

# Convection thermosolutale générée dans une cavité poreuse par une source discrète de chaleur et de masse.

Zineddine ALLOUI<sup>1\*</sup>, Hassen BEJI<sup>2</sup>, Patrick VASSEUR<sup>1</sup>, Luc ROBILLARD<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École Polytechnique, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

<sup>2</sup> Laboratoire des Technologies Innovantes, Université Jules Vernes d'Amiens, rue des Facultés le Bailly, 800025 Amiens Cedex, France

\*(auteur correspondant: [zineddine.alloui@polymtl.ca](mailto:zineddine.alloui@polymtl.ca))

**Résumé** - Dans cet article le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq sont utilisés pour étudier la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire. La géométrie considérée est celle d'une cavité partiellement chauffée par le bas et refroidie par le haut. Les forces solutales résultent de l'imposition de concentrations constantes imposées sur les surfaces horizontales de la cavité. L'existence de solutions multiples pour ce type de configuration est démontrée numériquement.

## Nomenclature

$A$	rapport de forme de la cavité, $(L'/H')$	$u, v$	composantes de la vitesse adimensionnelle, $(u', v') \times (H'/\alpha)$
$B$	longueur adimensionnelle de la source de chaleur et de masse, $(d'/H')$	$V'$	vitesse de l'écoulement,
$D$	diffusivité massique, $m^2/K$	$x, y$	coordonnées adimensionnelles, $(x', y')/H'$
$H'$	hauteur de la couche poreuse, $m$		
$k$	conductivité thermique, $W/(m.K)$		
$K$	perméabilité du milieu poreux, $m^2$		
$L'$	largeur de la couche poreuse, $m$		
$Le$	nombre de Lewis, $(\alpha/D)$		
$N$	concentration		
$N_0$	concentration de référence		
$\Delta N$	écart caractéristique de concentration		
$Nu$	nombre de Nusselt		
$R_T$	nombre de Rayleigh thermique, $(g\beta'_T K \Delta T' H' / \nu \alpha)$		
$S$	concentration normalisée		
$Sh$	nombre de Sherwood		
$t$	temps adimensionnel, $t'\alpha/H'^2$		
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_C)/\Delta T'$		
$T'_0$	température de référence,		
$\Delta T'$	différence de température caractéristique, $(T'_H - T'_C)$		
			<b>symboles Grecs</b>
		$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2/s$
		$\beta_N$	coefficient d'expansion massique
		$\beta'_T$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
		$\varepsilon$	porosité normalisée du milieu poreux, $\phi/\sigma$
		$\nu$	viscosité cinématique du fluide, $m^2/s$
		$\varphi$	rapport des forces de poussée, $(\beta_N \Delta N / \beta'_T \Delta T')$
		$\rho$	densité du fluide, $kg/m^3$
		$\rho_0$	densité de référence, $kg/m^3$
		$(\rho C)_p$	chaleur massique milieu poreux,
		$(\rho C)_f$	chaleur massique milieu fluide
		$\phi$	porosité of du milieu poreux
		$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle, $\Psi'/\alpha$

## 1. Introduction

La convection thermosolutale a fait l'objet ces derniers temps de nombreuses études à cause de son importance dans plusieurs applications tant dans la nature que dans le domaine industriel. Ainsi, ce phénomène joue un rôle dans les magmas, terrestres ou planétaires, les métaux liquides, le stockage du gaz naturel et des déchets radioactifs, la fabrication des cristaux, le transport dans les sols,...etc. La convection thermosolutale dans laquelle le fluide est mis en mouvement sous l'effet combiné de gradients de température et de concentration a été observé pour la première fois semble t'il par Stommel [1] dans un contexte océanographique et sa formulation théorique a été réalisée par Stern [2]. Une revue bibliographique complète de travaux effectués dans ce domaine en milieux poreux est présentée par Nield et Bejan [3].

La plupart des études sur la convection naturelle au sein d'une couche poreuse chauffée par le bas portent sur la stabilité de ces systèmes [4]. Dans le cas d'une cavité partiellement chauffée par le bas les travaux disponibles dans la littérature sont relativement peu nombreux (voir par exemple réf. [5]). L'existence de solutions multiples, dans certaines conditions, a été démontrée par ces auteurs. Récemment, l'effet de la radiation, dans une cavité chauffée partiellement par le bas, a été étudié par Ridouane et Hasnaoui [6]. L'effet de ce paramètre sur l'existence de solutions multiples a été analysé pour une gamme importante des autres paramètres de contrôle.

