$ .

Dans le cadre de cette étude, l'ensemble du champ de vitesse sera observé :  $\mathbf{Y}_f = \mathbf{V}$ . De plus, l'écoulement étant supposé stationnaire, les équations (7) deviennent:

$$\begin{cases} 0 = \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma}_f' \Psi(\mathbf{Z}) + \mathbf{G}_f' \text{Re} \\ \mathbf{V} = \mathbf{H}_f \mathbf{Z} \end{cases} \quad (8)$$

De manière analogue, on peut écrire la forme du MRT. Soit  $\mathbf{M}_T$  la matrice modale de  $\mathbf{A}_{dc}$ . En effectuant le changement de variable  $\mathbf{T} = \mathbf{M}_T \mathbf{X}$  dans l'équation (6) on obtient:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{dc} \mathbf{X} + \mathbf{G}_T \varphi(t) \\ \mathbf{Y}_T = \mathbf{H}_T \mathbf{X} \end{cases} \quad (9)$$

Il est important de noter que les développements précédents ont pour seul but de nous fournir la structure des équations du MRF et du MRT. Notre approche ne requiert pas la résolution des problèmes aux valeurs propres associés aux matrices  $\mathbf{A}_f$  et  $\mathbf{A}_{dc}$ .

### 3. Identification des MR

L'objectif est d'identifier le MRF (Statique) donné par l'équation (8) et le MRT (Dynamique) donné par l'équation (9). Pour le MRF, les paramètres à identifier sont les composantes de  $\mathbf{\Gamma}_f'$ ,  $\mathbf{H}_f$  et  $\mathbf{G}_f'$ . Pour le MRT, ce sont celles de  $\mathbf{F}_{dc}$ ,  $\mathbf{H}_T$  et  $\mathbf{G}_T$ . Cependant le principe est le même pour les deux identifications. Pour chaque cas, soit  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur de paramètres,  $U$  l'entrée et  $\mathbf{Y}$  le vecteur de sortie. L'identification est réalisée à travers la minimisation d'un critère quadratique bâti sur l'écart entre les réponses du MD et celles du MR lorsqu'un même signal d'entrée  $U$  est appliqué aux deux modèles :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{N_d} (\mathbf{Y}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{Y}_{ij}^*) \quad (10)$$

Pour le MRF,  $U=\text{Re}$ ,  $N_d$  est le nombre de champs de vitesse utilisés pour l'indentification, chacun correspondant à un nombre de Reynolds spécifique et le nombre d'observables  $q$  est égal à  $2N$ . Pour le MRT,  $U(t)=\varphi(t)$ ,  $N_d$  est le nombre de pas de temps utilisés pour l'identification et  $q$  dépend du cas considéré (cf. paragraphe 4.2). Cette procédure de minimisation utilise une méthode de programmation non linéaire (Quasi - Newton) dans laquelle le gradient de  $J$  est calculé par une méthode adjointe décrite par Favennec et al. [4]. La minimisation de  $J$  est d'abord faite pour l'ordre  $n = 1$ . L'identification du MR d'ordre 2 est réalisée à partir du MR d'ordre 1. L'ordre  $n$  est incrémenté jusqu'à ce qu'une précision prédéfinie entre MD et MR soit obtenue ou jusqu'à ce que  $J$  ne puisse plus être diminué. Les

données du MD constituant le vecteur  $Y$  proviennent de simulations faites avec le logiciel Fluent®. Le modèle détaillé Fluent® a été validé en comparant les résultats avec des données issues de la littérature, en particulier les travaux expérimentaux de Armaly et al. [5] et les résultats numériques de Erturk [6].

## 4. Résultats

### 4.1 Mécanique des fluides

Les données de l'identification sont constituées de  $N_d = 7$  champs de vitesse stationnaires calculés avec Fluent®, pour des nombres de Reynolds : 100, 200, ..., 700. Une série de 6 MRF d'ordre  $n = 1$  à 6 est alors identifiée. Les résultats correspondants sont résumés dans le tableau 1, où  $J$  est donné, ainsi que les écarts quadratiques  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$  entre le MD et le MRF et les écarts maximum pour les composantes de vitesse  $u$  et  $v$ . Le MRF d'ordre 6 apporte peu d'améliorations par rapport au MRF d'ordre 5. En fait, comme le montre le tableau 2, le MRF d'ordre 4 est suffisant pour reproduire d'une façon satisfaisante les simulations Fluent®, pour 6 valeurs de  $Re$  de 150 à 650. Notons que ces tests ont été réalisés pour des valeurs de  $Re$  qui n'étaient pas utilisées dans la procédure d'identification. La figure 2 montre les champs de vitesse  $V$  calculés par Fluent® (60751 nœuds) et le MRF à 4 équations, pour  $Re = 450$ .

Ordre du MRF	$J$ ( $m^2.s^{-2}$ )	$\sigma_u$ ( $m.s^{-1}$ )	$\epsilon_u$ max ( $m.s^{-1}$ )	$\sigma_v$ ( $m.s^{-1}$ )	$\epsilon_v$ max ( $m.s^{-1}$ )
1	280.3876	3.56E-02	3.73E-01	2.89E-04	3.75E-02
2	59.878213	1.62E-02	3.20E-01	1.95E-04	2.16E-02
3	12.236368	7.22E-03	3.09E-01	1.30E-04	1.28E-02
4	2.5806505	3.33E-03	1.82E-01	8.84E-05	5.17E-03
5	0.9005884	1.94E-03	9.47E-02	6.76E-05	4.20E-03
6	0.3319171	1.18E-03	6.86E-02	5.27E-05	2.40E-03

Tableau 1: Résultats de l'identification du MRF

$Re$	$\sigma_u$ ( $m.s^{-1}$ )	$\epsilon_u$ max ( $m.s^{-1}$ )	$\sigma_v$ ( $m.s^{-1}$ )	$\epsilon_v$ max ( $m.s^{-1}$ )
150	2.47E-03	7.11E-02	8.96E-04	3.07E-03
250	3.39E-03	6.66E-02	1.28E-03	4.29E-03
350	4.85E-03	0.22491807	5.59E-04	2.08E-03
450	5.49E-03	0.220485051	1.12E-03	3.74E-03
550	5.03E-03	1.78E-02	1.41E-03	4.81E-03
650	1.47E-02	5.75E-02	3.13E-03	1.47E-02

Tableau 2: Tests avec le MRF d'ordre 4: validation pour différents  $Re$

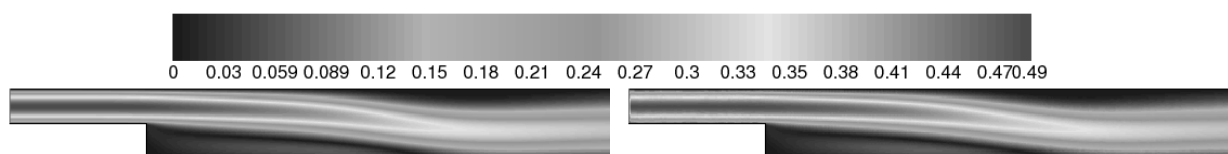


Figure 2: Champ de vitesse ( $m.s^{-1}$ ) donné par Fluent® (60751 nœuds, à gauche) et le MRF ( $n = 4$ , à droite), pour  $Re = 450$ .

### 4.2 Transferts de chaleur instationnaires pour un champ de vitesse fixé

Dans cette partie, le champ de vitesse est fixé pour  $Re = 500$  et on applique une densité de flux de chaleur  $\varphi(t)$  sur une partie du canal, juste avant la marche descendante le long de  $2h$  (cf. Figure 1). Il a été vérifié que pour un flux  $\varphi = 300 W.m^{-2}$ , la température maximale dans

le canal est telle que le nombre de Richardson est d'environ 0,1, ce qui nous permet de vérifier l'hypothèse d'un régime de convection forcée. Le champ de température a d'abord été calculé avec le modèle Fluent® (60751 nœuds) pour un flux appliqué de  $\varphi = 300 \text{ W.m}^{-2}$  pendant 200 pas de temps de 0,1 s. Les températures obtenues, auxquelles a été retranchée la température à l'entrée du canal  $T_{\infty} = 300 \text{ K}$ , ont été ensuite utilisées comme données. Trois cas, chacun comportant un ensemble de sorties spécifiques, ont été envisagés: une ligne de  $q=101$  nœuds située à  $x = 0,045 \text{ m}$ , une zone  $0,02 \text{ m} < x \leq 0,08 \text{ m}$  de  $q=22846$  nœuds indiqués par des lignes en pointillés dans la figure 1 et le champ de température complet ( $q=N=60751$ ). Dans le tableau 3 sont résumés les résultats de l'identification des MRT d'ordre 1 à 10. Seules les erreurs quadratiques moyennes  $\sigma_Y$  peuvent être comparées pour les 3 cas puisque  $J$  dépend du nombre de données. Le tableau 3 montre que le MRT d'ordre 8 devrait donner une bonne approximation des résultats de Fluent® pour les 3 cas, et que les MRT d'ordre supérieur ne sont pas meilleurs. La validation est effectuée pour le flux test  $\varphi(t)$  de la figure 3. La figure 4 montre l'évolution de la température en trois points A, B et C (c.f. Figure 1), à la fois pour le modèle Fluent® et le MRT d'ordre 8. La figure 5 donne le profil de température en  $x = 0,045\text{m}$  à l'instant  $t = 30 \text{ s}$  et la figure 6 montre les champs de température calculés avec Fluent® et le MRT d'ordre 8 pour la zone  $0,02 \text{ m} < x \leq 0,08 \text{ m}$  (c.f. Figure 1). Le tableau 4 résume tous les résultats de la validation et montre que les températures calculées avec le MRT d'ordre 8 sont très proches de celles données par Fluent®, avec un faible  $\sigma_Y$ . L'erreur maximale et la position correspondante dans l'espace et le temps sont aussi donnés.

