

# Modélisation multi-échelle des transferts de chaleur à une interface libre/poreux

Didier JAMET et Marion CHANDESRIS

DEN/DER/SSTH, CEA/Grenoble, 17, rue des martyrs, 38054 Cedex 9

Auteur correspondant : didier.jamet@cea.fr

**Résumé** Cette étude théorique permet de déterminer la forme des conditions de saut à imposer à une interface libre/poreux dans le cas d'un transfert thermique conducto-convectif perpendiculaire à l'interface. L'analyse est basée sur une approche à trois échelles de description de l'interface. A partir de résultats numériques obtenus à l'échelle microscopique, on montre en particulier que, à l'échelle mésoscopique, la conductivité thermique équivalente varie de manière non monotone à la traversée de l'interface. Cela conduit, à l'échelle macroscopique, à devoir imposer un saut de température à l'interface, ce saut étant relié à une grandeur en excès dont la valeur dépend uniquement du profil de conductivité thermique équivalente.

## Nomenclature

$C_p$	capacité calorifique à pression constante
$H$	hauteur du domaine homogène
$k$	conductivité thermique
$L$	longueur caractéristique des domaines homogènes
$q$	flux total d'énergie dans la direction normale à l'interface
$q_c$	flux conductif d'énergie dans la direction normale à l'interface
$S$	source volumique d'énergie
$T$	température
$u$	composante suivant la direction normale à l'interface de la vitesse du fluide
$y$	coordonnée d'espace normale à l'interface
$y_M$	position de l'interface discontinue

### Lettres grecques

$\delta$	épaisseur de la zone interfaciale
$\varepsilon$	épaisseur adimensionnelle de la zone interfaciale
$\phi$	porosité
$\rho$	masse volumique

### Indices

$e$	propriété effective
$f$	phase fluide
$l$	zone libre homogène
$p$	zone poreuse homogène
$s$	phase solide

### Autres

$\psi^{ex}$	grandeur en excès associée à la grandeur $\psi$
$\langle \psi \rangle$	moyenne volumique de $\psi$
$\langle \psi \rangle_i$	moyenne volumique intrinsèque de la phase $i$
$\bar{\psi}$	solution intérieure
$\bar{\psi}$	solution extérieure
$\psi^{(i)}$	ordre $i$ du développement asymptotique

## 1 Introduction

Les transferts de masse, de quantité de mouvement et de chaleur à l'interface entre un milieu poreux et un milieu libre jouent un rôle important dans beaucoup d'applications industrielles ou environnementales. Depuis l'étude pionnière de Beavers et Joseph [1] de l'écoulement de Poiseuille laminaire au-dessus d'un milieu poreux, beaucoup d'études ont été consacrées à la détermination, d'une part, de la forme des conditions de saut à imposer à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux et, d'autre part, de la valeur des coefficients de saut qui apparaissent dans ces conditions aux limites. Dans le cas du transfert de quantité de mouvement, nous avons développé une approche multi-échelle permettant d'étudier ces deux questions de manière théorique et d'y apporter des réponses. En particulier, cette démarche permet de déterminer la forme des conditions aux limites et la valeur des coefficients de saut à partir de la connaissance des transferts à l'échelle des pores.

Dans cette étude, on considère le cas du transfert de masse et de chaleur dans le cas d'un écoulement laminaire perpendiculaire à l'interface. Cette étude théorique permet, en premier lieu, de déterminer la forme des conditions aux limites à imposer à l'interface libre/poreux. En outre, elle permet de déterminer la valeur des coefficients de saut à partir des coefficients de transport à travers l'interface obtenues à l'échelle de prise de moyenne volumique. Dans notre étude, ces coefficients de transport sont obtenus à partir de résultats numériques à l'échelle des pores.

A l'échelle macroscopique (*cf.* figure 1), le milieu poreux est décrit comme un milieu homogène et l'interface avec le milieu libre est modélisée par une surface de discontinuité. A l'échelle microscopique, chaque pore du milieu poreux est décrit individuellement et l'interface avec le milieu libre est relativement difficile à définir sans ambiguïté. La modélisation des phénomènes de transport à l'échelle macroscopique au sein d'un milieu poreux homogène peut se déduire de celle à l'échelle microscopique par la méthode de prise de moyenne volumique. Si le filtre volumique est appliqué non seulement dans la zone poreuse homogène mais également à la traversée de l'interface libre/poreux, cette dernière devient une zone volumique de transition telle que représentée sur la figure 1. A cette échelle, dénommée échelle mésoscopique, toutes les grandeurs physiques varient brusquement mais néanmoins de manière continue à travers la zone de transition interfaciale.

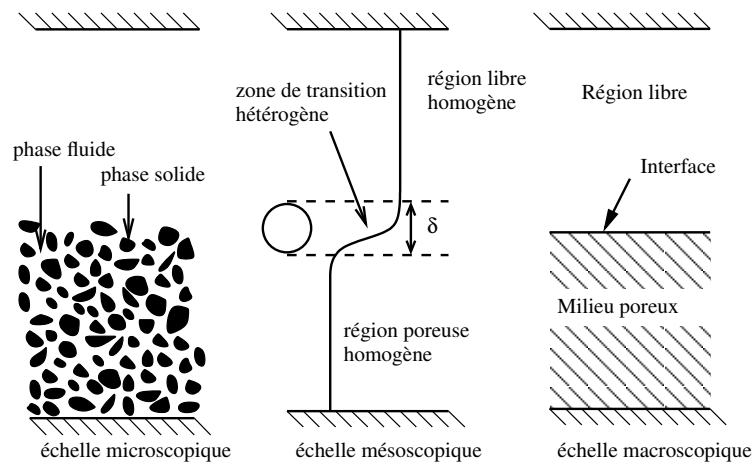


FIG. 1 – Echelles de description d'une interface libre/poreux

La démarche multi-échelle que nous développons consiste à effectuer deux changements d'échelle :

- (1) le changement d'échelle microscopique - mésoscopique pour déterminer les équations de transport dans tout le domaine, y compris au sein de la zone interfaciale libre/poreux ;
- (2) le changement d'échelle mésoscopique - macroscopique pour transformer la zone volumique interfaciale en une surface de discontinuité équivalente où appliquer des conditions aux limites.

Cette démarche a doré et déjà permis d'étudier de manière théorique le transfert de quantité de mouvement à l'interface libre/poreux dans le cas d'écoulements laminaires et turbulents parallèles et perpendiculaires à l'interface [2, 3, 4]. Dans cette approche, le premier changement d'échelle permet de modéliser les transferts interfaciaux et le deuxième changement d'échelle permet d'étudier les conditions aux limites à imposer à l'interface.

## 2 Transferts thermiques à une interface libre/poreux

### 2.1 Système étudié

Dans cette étude, on considère un problème conducto-convectif laminaire à une interface entre un milieu poreux et un milieu libre. Pour simplifier l'analyse, on considère un milieu poreux modèle bidimensionnel

constitué de carrés régulièrement espacés (cf. figure 2). L'écoulement est laminaire et perpendiculaire à l'interface. Du point de vue thermique, le milieu solide est chauffé uniformément par l'intermédiaire d'une source de chaleur volumique constante et uniforme  $S_s$ . Une température constante est imposée sur la frontière inférieure du domaine. Le solide est donc refroidi par l'écoulement du fluide comme représenté sur la figure 2.

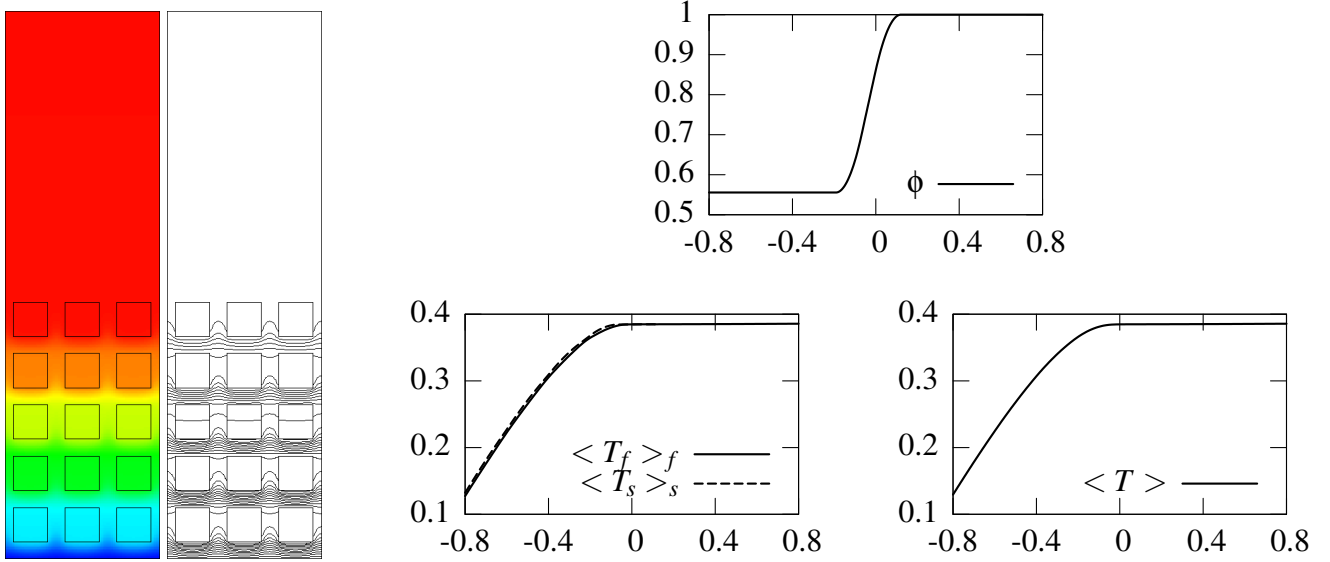


FIG. 2 – Géométrie du milieu poreux considéré et champ de température stationnaire et profils de porosité et de températures moyennes à la traversée de l'interface

Une simulation numérique à l'échelle microscopique permet de déterminer le champ de température stationnaire tel que représenté sur la figure 2. Par prise de moyenne volumique, on obtient les profils de température moyenne donnés sur la figure 2. On rappelle que les moyennes intrinsèques sont définies par  $\langle T_f \rangle_f / \phi_f$  et  $\langle T_s \rangle_s = \langle T \rangle / \phi_s$ . La figure 2 montre que dans le cas considéré, les températures moyennes solide et liquide sont très voisines, ce qui justifie l'utilisation d'un modèle à une seule température moyenne,  $\langle T \rangle = \langle T_f \rangle_f = \langle T_s \rangle_s$ .

Le modèle moyenné est unidimensionnel et les champs moyennés dépendent uniquement de la coordonnée normale à l'interface  $y$ . Le modèle à une température est donc le suivant<sup>1</sup> :

$$\frac{d}{dy} \left( \rho_f C p_f \phi_f \langle u_f \rangle_f \langle T \rangle \right) = \frac{d}{dy} \left( k_e \frac{d \langle T \rangle}{dy} \right) + \langle S_s \rangle \quad (1)$$

Il faut remarquer que la conductivité thermique effective  $k_e$  prend en compte non seulement les échanges thermiques conductifs mais également l'effet de dispersion.

La validité de l'équation (1) peut être démontrée par la méthode de prise de moyenne volumique dans le cas où le milieu poreux est homogène, voire faiblement hétérogène. En revanche, à ce jour, sa validité n'est pas démontrée dans le cas d'une forte hétérogénéité telle que celle de la zone interfaciale. Dans notre étude, cette forme est *postulée* en supposant simplement que les coefficients de transport du modèle varient dans la direction normale à l'interface :  $k_e(y)$ . Remarquons que  $\phi$  et  $\langle S_s \rangle$  varient également en fonction de  $y$  mais que la détermination de cette dépendance est simple, contrairement au cas de  $k_e(y)$ .

Par conservation du débit de masse, on montre facilement que  $\phi_f(y) u_f(y) = cste = U$ . La vitesse  $U$  est donc un paramètre de l'équation de bilan d'énergie (1) qui peut se mettre sous la forme suivant :

$$(\rho C p U) \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left( k_e(y) \frac{dT}{dy} \right) + S(y) \quad (2)$$

<sup>1</sup>Seule l'équation de bilan d'énergie est présentée, les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement ne présentant pas d'intérêt pour cette étude.

où, pour simplifier les notations, on a  $T = \langle T \rangle$ ,  $\rho C p U = \rho_f C p_f \phi_f \langle u_f \rangle_f$  et  $S = \langle S \rangle$ . Cette équation est valable dans l'ensemble du domaine, y compris à la traversée de la zone interfaciale où  $k_e(y)$  varie *a priori* assez fortement. Le profil  $k_e(y)$  tend vers la conductivité thermique du fluide  $k_f$  dans la zone libre homogène et vers la conductivité thermique équivalente dans la zone poreuse homogène.

L'équation (2) peut être intégrée une fois pour obtenir

$$q(y) = R(y) \quad (3)$$

où  $R(y)$  est la primitive de  $S(y)^2$  et où  $q$  représente le flux total d'énergie :

$$q = (\rho C p U) T - k_e \frac{dT}{dy} \quad (4)$$

Par prise de moyenne volumique des résultats numériques obtenus à l'échelle microscopique (*cf.*, figure 2), il est possible de déterminer les profils  $T(y)$  et  $S(y)$  (et donc  $R(y)$ ). L'équation (3) permet alors de déterminer le profil  $k_e(y)$  dans tout le domaine et en particulier dans la zone interfaciale comme le montre la figure 3.

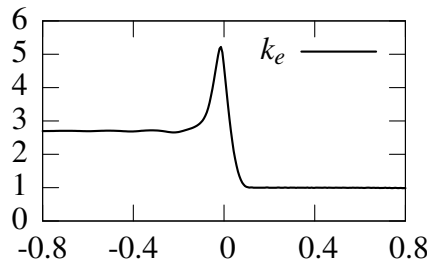


FIG. 3 – Profil de conductivité thermique équivalente  $k_e$  à la traversée de la zone interfaciale

Contrairement au cas purement conductif [5], ce profil présente un pic dans la zone interfaciale. Ce comportement est attribué à des échanges dispersifs plus efficaces dans la région interfaciale. Il faut remarquer que l'absence de zone de recirculation en aval des cubes, liée au caractère laminaire de l'écoulement, limite les échanges dans cette zone, ce qui explique que le maximum de conductivité thermique équivalente n'est pas observé juste en aval de la zone interfaciale mais à l'intérieur de celle-ci.

A ce stade de l'étude, on dispose d'un modèle à une température moyenne à l'échelle mésoscopique où les transferts interfaciaux sont modélisés *via* les variations de la conductivité thermique équivalente à la traversée de la zone interfaciale. Une fois ces transferts modélisés, il reste à déterminer les conditions de saut à imposer à l'interface discontinue macroscopique équivalente.

## 2.2 Analyse générique des processus interfaciaux

A l'échelle macroscopique, l'interface est discontinue et la température  $y$  est potentiellement discontinue. Dans les zones homogènes, la solution du problème à l'échelle macroscopique doit être identique à celle du problème à l'échelle mésoscopique. L'équivalence des deux problèmes dans les zones homogènes est assurée en imposant des conditions aux limites *adequat* couplant les équations macroscopiques des zones homogènes. L'analyse générique des processus interfaciaux [6] permet de déterminer la forme des conditions aux limites devant être imposées à l'interface discontinue pour assurer l'équivalence des deux échelles de description.

Appliquons tout d'abord cette analyse à l'équation (2). On a :

$$\frac{dq_{l,p}}{dy} = S_{l,p} \quad (5)$$

<sup>2</sup>La constante d'intégration est déterminée en imposant la valeur de  $k_e$  au sein de la phase fluide homogène dont on connaît la valeur :  $k_f$

En soustrayant l'équation mésoscopique (2) à l'équation macroscopique correspondante (5), en intégrant l'équation obtenue de  $H_p$  à  $y_M$ , en faisant de même dans la région libre (en intégrant de  $y_M$  à  $H_l$ ), en additionnant les deux équations ainsi obtenues et en tenant compte du fait que les solutions mésoscopique et macroscopique sont les mêmes en  $H_p$  et  $H_l$ , on obtient la relation suivante :

$$q_l(y_M) - q_p(y_M) = S^{ex} \quad (6)$$

où  $S^{ex}$  est la source d'énergie en excès. Une grandeur en excès  $\psi^{ex}$  est définie par

$$\psi^{ex} = \int_{H_p}^{y_M} [\psi(y) - \psi_p(y)] dy + \int_{y_M}^{H_l} [\psi(y) - \psi_l(y)] dy \quad (7)$$

La condition à l'interface (6) montre que, dans le cas général, le flux d'énergie est discontinu à l'interface. Cette condition caractérise la conservation de l'énergie à l'interface où il existe une source d'énergie surfacique  $S^{ex}$  (qui peut facilement être déterminée à partir du profil  $S(y)$ ).

Pour obtenir une deuxième condition (nécessaire) à l'interface, on applique l'analyse générique des processus interfaciaux à l'équation (3). On obtient alors facilement la relation suivante :

$$T_l(y_M) - T_p(y_M) = - \left( \frac{q_c}{k_e} \right)^{ex} \quad (8)$$

où  $q_c = -k_e dT/dy$  est le flux conductif. Cette deuxième condition à l'interface montre que la température est en général discontinue à l'interface.

Il faut remarquer que les conditions à l'interface (6) et (8) sont une généralisation des conditions obtenues dans le cas purement conductif [5]. De plus, la condition à l'interface (8) n'est pas fermée car la grandeur en excès  $(T/k_e)^{ex}$  fait intervenir le champ de température à l'échelle mésoscopique  $T(y)$  qui est inconnu lors de la résolution du problème à l'échelle macroscopique. Pour fermer cette condition, on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés.