Dans toutes les études portant sur la convection naturelle générée dans une cavité par une source discrète de chaleur, le fluide considéré est pur. L'écoulement est alors induit seulement par des gradients thermiques. Récemment, la convection naturelle engendrée par les effets combinés de gradients thermique et solutal a fait l'objet de nombreuses études à cause de l'importance de ce phénomène dans de nombreuses applications industrielles. Dans la présente investigation on considère le cas d'une cavité avec une source de chaleur et de masse située sur la paroi inférieure de la cavité poreuse. Les équations de base décrivant la convection naturelle doublement diffusive au sein de la cavité, sont résolues numériquement par la méthode des volumes de contrôle. Les paramètres de base gouvernant ce problème sont le nombre de Rayleigh  $R_T$ , le nombre de Lewis  $Le$ , le rapport des forces solutales et des forces thermiques  $\phi$ , et la longueur de la source  $d'$ . Les résultats numériques démontrent l'existence de solutions multiples pour certaines valeurs des paramètres de contrôle.

## 2. Description du problème et formulation mathématique

La configuration géométrique étudiée, les conditions aux limites et les axes de coordonnées sont montrées sur la figure 1. L'écoulement résultant est supposé bidimensionnel et laminaire et les propriétés du fluide sont considérées constantes. La variation de la masse volumique  $\rho$  suivant la température et la concentration est calculée en utilisant l'approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta'_T (T' - T'_0) - \beta'_N (N - N_0)] \quad (1)$$

Les équations gouvernantes exprimées en termes de la fonction de courant sont les suivantes :

$$\nabla^2 \Psi' = - \frac{gK\beta'_T}{\nu} \frac{\partial}{\partial x'} (T' + \frac{\beta'_N}{\beta'_T} N) \quad (2)$$

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \mathbf{V}' \cdot \nabla T' = k \nabla^2 T' \quad (3)$$

$$\phi \frac{\partial N}{\partial t'} + \mathbf{V}' \cdot \nabla N = D \nabla^2 N \quad (4)$$

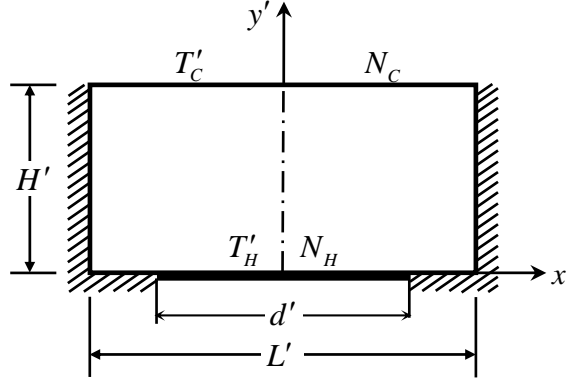


Figure 1 : Configuration géométrique du problème.

Sous forme normalisée, ces équations deviennent :

$$\nabla^2 \Psi = -R_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \phi \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (7)$$

Les conditions aux limites relatives à ce problème sont données par :

$$x = \pm A/2 \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$y = 1 \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad T = 0 \quad S = 0 \quad (9)$$

$$y = 0 \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$y = 0 \quad \text{sur l'élément } B : T = S = 1 ; \text{ sur le reste de la paroi: } \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

### 3. Solution numérique

La méthode de solution est basée sur le concept des volumes de contrôle et un maillage uniforme de  $(81 \times 81)$  a été utilisé pour obtenir la solution numérique. Les équations discrétisées ont été dérivées en les intégrant d'abord dans un petit volume de contrôle et ensuite en utilisant les différences centrées pour calculer les flux. Des différences avant ont été utilisées pour la discrétisation dans le temps. La résolution des équations discrétisées est basée sur la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées) à chaque pas de temps. Nous considérons que la solution finale est atteinte lorsque la condition de convergence, appliquée pour chaque quantité et à tous les points du maillage, est

suffisamment petite pour que des itérations supplémentaires n'introduisent pas de changement appréciable ( $\varepsilon \leq 10^{-6}$ ). Le programme élaboré a été testé en prenant comme références les résultats de Robillard et al. [5].

#### 4. Résultats et discussions

Le problème considéré est gouverné par cinq paramètres, à savoir  $R_T$ ,  $\varphi$ ,  $Le$ ,  $B$  et  $A$ . Dans la présente étude on se limite au cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ).