Ordre du MRT	Ligne $x = 0,045 \text{ m}$ (101 nœuds)		Zone $0,02 \text{ m} < x < 0,08 \text{ m}$ (22846 nœuds)		Champ complet (60751 nœuds)	
	J (K <sup>2</sup> )	$\sigma_Y$ (K)	J (K <sup>2</sup> )	$\sigma_Y$ (K)	J (K <sup>2</sup> )	$\sigma_Y$ (K)
1	3,05E+03	5,48E-01	4,69E+05	4,52E-01	5,09E+05	2,89E-01
2	1,05E+02	1,02E-01	2,25E+04	9,90E-02	4,34E+04	8,43E-02
3	2,37E+01	4,83E-02	8,99E+03	6,26E-02	1,09E+04	4,22E-02
4	3,20E+00	1,77E-02	1,40E+03	2,47E-02	2,19E+03	1,89E-02
5	8,83E-01	9,33E-03	3,77E+02	1,28E-02	5,59E+02	9,57E-03
6	3,45E-01	5,83E-03	1,24E+02	7,36E-03	1,34E+02	4,69E-03
7	1,71E-01	4,10E-03	4,36E+01	4,36E-03	4,68E+01	2,77E-03
8	1,39E-01	3,70E-03	1,47E+01	2,53E-03	1,58E+01	1,61E-03
9	1,39E-01	3,70E-03	1,47E+01	2,53E-03	1,58E+01	1,61E-03
10	1,39E-01	3,70E-03	3,41E+07	3,85E+00	1,58E+01	1,61E-03

Tableau 3: Résultats de l'indentification des MRT

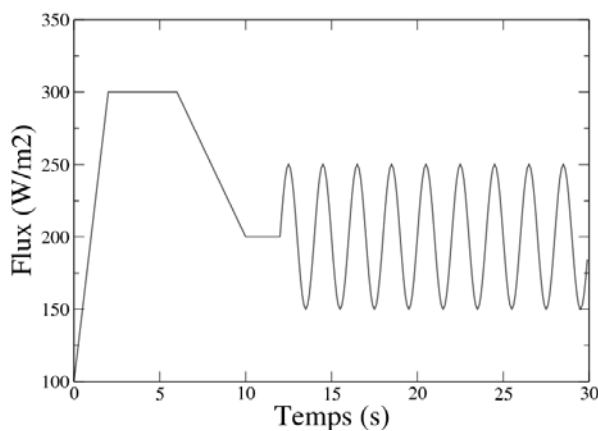


Figure 3: signal test  $\varphi(t)$

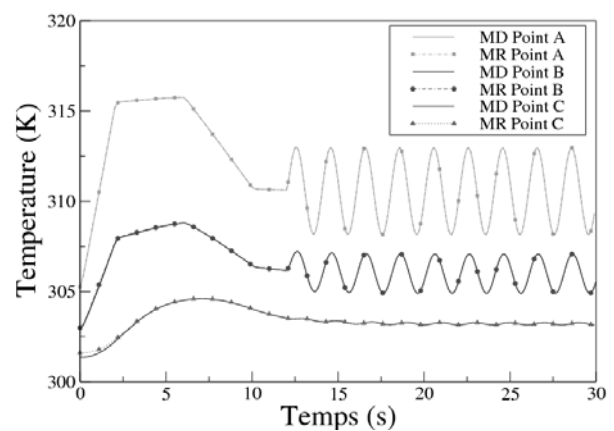


Figure 4: évolution de la température en 3 points du domaine. Comparaison MD/MRT

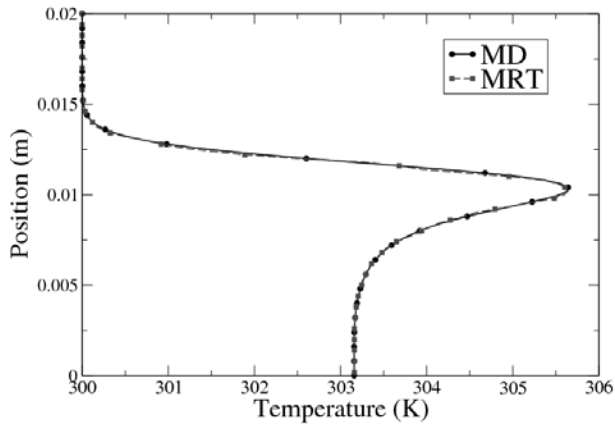


Figure 5: profil de température à  $x=0,045$  et  $t=30$  s. Comparaison MD/MRT

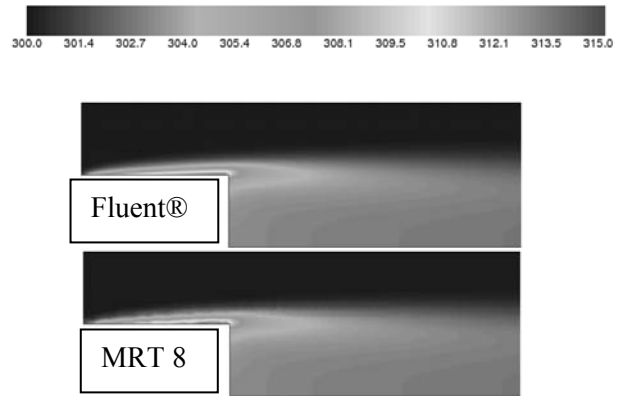


Figure 6: champ de température à  $t=30$  s pour  $0,02 \text{ m} < x < 0,08 \text{ m}$ . Comparaison MD/MRT

Cas	Ordre du MRT	$\sigma_Y$ (K)	$\epsilon$ max (K)	Xpos (m)	Ypos (m)	Temps (s)
Ligne $x = 0,045$ (101 nœuds)	8	3.69E-02	2.27E-01	4.50E-02	3.00E-03	0.8
Zone $0,02 \text{ m} < x < 0,08 \text{ m}$ (22846 nœuds)	8	3.23E-02	3.01E-01	6.56E-02	0.00E+00	0.0
Champ total (60751 nœuds)	8	2.38E-02	8.85E-01	1.80E-01	2.00E-04	0.0

Tableau 4: Validation du MRT par un flux test  $\varphi(t)$ , pour les 3 cas étudiés.

## 5 Conclusion

Une méthode d'identification de Modèle Réduit pour les écoulements de convection forcée est proposée dans cette étude. Le cas d'un écoulement 2D, laminaire, incompressible, soumis à une densité de flux de chaleur  $\varphi(t)$ , est considéré. Le champ de vitesse étant considéré comme indépendant de la température, deux types de MR sont formulés :

- Un pour les équations de Navier-Stokes et de continuité, permettant de calculer le champ de vitesse quelle que soit la valeur de  $Re$  dans la gamme  $[100,700]$  d'identification.
- Un pour l'équation de l'énergie, le champ de vitesse stationnaire étant associé à un  $Re$  fixé : ce MRT permet d'obtenir l'évolution de la température en fonction de  $\varphi(t)$ .

L'étape suivante consiste à coupler le MRF de l'équation (8) à un nouveau MRT dérivant de l'équation (5), contenant le couplage de vitesse – température, afin de pouvoir calculer le champ de température quelle que soit la valeur de  $Re$ .

## Références

- [1] D. Petit, R. Hachette, D. Veyret, A modal identification method to reduce a high order model: Application to heat conducting modelling, *Int. Jour. Modelling and Simul.*, Vol. 17 (1997), 242-250.
- [2] M. Girault, D. Petit, Identification methods in nonlinear heat conduction. Part I: Model Reduction, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 48 (2005), 105-118.
- [3] M. Girault, D. Maillet, J. R. Fontaine, R. Braconnier, F. Bonthoux, "Estimation of time-varying gaseous contaminant sources in ventilated enclosures through inversion of a reduced model", *International Journal of Ventilation* 4, N°4 (2006), 365-380.
- [4] Y. Favennec, M. Girault, D. Petit, The adjoint method coupled with the modal identification method for nonlinear model reduction. *Inverse Pbs in Science and Engineering*, 14 (2006), 153-170.
- [5] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira and B. Schonung, 1983, Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, *Journal of Fluid. Mech.* 127 (1983), 473-496.
- [6] E. Erturk, Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Flow Over a Backward-Facing Step, Part I: High Reynolds Number Solutions, to appear in *Computers & Fluid* (2007).