

# Estimation de la diffusivité thermique d'un revêtement par inversion dans l'espace de Hankel.

Damien LEGAIE\*, Hervé PRON, Christian BISSIEUX

Université de Reims Champagne-Ardenne, Groupe de Recherche En Sciences Pour l'Ingénieur, (URCA/GRESPI/LTP).

\*(auteur correspondant : [damien.legaie@univ-reims.fr](mailto:damien.legaie@univ-reims.fr) )

**Résumé** - Une estimation de paramètres par ajustement dans l'espace de Hankel d'un modèle analytique sur les parties réelles et imaginaires de la température complexe est présentée. Une caméra de thermographie enregistre les cartes de température de surface d'un échantillon (acier revêtu d'une peinture noire) soumis à une excitation laser modulée. Une détection synchrone numérique permet d'obtenir les parties réelles et imaginaires de la température complexe. Pour traiter l'ensemble des informations contenues dans ces cartes, une transformée de Hankel discrète est calculée après reconstruction d'un profil radial. Un algorithme de Gauss-Newton permet d'identifier les paramètres inconnus par minimisation des écarts entre le modèle et la transformée discrète expérimentale.

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$C_p$	chaleur massique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$\beta_i$	coefficient d'absorption optique de la couche $i$ , $m^{-1}$
$d$	épaisseur totale de l'échantillon, $m$	$\kappa_i$	indice d'extinction de la couche $i$
$h$	coefficient d'échange convectif, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\lambda$	variable de Hankel, $m^{-1}$ (fréquences spatiales)
$H$	réponse harmonique, $K.m^2.W^{-1}$	$\rho$	réflectivité
$k_i$	conductivité thermique de la couche $i$ , $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\rho_i$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$l$	épaisseur de la peinture, $m$	$\varphi_i$	puissance du laser par unité de surface, $W.m^{-2}$
$P$	amplitude du faisceau laser modulé, $W$	<i>Indices</i>	
$P_0$	puissance du faisceau laser modulé, $W$	$i$	indice de la couche
$q$	source volumique de chaleur, $W.m^{-3}$		
$r$	coordonnée radiale, $m$		
$r_0$	rayon du faisceau laser, $m$		
$T$	température, $K$		
$z, z'$	coordonnées axiales, $m$		

## 1. Introduction

La caractérisation de matériaux par méthodes inverses pour l'identification de leur diffusivité thermique a fait l'objet de nombreux travaux [1,2]. Le principe de l'étude est de modéliser, à l'aide d'un modèle analytique, la réponse en température du matériau mesurée par une caméra de thermographie infrarouge.

Les caméras à matrice de détecteurs permettent d'obtenir des cartes bien échantillonnées de la répartition spatiale de température. Cependant, l'utilisation brute de toutes les cartes dans une méthode inverse est une opération très longue, puisque la taille de la matrice de données est importante : typiquement 320x240 pixels. Le problème est en effet lié à l'inversion de cette matrice dans la procédure d'estimation par les moindres carrés. Pour contourner cette difficulté, il est judicieux de traiter les données dans l'espace des transformées intégrales (Laplace, Fourier, Hankel), ce qui a pour effet de réduire le bruit haute fréquence et d'améliorer la convergence [3,4].

Cette étude présente les résultats d'identification, dans l'espace de Hankel et à partir des cartes complètes de la température complexe, de la diffusivité thermique d'une peinture noire, commercialisée sous le nom de Krylon<sup>TM</sup> Ultra Flat Black. La technique expérimentale est la thermographie infrarouge photothermique sous excitation laser modulée appliquée en face avant de l'échantillon [5]. Une détection synchrone numérique fournit les cartes de température de surface, suivie par un traitement de repositionnement des données afin de construire un profil radial unique. A partir de celui-ci, une transformée discrète de Hankel est calculée. Un modèle analytique (utilisant la transformée de Hankel d'ordre 0) appliqué à un milieu bicouche est ensuite ajusté sur cette transformée expérimentale par un algorithme de type Gauss-Newton. L'ajustement étant réalisé dans l'espace des fréquences spatiales, un pas d'échantillonnage est déterminé ainsi qu'une plage de fréquence.