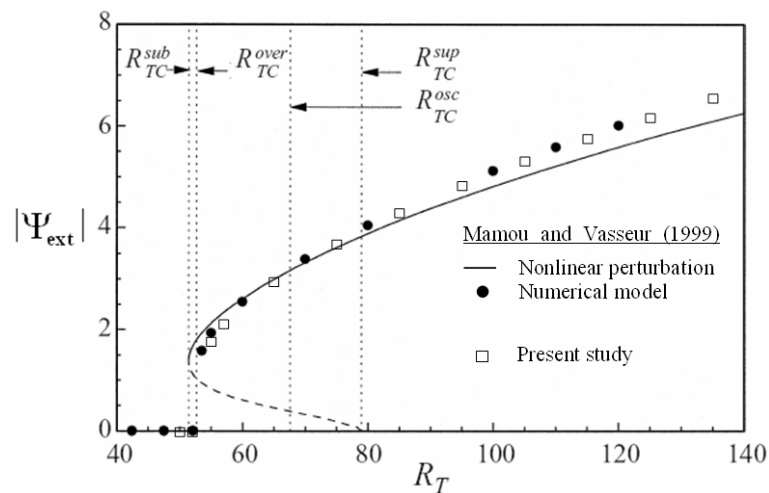


Figure 2 : Courbe de bifurcation pour  $A=1, B=1$ ,  $\varphi = -0.1$  et  $Le=5$

La figure 2 illustre les résultats obtenus dans le cas d'une cavité complètement chauffée par le bas ( $\varepsilon=0$ ). Cette situation, de type Rayleigh Bénard, a été considérée dans le passé par Mamou et Vasseur [7]. Dans cette courbe  $|\Psi_{ext}|$  représente le maximum de la fonction de courant au sein de la cavité, Il a été montré par ces auteurs que lorsque  $\varphi$  est négatif, i.e. quand les gradients thermiques imposés sur le bas de la cavité sont déstabilisants alors que les gradients solutaux sont stabilisants, la naissance de la convection est caractérisée par une courbe de bifurcation sous-critique avec un nombre de Rayleigh sous critique  $R_{TC}^{sub}$ , en dessous duquel le fluide est au repos. On observe que les résultats numériques obtenus dans la présente étude sont en accord avec les résultats analytiques et numériques de la référence [6].

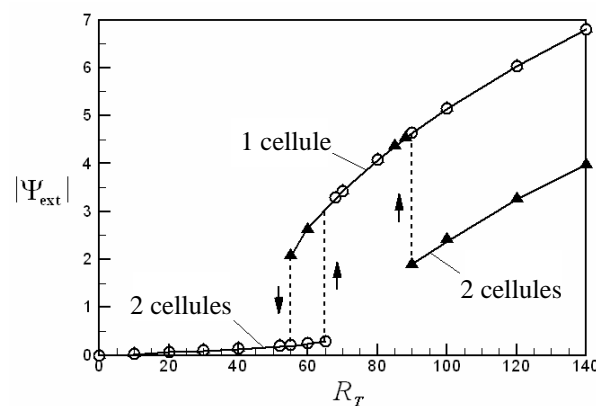


Figure 3 :  $|\Psi_{ext}|$  versus  $R_T$  pour  $A=1, B=0.6$ ,  $\varphi = -0.1$  et  $Le=5$

La figure 3 montre les résultats obtenus avec les mêmes paramètres que ceux de la figure 2 mais dans le cas où la source de chaleur et de salinité est discrète,  $B=0.6$ . Pour cette

situation la convection dans la cavité existe pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh  $R_T$ . La courbe montre l'existence de solutions différentes (unicellulaire ou bicellulaire) pour des gammes de Rayleigh données. Pour certaines valeurs du nombre de Rayleigh l'existence de solutions multiples est également possible. Ce phénomène, résultant de la non linéarité de équations gouvernantes, a été abondamment discuté dans la littérature (voir par exemple références [5] and [6]). Ces solutions multiples, quand elles existent, dépendent bien entendu des conditions initiales utilisées pour amorcer la solution numérique. La figure 3 indique également l'existence d'un phénomène d'hystérésis. Ainsi, la solution finale dépend clairement du sens de la progression des calculs numériques, indiqué par les flèches sur le graphique, utilisés comme conditions initiales au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de Rayleigh.

