

Modélisation du remplissage de moules pour l'industrie verrière

Hoang Quan NGUYEN^{1*}, Benjamin REMY¹ et Alain DEGIOVANNI¹

¹Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA. – ENSEM) UMR – CNRS 7563 – UHP – Nancy I, Institut National Polytechnique de Lorraine.

02, avenue de la Forêt de Haye B.P. 160, 54504 Vandoeuvre – lès – Nancy Cedex, France.

* (auteur correspondant: Hoang-Quan.Nguyen@ensem.inpl-nancy.fr)

Résumé L'objectif de cette étude est de simuler le remplissage des moules par gravité ou par pression pour l'industrie verrière. Le problème est relativement complexe à résoudre car les propriétés thermophysiques de verre, en particulier sa viscosité dynamique, dépendent fortement de la température. De plus, les différents modes de transferts que sont la conduction, la convection forcée et/ou naturelle, ainsi que le transfert radiatif apparaissent de manière fortement couplés dans un système où certaines frontières sont libres. Pour la prise en compte du transfert radiatif, nous présentons dans ce papier un modèle numérique simplifié permettant de résoudre l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) de façon simple et rapide. Ce modèle valable sur une très large gamme d'épaisseur optique peut être facilement implémenté dans différents codes de type Volumes Finis (Aquilon) ou Eléments Finis (FlexPDE). Différents cas de validation sont présentés en régime permanent et transitoire sur des géométries complexes multidimensionnelles.

Nomenclature

Symboles

c_p	chaleur spécifique, $J.kg^{-1} K^{-1}$
e	épaisseur de l'échantillon, m
F	flux radiatif incident
g	gravité, $m^2.s^{-1}$
h	coefficient de transfert de chaleur par convection, $W.m^{-2}.K^{-1}$
N	paramètre d'interaction conduction/rayonnement : $\lambda\kappa/4n^2\sigma T^3$
n	indice de réfraction du milieu
L	luminance, $W.m^{-2}.sr^{-1}$
p	pression, Pa
s	coordonnée curviligne, m
T	température, $^{\circ}C$
x_i	coordonnées cartésiennes, m
u, v, w	composantes de la vitesse en x_i , $m.s^{-1}$

Symboles grecs

α	absorptivité
ε	émissivité
κ	coefficient d'absorption, m^{-1}

λ	conductivité thermique, $Wm^{-1} K^{-1}$
μ	viscosité dynamique, $Pa.s$
Ω	angle solide, sr
ρ	réflectivité ou densité
σ	Constante de Stefan-Boltzmann, $W.m^{-2}.K^{-4}$
τ	épaisseur optique : $\tau=\kappa e$

Indices et exposants

c	conduction
d	réflexion diffuse
inc	incident
o	corps noir
p	paroi
r	rayonnement
s	réflexion spéculaire
v	convection
'	quantité directionnelle
∞	milieu extérieur

1. Introduction

Les milieux semi transparents où les différents modes de transfert (conduction, convection et radiation) apparaissent fortement couplés ont fait l'objet de nombreux études depuis plusieurs années. La principale difficulté provient du fort couplage qui existe entre l'équation de la chaleur et l'équation du transfert radiatif (E.T.R). Cette équation peut être résolue par différentes méthodes (voir Modest [1]). Les méthodes fines de types ordonnées discrètes, éléments finis ou volumes finis sont certes très précises mais aussi très pénalisantes en terme de temps de calcul et paraissent peu adaptées pour la simulation du remplissage de moules pour l'industrie verrière. En plus du problème de frontières libres apparaît également, dans la cas du verre, un couplage entre la thermique et la mécanique des fluides à travers la viscosité du fluide qui dépend très fortement de la température (loi exponentielle). C'est pourquoi, pour la simulation de procédé industriels où le temps de calcul apparaît comme étant un facteur incompatible avec les jalons de l'industrie, on préfère souvent s'orienter vers des méthodes numériques approchées comme par exemple l'utilisation de conductivités radiatives équivalentes avec prise en compte du saut de température à la paroi (modèle de Rosseland modifié) [2]. Dans ce travail, nous proposons de résoudre l'E.T.R couplée avec les équations de la chaleur et de Navier-Stokes par une méthode PN [3] qui va consister en la résolution d'un système d'équations aux moments. Nous introduirons une simplification à cette méthode qui va permettre de transformer l'E.T.R en une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) génératrice du second ordre que l'on pourra ensuite résoudre rapidement et simplement par des méthodes classiques comme celles utilisés pour la résolution des équations de la chaleur et de Navier-Stokes [4-5]. Dans une première partie, nous mettrons en place le modèle radiatif proposé avec sa simplification. Dans une seconde partie, nous présenterons différents résultats de simulations numériques, tout d'abord en remplissage isotherme par pression et gravité, puis anisotherme. Pour valider notre modèle radiatif et montrer qu'il reste relativement précise malgré l'approximation faite, nous présenterons différents résultats obtenus sur des cas simples de transferts couplés conduction, convection et rayonnement.