### 2.3 Développements asymptotiques raccordés

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir une approximation de solutions d'équations différentielles dans lesquelles un petit paramètre existe. Dans notre cas, le petit paramètre est  $\varepsilon = \delta/L$  qui apparaît dans les profils  $k_e(y)$  et  $S(y)$  de l'équation différentielle (2).

La méthode consiste à décomposer le domaine en trois zones : la zone interfaciale où la solution varie rapidement et les deux zones homogènes adjacentes où la solution varie moins rapidement. Pour prendre en compte les fortes variations de la solution dans la zone interfaciale, la coordonnée intérieure  $\bar{y} = (y - y_M)/\varepsilon$  est introduite. Les solutions intérieure  $\bar{T}(\bar{y})$  et extérieure  $\tilde{T}(y)$  sont recherchées sous la forme d'un développement limité en  $\varepsilon$  :

$$\bar{T} = \bar{T}^{(0)} + \varepsilon \bar{T}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{T}^{(2)} + \dots \quad (9)$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}^{(0)} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{T}^{(2)} + \dots \quad (10)$$

Des conditions de raccord sont alors imposées pour coupler les solutions intérieure et extérieure et ainsi déterminer la solution dans tout le domaine. Ces conditions de raccord permettent également de coupler les solutions extérieures  $\tilde{T}_l$  et  $\tilde{T}_p$  à l'interface, ce qui est le problème que l'on cherche à résoudre. Les développements ne sont pas détaillés (*cf.* [3] pour plus de détails) et seuls les résultats obtenus sont présentés.

#### A l'ordre 0 en $\varepsilon$

$$\tilde{q}_l^{(0)} - \tilde{q}_p^{(0)} = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{T}_l^{(0)} - \tilde{T}_p^{(0)} = 0 \quad (12)$$

## A l'ordre 1 en $\varepsilon$

$$\tilde{q}_l^{(1)} - \tilde{q}_p^{(1)} = (\bar{S})^{ex} \quad (13)$$

$$\tilde{T}_l^{(1)} - \tilde{T}_p^{(1)} = -\tilde{q}_c^{(0)} \left( \frac{1}{\bar{k}_e} \right)^{ex} \quad (14)$$

Ces résultats montrent qu'à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , le flux total d'énergie et la température sont continus à l'interface. Ces deux conditions ont pour conséquence que, à l'ordre 0, le flux convectif est continu ainsi que le flux conductif. En revanche, à l'ordre 1, on trouve que le flux et la température sont discontinus, en accord avec l'analyse générique des processus interfaciaux. De fait, la condition (13) est strictement identique à la condition (6) obtenue par l'analyse générique. En revanche, la condition (14) diffère de la condition (8) : le flux conductif intervenant dans la condition (14) est celui à l'ordre 0 (qui est continu à l'interface). Les conditions (12) et (14) représentent en fait une fermeture de la condition (8).

Enfin, du fait de la forme des profils  $S(y)$  et  $k_e(y)$  à travers la zone interfaciale, on s'attend [5] à ce que, pour une position particulière de l'interface,  $S^{ex} = 0$  et  $(1/k_e)^{ex} \neq 0$ , ce qui signifie que le flux est continu mais pas la température.

## 3 Conclusions et perspectives

Dans cette étude théorique on a déterminé la forme des conditions aux limites à imposer à une interface libre/poreux pour un problème de transfert thermique conducto-convectif perpendiculaire à l'interface. On montre que les coefficients de saut qui apparaissent peuvent être déterminés à partir des profils à travers la zone interfaciales de grandeurs que l'on peut mesurer (ici par simulation numérique).

Les études futures doivent permettre de valider ces résultats en comparant les profils de température à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique obtenus en imposant les conditions aux limites et les paramètres de saut proposés. A plus long terme, il est nécessaire de généraliser cette approche au cas d'un modèle à deux températures à des écoulements turbulents.

## Références

- [1] G. BEAVERS et D. JOSEPH : Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30:197–207, 1967.
- [2] M. CHANDESRIIS : *Modélisation des écoulements turbulents dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2006.
- [3] M. CHANDESRIIS et D. JAMET : Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49(13-14):2137–2150, 2006.
- [4] M. CHANDESRIIS et D. JAMET : Boundary conditions at a fluid-porous interface : An a priori estimation of the stress jump coefficients. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50(17-18):3422–3436, 2007.
- [5] D. JAMET et M. CHANDESRIIS : On the intrinsic nature of jump coefficients at the interface between a porous medium and a free fluid region. *Submitted to Int. J. Heat Mass Transfer*, 2007.
- [6] D. A. EDWARDS, H. BRENNER et D. T. WASAN : *Interfacial Transport Processes and Rheology*. Butterworth-Heinemann, 1991.