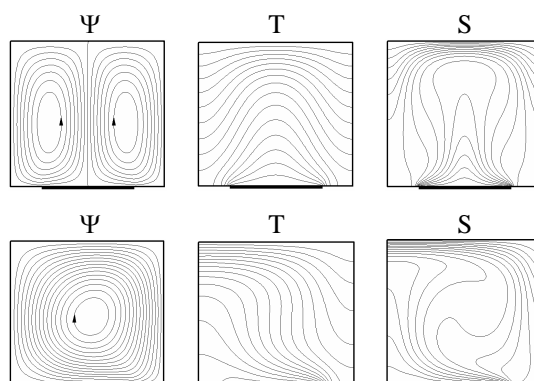


Figure 4 : Solutions multiples pour  $R_T=90$ ,  $A=1$ ,  $B=0.6$ ,  $\varphi= -0.1$  et  $Le=5$

La figure 5, obtenue pour le cas  $R_T=200$ ,  $A=1$ ,  $B=0.6$ ,  $\varphi= 0.5$  et  $Le=2$  illustre un autre exemple de solutions multiples pour ce type de configuration. Ainsi, en plus des deux écoulements naturels discutés dans la figure 4, il existe une autre solution bicellulaire avec l'écoulement dirigé vers la surface inférieure de la cavité. Cette solution antinaturelle est obtenue en utilisant des conditions initiales appropriées et ne peut se maintenir que dans une gamme de paramètres donnés.

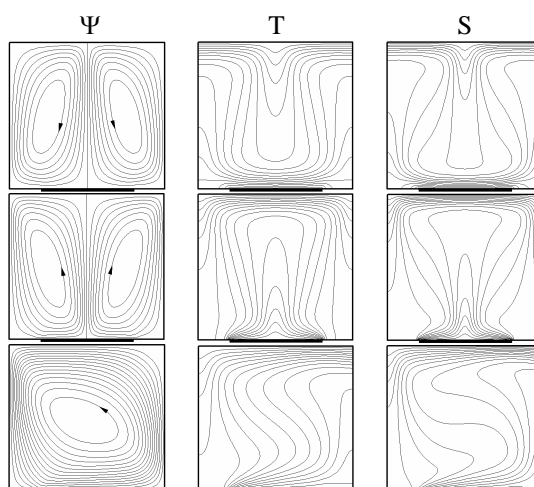


Figure 5 : Solutions multiples pour  $R_T=200$ ,  $A=1$ ,  $B=0.6$ ,  $\varphi= 0.5$  et  $Le=2$

## 5. Conclusion

Dans cette étude numérique la convection doublement diffusive au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire est considérée. La cavité est partiellement chauffée et salée par le bas. Les principales conclusions de la présente analyse sont les suivantes :

1° L'existence de deux régimes convectifs, l'un unicellulaire et l'autre bicellulaire, sont possibles

2° Dans le cas d'un régime unicellulaire la direction de l'écoulement peut être horaire ou antihoraire. Ce type d'écoulement est obtenu seulement si des conditions initiales appropriées sont utilisées.

3° Dans le cas d'un régime bicellulaire deux types de solutions sont possibles. Le premier est l'écoulement naturel, où le sens de l'écoulement au dessus de l'élément chauffant est ascendant. Le second est l'écoulement antinaturel, où le sens de l'écoulement au dessus de l'élément chauffant est descendant. Ces deux types d'écoulement sont obtenus, là encore, en utilisant des conditions initiales appropriées.

## Références

- [1] H. Stommel, A.B. Arons and D. Blanchard, "An Oceanographic Curiosity: the Perpetual Salt Fountain", *Deep. Sea Research* 3, 152-153 (1956).
- [2] M.E. Stern, "Collective Instability of Salt Fingers", *J. Fluid Mech.* 35, 209-218 (1969).
- [3] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer, 1999.
- [4] J.P. Caltagirone, "Convection in a Porous Medium", in G. Braun (éditeur), *Convective Transport and Instability Phenomena*, Karlsruhe, 199-232 (1981).
- [5] L. Robillard, C.H. Wang and P. Vasseur, "Multiple Steady states in Confined Porous Medium with Localized Heating from Below", *Numerical Heat Transfer* 13, 91-110 (1988).
- [6] M. Mamou and P. Vasseur, "Thermosolutal Bifurcation Phenomena in Porous Enclosures Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients", *J. Fluid Mech.*, Vol. 395, pp. 61-87 (1999).

## Remerciements

Cette recherche a été subventionnée par le fond de recherche «Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada ».