

Simulation Numérique Tri-dimensionnelle de l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement au sein d'une cavité différentiellement chauffée dans le cadre des faibles nombres de Mach

Sofiane MERADJI^{1*}, Gilbert ACCARY², Gilles SCARELLA³, Oleg BESSONOV⁴, Konstantin GAVRILOV¹, Dominique MORVAN¹

¹Laboratoire MSNM-GP, UMR 6181 CNRS, Technopôle de Château-Gombert, 38 rue Frédéric Joliot Curie, 13451 Marseille Cedex 13, France

²Université Saint-Esprit de Kaslik, Faculté de Sciences et de Génie Informatique, Département de Sciences et Technologies, B.P. 446, Jounieh, Liban

³I.N.R.A. Unité de Recherches Forestières Méditerranéennes, UR629, Domaine de Saint-Paul, Site Agroparc, F-84914, Avignon, France

⁴Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, 101, Vernadsky avenue, 119526 Moscow, Russia

* (auteur correspondant : sofiane@l3m.univ-mrs.fr)

Résumé – De nombreuses études ont porté sur l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée, notamment dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Dans la présente étude, on se propose d'étendre l'analyse de cette interaction au cas de l'approximation à faibles nombres de Mach (3D), et ce, pour un milieu transparent ou semi-transparent. Les équations de Navier-Stokes assorties de l'équation de l'énergie écrite pour un gaz parfait sont résolues à l'aide d'une méthode aux volumes finis. La méthode des ordonnées discrètes est employée pour résoudre l'équation du transfert radiatif. La validation est effectuée dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, suivie de simulations mettant en exergue la différence existant entre les formulations de Boussinesq et à faible nombre de Mach.

Nomenclature

C_p	chaleur spécifique, $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	T	température, K
g	gravité terrestre, $m.s^{-2}$	u, v, w	composantes du vecteur vitesse, $m.s^{-1}$
I	luminance, $W.m^{-3}.sr^{-1}$	x, y, z	coordonnées, m
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
L	longueur de la cavité, m	ε	émissivité de paroi
N	nombre de cellules de maillage	τ	épaisseur optique
n	vecteur normal à une surface	μ	viscosité dynamique, $Pa.s$
Nu	nombre de Nusselt	ρ	densité, $Kg.m^{-3}$
Pl	nombre de Planck	σ_B	constante de Stefan-Boltzmann,
Pr	nombre de Prandtl	<i>Indices et exposants</i>	
P_{th}	pression thermodynamique, Pa	θ	état de référence
Q	flux total de chaleur, $W.m^{-2}$	c	paroi chaude
R	constante des gaz parfaits, $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	f	paroi froide
Ra	nombre de Rayleigh	rad	radiatif
s	ordonnée discrète	*	grandeur adimensionnée

1. Introduction

La simulation numérique d'écoulements fluides avec des transferts de chaleur se produisant dans des milieux semi-transparentes à des températures élevées est un problème complexe de

Mécanique des Fluides. La résolution de ce problème passe essentiellement par la prise en compte de phénomènes non-linéaires : (i) les termes convectifs des équations généralisées de Navier-Stokes (NS) et (ii) l'équation du transfert radiatif (ETR). La résolution numérique de l'ETR implique un coût supplémentaire, dû à la nature directionnelle de l'ETR. Dans la présente étude, le couplage entre la convection naturelle et le rayonnement est analysé en 3D dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée. Le problème traité, inspiré des travaux de Colomer [1], a été résolu pour une valeur du nombre de Rayleigh et une valeur du nombre de Planck qui sont les principaux paramètres de contrôle de la présente étude. L'investigation porte sur le cas de milieux transparents et de milieux semi-transparent. La validation du code a été menée dans le cadre de l'approximation de Boussinesq (ABO). L'analyse a ensuite été étendue au cas de l'approximation à faibles nombres de Mach (AFM) permettant d'appréhender des configurations présentant des écarts de température élevés.

2. Configuration

On se propose d'analyser l'écoulement ainsi que les transferts thermiques se produisant au sein d'un milieu fluide homogène occupant une cavité cubique de longueur L , en considérant le cas d'un milieu transparent ainsi que le cas d'un milieu gris, purement absorbant. Comme l'illustre la figure 1, la paroi gauche est isotherme et maintenue à la température T_c , la paroi droite est également isotherme et maintenue à la température T_f (avec $T_c > T_f$), tandis que les quatre autres parois sont supposées adiabatiques. Les parois solides sont traitées comme étant des corps noirs.

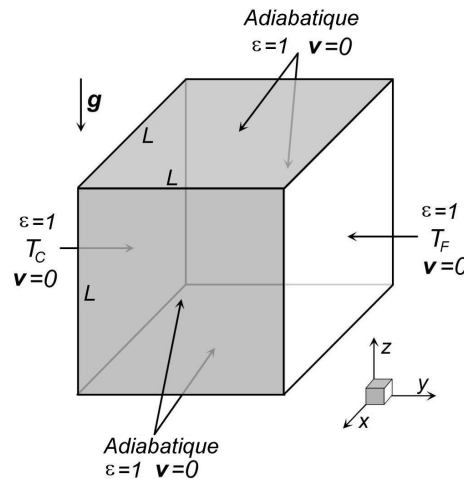


Figure 1 : Géométrie de la configuration retenue et conditions aux limites.

3. Modélisation

On considère le cas d'un fluide newtonien, supposé laminaire et stationnaire, dont l'écoulement est régi par les équations de NS exprimées dans le cadre de l'AFM pour un gaz parfait. La méthode des ordonnées discrètes (MOD) est utilisée pour la résolution de l'ETR, dans le cas où la diffusion est négligée [2]. Le couplage entre le rayonnement et la convection, dans le cas d'un milieu semi-transparent, est assuré par l'introduction d'un terme source dans l'équation de conservation de l'énergie. Le bilan d'énergie, exprimé sous une forme dimensionnée, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho T u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k_0}{C_{p0}} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right) - \nabla \cdot \mathcal{Q}_{rad}$$

où le terme radiatif est présenté sous la forme d'une différence entre émission et absorption :

$$\nabla \cdot Q_{rad} = \frac{\tau}{C_{p0}L} \left(4\sigma_B T^4 - \int_{4\pi} I ds \right)$$

Les propriétés de l'ETR ainsi que les différentes méthodes de résolution sont détaillées dans [2]. Une condition d'adhérence est imposée sur l'ensemble des parois et une température uniforme est imposée sur les parois gauche et droite (fig. 1). Sur les parois adiabatiques, on impose un flux total nul (somme de deux contributions : conduction et rayonnement). Le gradient de température sur les parois adiabatiques a alors pour expression :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{k_0} Q_{rad} \cdot n \quad \text{avec} \quad Q_{rad} \cdot n = \int_{4\pi} (n \cdot s) I ds$$

où $Q_{rad} \cdot n$ représente le flux radiatif à travers une surface de normale n . Par ailleurs, à l'instant initial, le fluide est supposé au repos et isotherme à la température $(T_c + T_f)/2$. La structure de l'écoulement ainsi que la distribution de la température sont gouvernées, pour une valeur donnée de l'épaisseur optique τ , par le nombre de Rayleigh (Ra), le nombre de Prandtl (Pr), le nombre de Planck (Pl) tel qu'il est défini dans [1] et par la température adimensionnée de référence T_0^* :

$$Ra = \frac{g \rho_0^2 L^3 (T_c - T_f) Pr}{T_0 \mu_0^2}; \quad Pr = \frac{\mu_0 C_{p0}}{k_0}; \quad Pl = \frac{k_0 (T_c - T_f)}{L \sigma_B T_f^4}; \quad T_0^* = \frac{T_f}{(T_c - T_f)}$$