2. Modèle radiatif

2.1. Mise en place du modèle

Dans un milieu semi-transparent, absorbant émettant et gris, le champ de luminance directionnelle monochromatique $L'(s, \boldsymbol{\Omega})$ est régi par l'équation de transfert radiatif (E.T.R) qui s'écrit à la position s et dans la direction $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\frac{dL'(s, \boldsymbol{\Omega})}{ds} = -\kappa L'(s, \boldsymbol{\Omega}) + \kappa L_0[T(s)] \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^3 l_i \frac{\partial L'(s, \boldsymbol{\Omega})}{\partial x_i} = -\kappa L'(s, \boldsymbol{\Omega}) + \kappa L_b[T(s)] \quad (1)$$

κ est le coefficient d'absorption. $L_0[T(s)]$ représente la luminance du corps noir qui dépend de la température locale $T(s)$ du milieu selon la loi de Planck : $L_0(s) = n^2 \sigma T^4 / \pi$. l_i représentent sont les cosinus directeurs $\{l_1, l_2, l_3\} = \{\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi\}$ par rapport à x_1 , x_2 et x_3 . La température de milieu est décrite par l'équation de la chaleur :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{q}_c(s) + \mathbf{q}_v(s) + \mathbf{q}_r(s)] = 0 \quad (2)$$

Le premier terme de (2) représente le terme de stockage et le second la divergence du flux thermique totale incluant les trois modes de transferts thermiques :

Conduction $\mathbf{q}_c(s) = -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}$, Convection $\mathbf{q}_v(s) = \rho C_p c_p \mathbf{u} T$ et Rayonnement $\mathbf{q}_r(s) = \int_{\Omega=4\pi} L'(s, \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{u} d\Omega$. Si le fluide est incompressible, l'équation (2) peut s'écrire :

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot [\mathbf{q}_r(s)] = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

où $\nabla \cdot \mathbf{q}_r$ représente la divergence de flux radiatif donnée par (4). C'est à travers ce terme qu'apparaît le couplage entre l'E.T.R et l'équation de la chaleur :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r(s) = 4\pi\kappa \left[n^2 \frac{\sigma T^4(s)}{\pi} - L(s) \right] \quad (4)$$

\mathbf{u} est le champs de vitesse, qui est déterminé par les équations de Naviers-Stokes et de la conservation de la masse :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

Conditions aux limites radiatives : 2 types de conditions aux limites radiatives peuvent être écrite pour les parois opaques (7) ou les interfaces semi-transparentes (8).

$$L'_p(s, \boldsymbol{\Omega}) = \varepsilon_p L_{op}(s) + \rho_{sp} L'(s, \boldsymbol{\Omega}_{inc}) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\Omega_{inc}=2\pi} L'_p(s, \boldsymbol{\Omega}_{inc}) |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{inc}| d\Omega_{inc} \quad (7)$$

$$L'(s, \boldsymbol{\Omega}) = \tau_{sp} \left(\frac{n_{int}}{n_{ext}} \right)^2 L_p(T_{ext}) + \rho_{sp} L'_p(s, \boldsymbol{\Omega}_{inc}) \quad (\tau_{sp} + \rho_{sp} = 1) \quad (8)$$

Conditions aux limites thermiques : pour résoudre l'équation de la chaleur, on doit écrire des conditions aux limites conducto-radiatives ($\varepsilon_p = \alpha_p = 0 \rightarrow$ semi-transparentes). Ex :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1=0} + [\varepsilon_p \pi n^2 L_o(T_p) - \alpha_p F_p^-] = h_{cv} [T(0, y) - T_\infty] + [\varepsilon_p \pi L_o(T_p) - \alpha_p \pi L_o(T_p)] \quad (9)$$

2.2. Modèle radiatif simplifié par méthode PN modifiée

Le principe de la méthode d'approximation polynomiale consiste à rechercher une forme approchée de la luminance directionnelle $L'(s, \boldsymbol{\Omega})$ sous formes d'harmoniques sphériques :

$$L'(s, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m(s) Y_l^m(\boldsymbol{\Omega}) \text{ avec : } Y_l^m(\boldsymbol{\Omega}) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{jm\varphi} P_l^m(\cos\theta) \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (10)$$

$$\text{et } P_l^m(\mu = \cos\theta) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (\mu^2 - 1)^l \quad (\text{Polynômes de Legendre de } 1^{\text{ère}} \text{ espèce}) \quad (11)$$

$Y_l^m(\omega)$ sont des fonctions connues qui dépendent uniquement de l'angle solide (harmoniques sphériques normalisées) et $A_l^m(s)$ sont des fonctions inconnues qui ne dépendent que de la position s . Elle peuvent être déterminées à partir d'équations aux moments. Au premier ordre, la luminance directionnelle s'écrit :

$$L'(s, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (L^{(0)} + L^{(1)} \cos(\theta) + L^{(2)} \sin(\theta) \cos(\varphi) + L^{(3)} \sin(\theta) \sin(\varphi)) \quad (12)$$

où $L^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}$ et $L^{(3)}$ représentent respectivement la luminance moyenne (moment d'ordre 0 de la luminance) et les composantes du flux radiatif en x_1, x_2 et x_3 (moments d'ordre 1) :

$$L^{(0)} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} L'(s, \Omega) d\Omega \quad \text{et} \quad L^{(i)} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_i L'(s, \Omega) d\Omega \quad (13)$$

Pour déterminer ces moments, il faut ensuite mettre en place un système d'équations aux moments, obtenu en multipliant l'E.T.R par les différentes puissances des cosinus directeurs l_i , puis en l'intégrant sur tout l'angle solide Ω . Dans les équations aux moments d'ordre 1 apparaissent les moments d'ordre 2. Il est possible à l'aide de (14) de les exprimer en fonction de $L^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}$ et $L^{(3)}$ (équations de fermeture). On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial L^{(3)}}{\partial x_3} = 4\pi\kappa L_b(T) - \kappa L^{(0)} & (a) \\ \frac{1}{3} \frac{\partial L^{(i)}}{\partial x_i} = -\kappa L^{(i)} & (i = 1, 2, \text{ ou } 3) & (b) \end{cases} \quad (14)$$

En dérivant (14b) et en utilisant (14a), le problème se réduit alors à une seule équation génératrice en $L^{(0)}$ (luminance moyenne) du second ordre permanente, comparable à une équation de diffusion avec source. On peut ensuite calculer le flux radiatif à l'aide de (14b).

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 L^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L^{(0)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 L^{(0)}}{\partial x_3^2} \right) = -\kappa (4\pi\kappa L_b(T) - \kappa L^{(0)}) \quad (15)$$

Conditions aux limites radiatives : pour écrire les conditions aux limites de cette équation en $L^{(0)}$, nous avons utilisé les conditions aux limites proposée par Marshak [6]. Pour les parois opaques par exemple, cela donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega=0}^{2\pi} L'_p(s, \Omega) Y_l^m(\Omega) d\Omega = \\ \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left[\varepsilon_p L_{op}(s) + \rho_{sp} L'(s, \Omega_{inc}^*) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\Omega_{inc}^*=2\pi} L'_p(s, \Omega_{inc}^*) |\mathbf{n} \cdot \Omega_{inc}^*| d\Omega_{inc}^* \right] Y_l^m(\Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