## 2. Principe et dispositif de mesure

La peinture est déposée sur un substrat de référence par pulvérisation. L'épaisseur du revêtement est mesurée à l'aide d'un appareil *Positector 6000*. L'échantillon est soumis à l'éclairement d'un laser YAG DPSS, doublé en fréquence, de longueur d'onde 532nm et de puissance 120mW. La modulation du faisceau laser est réalisée par une cellule acousto-optique, asservie par une fonction sinusoïdale générée sous *Labview<sup>TM</sup>*. La caméra de thermographie infrarouge CEDIP IRC 320-4LW est utilisée pour la mesure des variations de température [5]. Tandis qu'une photodiode permet de récupérer le signal de référence, le dispositif est piloté par une carte d'acquisition *National Instruments<sup>TM</sup>* et un programme sous *Labview<sup>TM</sup>* réalise la détection synchrone numérique.

## 3. Problème direct

### 3.1. Hypothèses

Le problème est modélisé par un matériau bi-couche à faces parallèles composé d'un milieu 1 correspondant au dépôt à étudier, d'épaisseur  $l$  et d'un milieu 2 correspondant au substrat de référence, d'épaisseur  $d-l$ . Les deux couches sont d'épaisseurs uniformes, les deux milieux sont admis homogènes et isotropes et leurs propriétés thermophysiques sont supposées constantes. L'échantillon est considéré comme semi-infini latéralement et le contact du revêtement sur le substrat est supposé parfait. La face avant ( $z=0$ ) est celle qui reçoit l'impact laser.

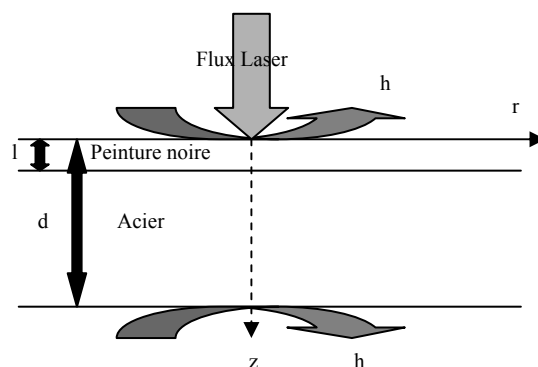


Figure 1 : Conditions imposées au modèle

### 3.2. Formulation

En considérant la géométrie du problème comme bidimensionnelle axisymétrique, l'équation de diffusion de la chaleur en régime sinusoïdal établi peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial z^2} - \frac{j\omega}{a} T(r,z) = -\frac{q(r,z)}{k} \quad (1)$$

Par combinaison d'une transformée de Hankel d'ordre 0 avec une réponse harmonique [6], il est alors possible de déterminer l'expression de la transformée de Hankel de la température complexe :

$$\bar{T}(\lambda, z) = \int_0^l H(\lambda, z|z') \bar{q}(\lambda, z') dz' \quad (2)$$

Les réponses harmoniques  $H(\lambda, z|z')$  sont déterminées par la méthode proposée par Burgener et Reedy et étendue à un milieu bicouche par Madison et Mac Daniel [5].

Les conditions aux limites imposées par le problème sont :

. Face avant : 
$$k_1 \frac{\partial T_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = h T_1(r, z) \Big|_{z=0} \quad (3)$$

. Face arrière : 
$$-k_2 \frac{\partial T_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=d} = h T_2(r, z) \Big|_{z=d} \quad (4)$$

. Conditions de continuité : 
$$-k_2 \frac{\partial T_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} = -k_1 \frac{\partial T_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} \quad (5)$$

$$T_1(r, z) \Big|_{z=l} = T_2(r, z) \Big|_{z=l} \quad (6)$$

La transformée de Hankel de la source  $\bar{q}(\lambda, z)$  est utilisée pour modéliser l'excitation. La distribution spatiale du flux laser est assimilée à une gaussienne et sa puissance par unité de surface peut donc s'écrire :

$$\varphi(r) = \frac{P}{2\pi r_0^2} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \quad (7)$$

En introduisant un coefficient d'absorption  $\beta_i$  ainsi qu'une réflectivité  $\rho$ , et en appliquant une transformée de Hankel sur l'expression précédente, les sources dans chaque milieu peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\bar{q}_1(\lambda, z) = \frac{(1-\rho)P\beta_1}{4\pi} \exp\left[-\left(\frac{\lambda r_0}{2}\right)^2\right] \exp[-\beta_1 z] \quad (8)$$

$$\bar{q}_2(\lambda, z) = \frac{(1-\rho)P\beta_2}{4\pi} \exp\left[-\left(\frac{\lambda r_0}{2}\right)^2\right] \exp[-\beta_1 l] \exp[-\beta_2(z-l)] \quad (9)$$

## 4. Traitement des données

### 4.1. Recherche du centre de la tache thermique

Pour la recherche du centre de la tache thermique, plusieurs techniques sont possibles, parmi lesquelles la méthode des moments, la méthode du pixel à plus fort niveau, la méthode de corrélation individuelle ou la méthode par ajustement d'une gaussienne bidimensionnelle.

Une étude comparant ces diverses méthodes a montré que la méthode de détermination du centre par ajustement d'une gaussienne était cependant la plus précise [7]. Une gaussienne bi-dimensionnelle dans le repère cartésien de l'image caméra peut s'écrire sous la forme :

$$L(x_i, y_j) = A e^{-\frac{(x_i - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

où  $A$  est le terme d'amplitude,  $\sigma$  le paramètre de largeur de la gaussienne,  $(x_i, y_j)$  le couple de coordonnées associé à chaque pixel et  $(x_0, y_0)$  les coordonnées du centre de la gaussienne.

Un ajustement de cette distribution sur la carte d'amplitude par une méthode inverse de type Levenberg-Marquardt a permis de déterminer les coordonnées du centre de celle-ci. Connaissant les coordonnées du centre et la distance inter-pixel, les distances ou rayons séparant le centre et les différents pixels caméra sont calculés. Pour le post-traitement, les données sont ensuite repositionnées en un profil unique en fonction des rayons.

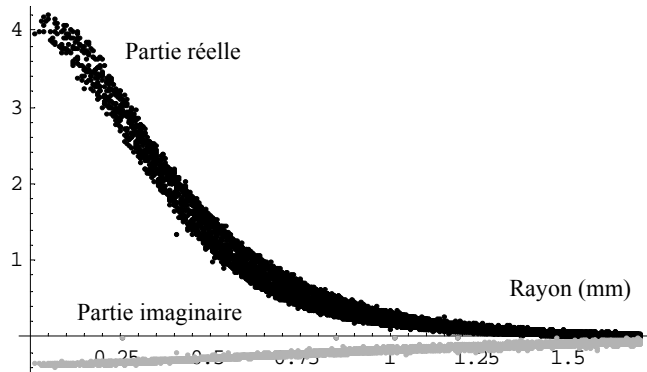


Figure 2 : Profil reconstitué (Acier 316L+peinture)

#### 4.2. Calcul d'une transformée de Hankel discrète

La transformée discrète de Hankel normée peut s'exprimer de la manière suivante :

$$T^*(\lambda, z) = \frac{2}{r_0^2} \sum_i T(r_i, z) J_0(\lambda r_i) r_i \Delta r_i \quad (11)$$

La normation permet d'obtenir un meilleur conditionnement des matrices pour l'inversion, et de donner davantage de sens physique à ces transformées, en les rapportant à l'intégrale du profil du faisceau laser :

$$T^*(\lambda, z) = \frac{\int_0^\infty T(r, z) J_0(\lambda r) r dr}{\int_0^\infty e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} r dr} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^\infty T(r, z) J_0(\lambda r) r dr \quad (12)$$

La transformée est ici évaluée à la surface du revêtement, soit en  $z=0$ . Les pas en fonction du rayon n'étant pas constants, l'intégration nécessite une approximation polynomiale. Cette opération est effectuée à l'aide d'une « toolbox » disponible sous *Mathematica*<sup>TM</sup>.

#### 5. Paramètres expérimentaux

La peinture testée a pour épaisseur  $18 \pm 1 \mu m$  et repose sur un substrat en acier 316L (de diffusivité thermique :  $3,77 \times 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}$ ). La mesure de réflectivité de la peinture a été réalisée sur un spectromètre équipé d'une sphère intégrante et a donné une réflectivité de 5%. Le coefficient d'échange convectif avec l'air ambiant est fixé à  $10 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ . Des séries de 200

images infrarouges sont acquises à une fréquence caméra de 50Hz et la fréquence d'excitation est de 1Hz.

Des études de sensibilité antérieures [5] ont montré l'importance de déterminer le rayon du faisceau ; en conséquence, les caractéristiques du faisceau laser ont été déterminées par la méthode du rasoir.

Malgré la connaissance des effets dus à la semi-transparence de certains revêtements dans l'infrarouge, nous avons considéré la peinture opaque dans la bande de notre caméra (8-12 $\mu$ m). Cette hypothèse est fondée sur le fait que la peinture est fortement chargée en particules de carbone-graphite qui ont un fort coefficient d'absorption dans l'infrarouge lointain. De plus, plusieurs échantillons ont été peints avec des épaisseurs de peintures différentes et nous n'avons pas constaté de variations d'émissivité avec la caméra.

L'étape suivante est la détermination de la bande et du pas fréquentiels appropriés à notre étude. A partir des variables classiques ( $u, v$ ) de Fourier, il est possible de déterminer la variable de Hankel puisque  $\lambda^2 = 4\pi^2(u^2+v^2)$ . A partir de cette relation, il s'agit de déterminer une fréquence spatiale de Hankel minimale ( $\lambda_{\min}=3000 \text{ m}^{-1}$ ), calculée à partir de  $u_{\min}$  correspondant à l'inverse de la taille de la fenêtre de la caméra. La fréquence spatiale maximale ( $\lambda_{\max}=150000 \text{ m}^{-1}$ ) est estimée à partir de l'inverse ( $u_{\max}$ ) de la distance inter-pixel, et en tenant compte du critère de Shannon. Cette fréquence maximale est ici dix fois supérieure au contenu fréquentiel du phénomène et le pas d'échantillonnage a été fixé à  $100 \text{ m}^{-1}$ .

## 6. Identification de la diffusivité thermique de la peinture noire

Dans ce travail, une chaleur volumique ( $\rho_l.Cp_l$ ) de  $2 \times 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$  pour la couche de peinture noire a été postulée. En pratique, c'est donc une valeur de la conductivité thermique et du coefficient d'absorption optique qui sont identifiées à l'aide de la méthode inverse.

Dans un premier temps, une étude en sensibilités aux différents paramètres (notamment  $k_l$ ,  $\beta_l$ ,  $l$  et  $k_2$ ) a été réalisée [4]. Il a par ailleurs été montré lors de cette étude que la mesure à 1Hz correspond à un domaine de très faible sensibilité au coefficient d'échange.

L'identification est réalisée en minimisant, au sens des moindres carrés ordinaires, par la méthode de Gauss-Newton, l'écart entre parties réelles et imaginaires de la température modélisée et celles issues de l'expérience. Les résultats de l'identification sont reportés dans le tableau 1. Les marges d'incertitudes présentées sont issues d'un test de Student et correspondent donc uniquement à l'incertitude d'ajustement.

Substrat	Conductivité thermique $k_l \text{ (W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$	Coefficient d'absorption optique $\beta_l \text{ (m}^{-1})$
Acier 316L	$0,152 \pm 0,025$	$(10 \pm 2) \times 10^4$

Tableau 1 : paramètres identifiés de la peinture Krylon™ sur un substrat en acier 316L

Le calcul de la diffusivité thermique, qui est ici la grandeur thermophysique pertinente, donne alors pour la peinture :

$$a_l = 0,15 / (2 \times 10^6) = 7,5 \times 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}.$$

L'étude montre que l'ajustement sur la partie réelle est meilleur que sur la partie imaginaire (figure 3). Cela est dû aux faibles valeurs de phase dans la petite tache thermique étudiée, ce qui a pour conséquence de faibles valeurs de la partie imaginaire. Le modèle est donc plus sensible à la partie réelle et l'ajustement est donc essentiellement conduit par celle-ci. De plus, avec cette méthode, les erreurs sur les paramètres d'entrée comme le rayon du faisceau laser ou l'épaisseur de dépôt apparaissent clairement ; le bruit à haute fréquence spatiale a en effet été filtré très efficacement et la convergence est alors plus rapide.

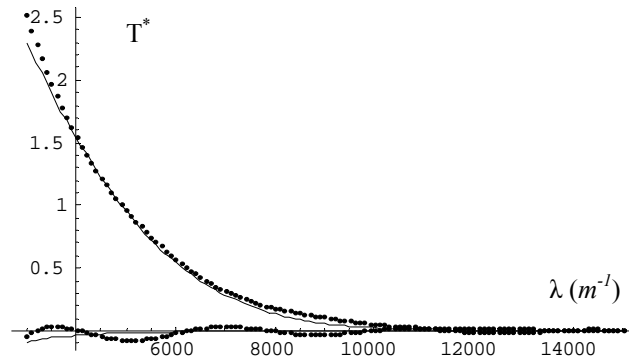


Figure 3 : Ajustement du modèle sur les données expérimentales

## 7. Conclusion

Le comportement thermique d'un échantillon bicouche a été correctement décrit à partir d'un modèle analytique utilisant la transformée intégrale de Hankel. L'estimation simultanée de la diffusivité thermique et du coefficient d'absorption optique du revêtement, en utilisant l'ensemble des cartes fournies par la caméra de thermographie, a été directement réalisée dans l'espace de Hankel.

## Références

- [1] Degiovanni A., Batsale J.C. et Maillet D., "Mesure de la diffusivité longitudinale de matériaux anisotropes, Panorama des techniques développées au LEMTA", *Revue générale de Thermique*, vol. 35, pp. 141-147, 1996
- [2] Enguehard F., Boshier D., Déom A., Balageas D., "Measurement of the thermal radial diffusivity of anisotropic materials by the converging thermal wave", *Materials Science and Engineering B*, vol. 5, pp. 127-134, 1990
- [3] Maillet D., Batsale J.-C., Bendada A., Degiovanni A., "Integral methods and nondestructive testing through stimulated infrared thermography", *International Journal of Thermal Science*, vol. 35, pp. 14-27, 1996
- [4] Legaie D., Pron H. and Bissieux C., "Characterization of a black paint layer by photothermal lock-in thermography. Parameter identification in the Hankel space", *QIRT Journal*, vol. 4, N° 2, pp. 201-218, 2007
- [5] Legaie D., Pron H. et Bissieux C., "Identification de propriétés thermophysiques de tôles grenillées par thermographie infrarouge sous excitation laser", *Congrès SFT 07, Ile des Embiez, 29 mai - 1er juin 2007*, pp. 831-836
- [6] Gillet Y., Bissieux C., "Diffusion harmonique de la chaleur appliquée au contrôle non destructif par méthodes photothermiques", *Intern. J. Thermal Sciences*, vol. 38, pp.530-540, 1999
- [7] Udrea D.D., Bryanston-Cross P.J., Lee W.K., Funes-Gallanzi M., "Two sub-pixel processing algorithms for high accuracy particle centre estimation in low seeding density particle image velocimetry", *Optics and Laser Technology*, vol. 28, pp. 389-396, 1996

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier la Région Champagne-Ardenne pour son soutien financier.