On a considéré le cas de l'air ($R = 287 J.Kg^{-1}.K^{-1}$, $C_{p0} = 1004.5 J.Kg^{-1}.K^{-1}$, $Pr = 0.71$), une cavité cubique de longueur $L = 1m$ et une valeur standard de la pression thermodynamique de référence $P_{th0} = 1.013 \times 10^5 Pa$. La présente étude est caractérisée par les paramètres de contrôle $Ra = 10^6$ et $Pl = 0.016$. La conductivité thermique obtenue à partir de $k_0 = Pl \sigma_B T_f^4 L / (T_c - T_f)$ et la viscosité dynamique donnée par $\mu_0 = k_0 Pr / C_{p0}$ sont constantes. L'intensité de la gravité terrestre exprimée par $g = Ra \mu_0^2 T_0 / (\rho_0^2 Pr L^3 (T_c - T_f))$ est modulée et la valeur moyenne de la densité est donnée par $\rho_0 = P_{th0} / RT_0$. Dans le contexte de l'AFM, la température moyenne $T_0 = (T_c + T_f)/2$ est prise égale à $600 K$ et la température adimensionnée de référence $T_0^* = 1$, conduisant à $T_c = 800 K$ et $T_f = 400 K$. Des modifications mineures ont été apportées au code de calcul afin d'être en mesure de reproduire le benchmark de Colomer dans le cadre de l'ABO [1]. Pour cela, il a été nécessaire d'adopter les mêmes valeurs des paramètres de contrôle. Ainsi, pour $T_0 = 300 K$ et $T_0^* = 17$, les températures sur les parois thermostatées valent $T_c = 308.5 K$ et $T_f = 291.5 K$. Le flux total de chaleur (localement à la paroi chaude), exprimé sous forme adimensionnée, est donné par :

$$Q^* = \frac{1}{Q_0} \left(-k_0 \frac{\partial T}{\partial n} + Q_{rad} \cdot n \right)_{y=0} \quad \text{avec} \quad Q_0 = \frac{k_0 (T_c - T_f)}{L}$$

4. Aspects numériques

Les équations de conservation sont résolues de manière découplée par une méthode du type volumes finis en formulation implicite, sur un maillage structuré, décalé mais non uniforme. La discrétisation spatiale est basée sur des schémas d'ordre élevé et l'emploi de limiteurs de flux. Le schéma QUICK est utilisé pour les termes convectifs et pour les termes diffusifs on a recours à un schéma centré avec corrections différées. Le couplage vitesse-pression est appréhendé à l'aide de l'algorithme SIMPLER. Les systèmes linéaires d'équations algébriques sont résolus à l'aide de solveurs itératifs (Gradient Conjugué, BiCGStab). Le code de calcul développé a fait l'objet de nombreuses validations, notamment en convection naturelle et en convection mixte [3]. Une solution stationnaire est supposée atteinte lorsque les résidus de toutes les équations de conservation, exprimées sous forme dimensionnée, atteignent 10^{-9} en norme $L-\infty$. Concernant la MOD, l'approximation S^8 a été choisie pour réaliser les calculs avec l'utilisation d'une quadrature identique à celle donnée dans [2] et du schéma décentré amont Step.