2. Résultats de simulations numériques

Dans notre étude, nous nous intéressons à la simulation du remplissage de moules par gravité et par pression, procédés utilisés par l'industrie verrière et en particulier Daum et Baccarat. Dans un premier temps, nous avons cherché à simuler le remplissage de moules en anisotherme, à l'aide du code Aquilon développé par l'équipe de Caltagirone à Bordeaux [7]. Ce code est particulièrement adapté pour traiter les problèmes à frontières libres (méthode VOF, projection vectorielle et méthode du Lagrangien augmenté, inversion par méthode du bi-gradient conjugué stabilisé (BGCS)). Un exemple de résultat est donné sur la Figure 1. Une des spécificités du matériau verre est de connaître de fortes variations de température (passage de l'état solide et liquide) lors de l'opération de remplissage. Nous avons donc cherché à prendre en compte la thermodépendance de ses propriétés thermophysiques comme sa conductivité thermique $\lambda(T)$ et sa viscosité dynamique $\mu(T)$. Sur la Figure 2, nous avons donné les résultats obtenus pour un remplissage de moules anisotherme. Il s'agit d'un exemple simple où la pâte de verre chaude rentre en contact sur la paroi du moule en acier en forme de « U ». Elle se refroidit puis se solidifie. Un des grands avantages d'Aquilon est qu'il permet de prendre en compte les transferts non seulement dans la pâte de verre liquide, mais aussi dans les parois solides du moule et l'air, chacune de ces phases ayant chacune des temps

caractéristiques très différents. La limite du verre est visualisée par une courbe continue. On peut noter également que l'air s'échappe du moule lorsque la pâte de verre s'y introduit. Pour valider la prise en compte de la thermodépendance des propriétés thermophysiques, nous avons validé nos résultats dans un cas plus simple (écoulement de Poiseuille sous gradient de température, avec et sans obstacle) par intercomparaison avec Femlab. Pour valider le modèle radiatif proposé, nous avons cherché à comparer nos résultats avec ceux de la littérature sur des cas simples (cas du verre : $e = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 1 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ et $\rho C_p = 2.10^{-6} \text{ J/m}^3 \cdot ^\circ\text{C}$), tout d'abord en 1D en régime permanent (gradient de température $T_1 = 400\text{K}$ et $T_2 = 800\text{K}$) et pour différents valeurs du paramètre d'interaction conduction/radiation N_p : on retrouve typiquement un profil de température en forme de « S » (Voir Figure 3 et [8]), puis ensuite transitoire (Méthode Flash) où on fait apparaître un saut de température sur les thermogrammes aux temps courts (Voir [9]). Les cas linéaires (pointillés) et non linéaires (traits pleins) ont été étudiés. Nous nous sommes finalement intéressés à un problème plus complexe, c'est à dire aux transferts couplés conduction, convection et rayonnement dans une cavité en convection naturelle avec une géométrie en forme de « L » et présence d'un obstacle (Voir Figure 4).

3. Conclusion

Le modèle radiatif proposé permet de résoudre de façon simple et rapide les transferts couplés conduction, convection et rayonnement dans un milieu semi-transparent et pour des géométries complexes. La méthode proposée bien qu'approchée permet de prendre en compte l'aspect directionnel de la luminance et donne de très bons résultats quelle que soit l'épaisseur optique et le nombre de Planck. Ce modèle est un excellent compromis entre la précision des résultats et la rapidité des calculs. L'équation différentielle qui régit le flux radiatif étant du second ordre, elle peut être facilement résolue par des méthodes numériques classiques. Après cette phase de validation, le modèle a été testé sur des matériaux solides à interfaces et semi-transparentes. Reste maintenant à étendre son utilisation au cas des frontières mobiles.

Références

- [1] M.F. Modest, *Radiative heat transfer*, 2nd ed, New York: Academic Press, (2003).
- [2] L. Pierrot, Pierrot L., Accuracy of Rosseland approximation in toy models of glass tank, *Proc. XXth International Congress on Glass (XX ICG 2004, Kyoto, Japan)*, 2004, pp.59-74,.
- [3] A.G. Ratzel, *P-N Differential Approximation for Solution of One- and Two-Dimensional Radiation and Conduction Energy Transfer in Gray Participating Media*, Ph.D. dissertation (1981), Department of Mechanical Engineering, University of Texas.
- [4] S.V. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer And Fluid Flow*, Hemisphere publishing corporation, New York (1980).
- [5] D.A. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences*, Taylor & Francis, 1 edition (1997).
- [6] Marshak, R.E., Note on the Spherical Harmonics Methods as Applied to the Milne problem for a sphere, *Phys. Rev.*, vol. 71, 1947, pp. 443-446.
- [7] S. Glockner, AQUILON – Notice de développement, MASTER-ENSCP, Université Bordeaux I (2004).
- [8] G. Lauriat, *Contribution à l'étude du transfert de chaleur dans les milieux semi-transparentes*, Thèse 3ème cycle, Paris (1974).
- [9] S. André et A. Degiovanni, Theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 38, 1995, pp. 3401-3412.
- [10] M.F. Modest, The Improved Differential Approximation for Radiative Transfer in Multidimensional Media", *J. Heat Transfer*, Vol. 112, no. 3, (1990), pp. 819-821, 1990.

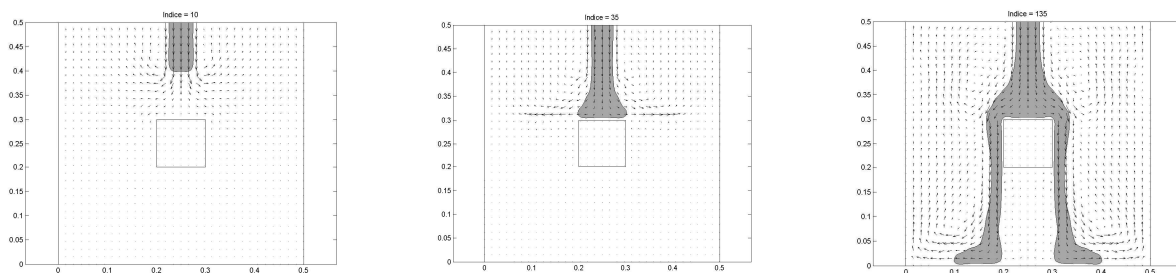


Figure 1 : Remplissage de moules par pression et gravité dans le cas isotherme (AQUILON)

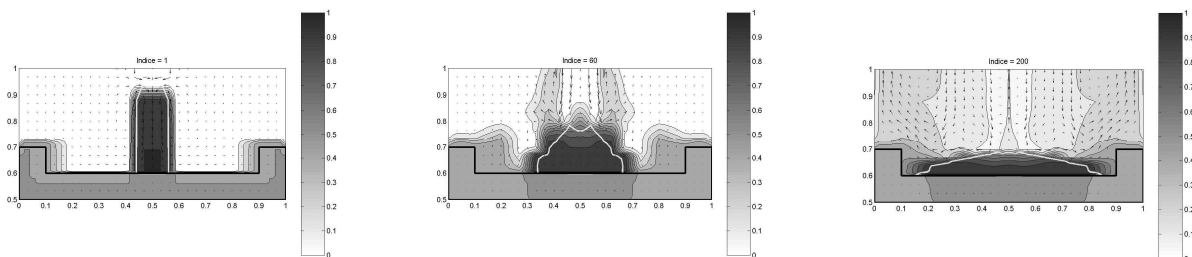


Figure 2 : Remplissage de moule par gravité dans le cas anisotherme (AQUILON)