5. Validation du code: Cas de l'approximation de Boussinesq

Le code de calcul développé a été validé sur la base des solutions de référence obtenues par Colomer [1]. Une partie seulement des résultats confrontés est présentée, le but étant de valider l'approche numérique. Les comparaisons montrent qu'un accord quantitatif est observé avec les solutions de référence. Cet accord est obtenu avec un maillage non-uniforme comprenant $N^3 = 100^3$ volumes de contrôle et resserré près des parois. La figure 2 montre que la solution obtenue présente une symétrie par rapport au centre de la cavité ; il s'agit d'une propriété bien connue de la convection naturelle pour la configuration considérée. Sur la même figure, on note également que le gradient de température aux parois adiabatiques est non nul lors de la prise en compte des effets radiatifs. La dépendance en maillage est analysée, pour le même jeu de paramètres de contrôle. A cet effet, trois maillages différents comprenant respectivement 60^3 , 80^3 et 100^3 volumes de contrôle sont testés ; la convergence asymptotique vers une solution peut être observée sur la figure 3(a) montrant la distribution du flux de chaleur moyen à la paroi chaude. Les flux de chaleur sur la paroi chaude ont également été calculés pour différentes valeurs de l'épaisseur optique, comme le montre la figure 3(b) et sont en accord avec les travaux de Colomer [1] incluant le comportement aux bords.

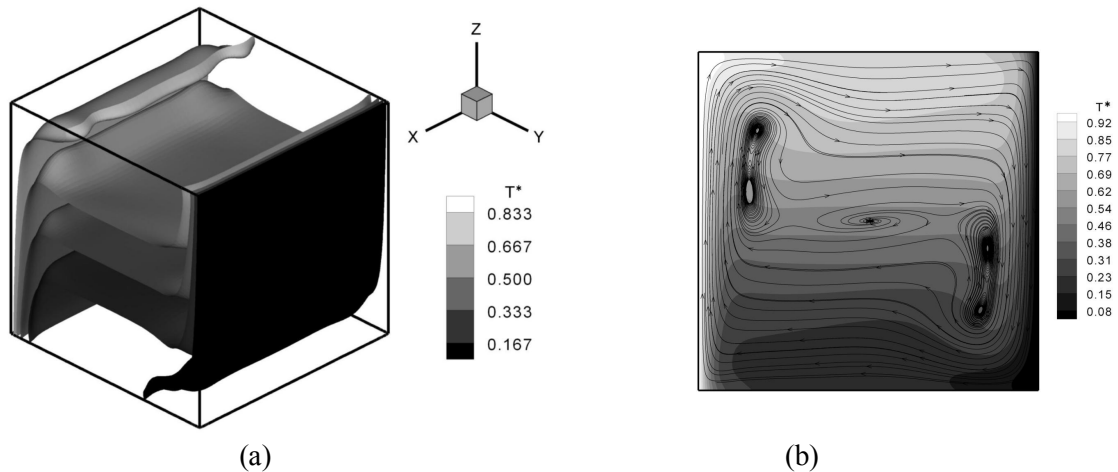


Figure 2 : (a) Champ de température obtenu dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Cas $Ra = 10^6$, $Pl = 0.016$, $T_0^* = 17$, $Pr = 0.71$ et $\tau = 10$. (b) Champ de température et lignes de courant. Coupe dans le plan $x = 0.5$.

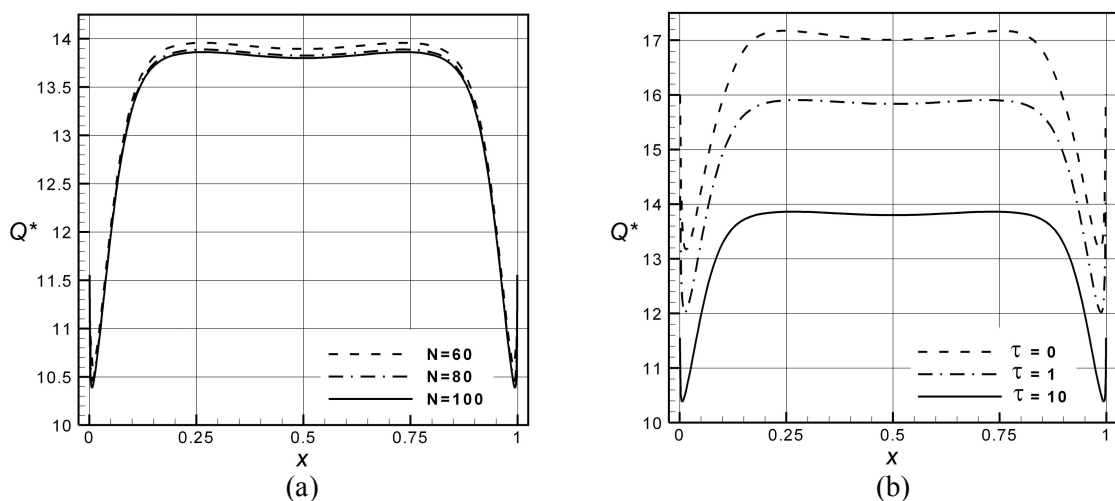


Figure 3 : Distribution du flux de chaleur moyenné (selon z) sur la paroi chaude. Cadre de l'approximation de Boussinesq. Cas $Ra = 10^6$, $Pl = 0.016$, $T_0^* = 17$, $Pr = 0.71$. (a) Convergence en maillage dans le cas $\tau = 10$. (b) Cas $N = 100$ et $\tau = 0, 1, 10$.

6. Extension au cas de l'approximation des faibles nombres de Mach

L'investigation est, à présent, étendue aux cas où les écarts de température ($T_c - T_f$) sont élevés et pour lesquels l'ABO est mise en défaut. En répétant la démarche entreprise dans la partie validation du code, on montre à la figure 4 le champ de température obtenu dans le cas de l'AFM. On observe une perte de symétrie de la solution par rapport au centre de la cavité. Ce résultat s'explique par le fait que la densité (calculée à partir de l'équation d'état $\rho = P_{th}/RT$) ne varie plus linéairement en fonction de la température. La dépendance en maillage de la solution est également effectuée et trois maillages comprenant respectivement 60^3 , 80^3 et 100^3 volumes de contrôle sont testés (figure 5(a)). Les flux de chaleur sur la paroi chaude ont été calculés pour différentes valeurs de l'épaisseur optique (figure 5(b)). Le rapport de flux moyens de chaleur à la paroi chaude, entre l'AFM et l'ABO est de 30 environ (de l'ordre du rapport des écarts respectifs de température). Cette différence est imputable aux effets radiatifs seuls dans la mesure où en l'absence de rayonnement, le nombre de Nusselt moyen (Nu) à la paroi chaude, que l'on peut obtenir à partir de l'expression de Q^* et après avoir éliminé Q_{rad} , est sensiblement le même pour les deux formulations, et ce, pour des paramètres de contrôle $Ra = 10^6$ et $Pr = 0.71$. En effet, on obtient $Nu = 8.63$ dans le cas de l'ABO et $Nu = 8.86$ dans le cas de l'AFM [4].

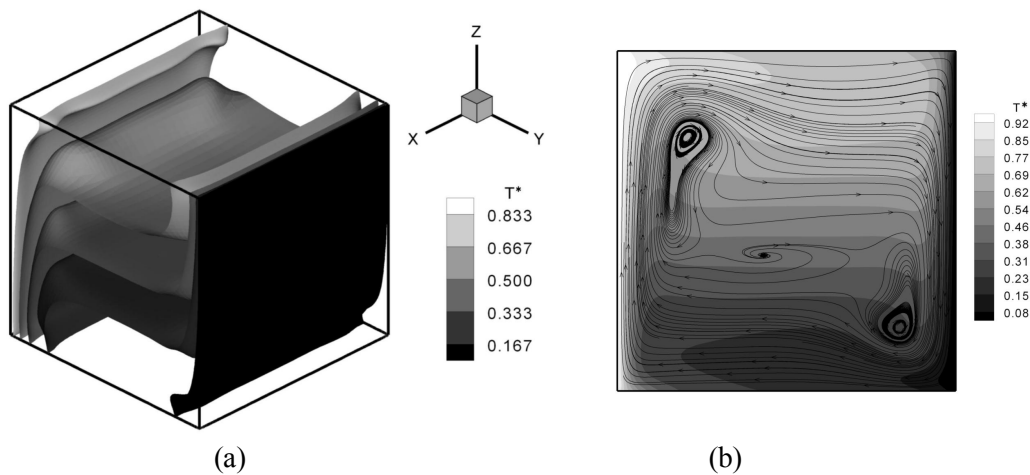


Figure 4 : (a) Champ de température obtenu dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Cas $Ra = 10^6$, $Pl = 0.016$, $T_0^* = 1$, $Pr = 0.71$ et $\tau = 10$. (b) Champ de température et lignes de courant. Coupe dans le plan $x = 0.5$.