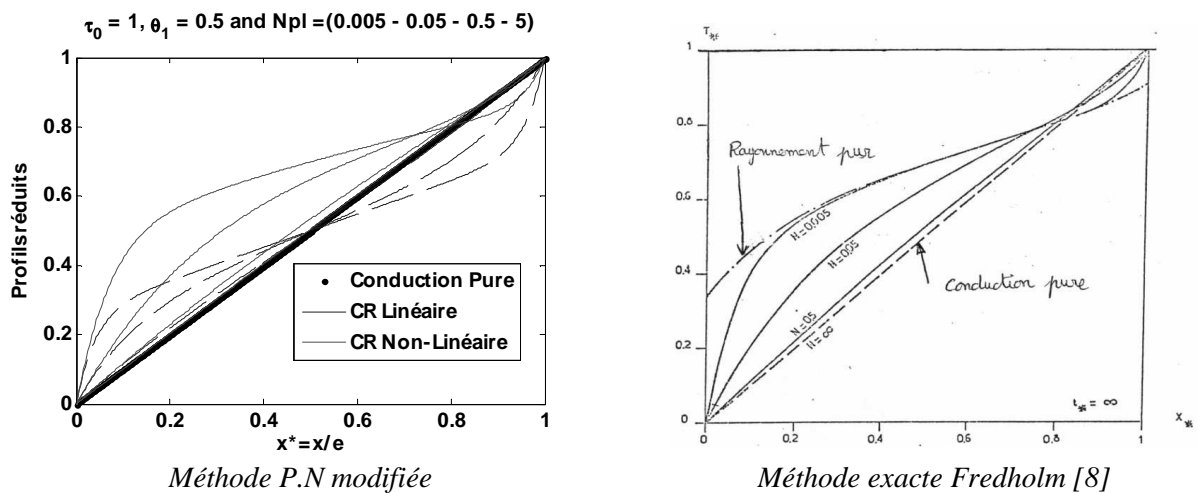


Figure 3 : Profils de température en fonction du nombre de Planck N (Permanent)

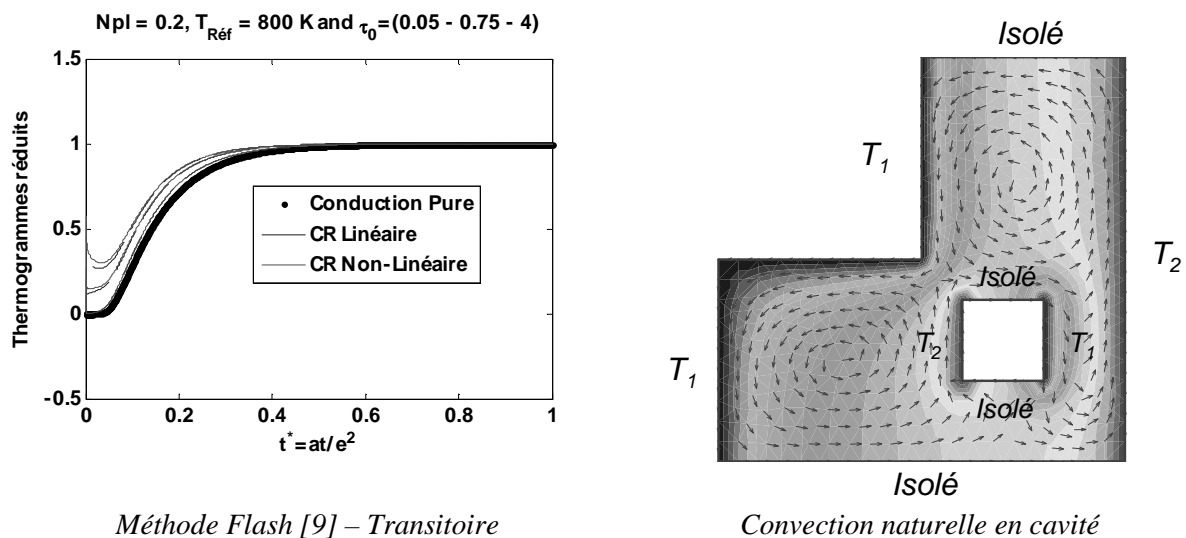


Figure 4 : Couplages Conducto-radiatif et Conducto-Convectivo-Radiatif