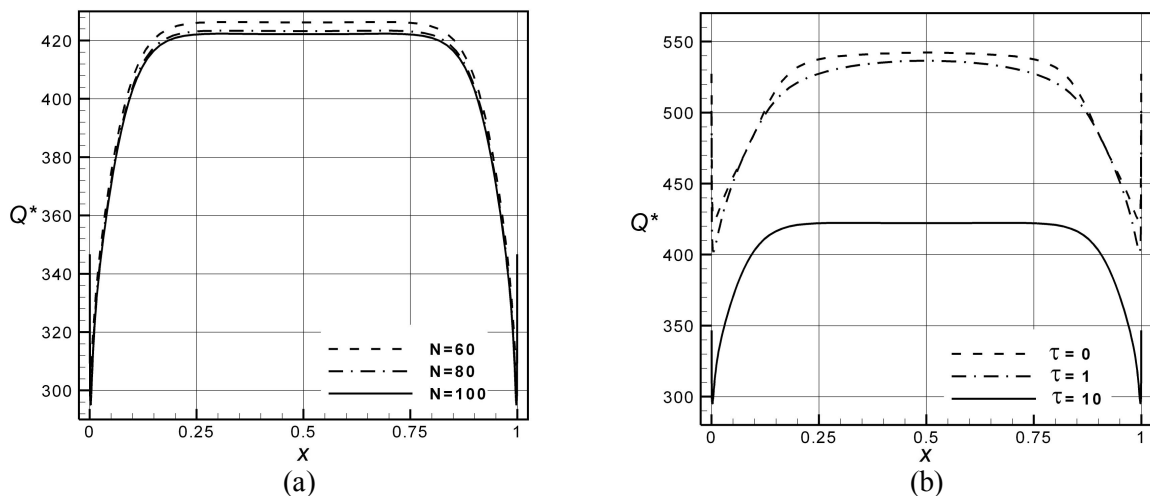


Figure 5: Distribution le long de la direction x du flux moyen de chaleur à la paroi chaude obtenu dans le cadre de l'approximation à faibles nombres de Mach.. Cas $Ra = 10^6$, $Pl = 0.016$, $T_0^* = 1$, $Pr = 0.71$. (a) Convergence en maillage dans le cas $\tau = 10$. (b) Cas $N = 100$ et $\tau = 0, 1, 10$.

Dans le tableau 1, on reporte la valeur de la pression thermodynamique, dans le cas de l'AFM, obtenue par la condition de conservation de la masse du système fluide :

$$\frac{P_{th}}{P_{th0}} = \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{T_0}{T} dV}$$

où Ω représente le domaine de calcul et où dV désigne un volume de contrôle. Le fait que la P_{th} croît (resp. décroît) avec une baisse (resp. augmentation) de l'épaisseur optique τ est une indication que le volume de fluide est globalement chauffé (resp. refroidi).

Optical thickness τ	0	1	10
P_{th}/P_{th0}	1.0732	1.0395	0.9764

Table 1. *Pression thermodynamique obtenue dans le cas de l'approximation à faibles nombres de Mach. Cas $Ra = 10^6$, $Pl = 0.016$, $T_0^* = 1$, $Pr = 0.71$ et pour $\tau = 0, 1, 10$.*

7. Conclusions

Dans la présente étude, le couplage entre la convection et le rayonnement a été analysé dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée. Le cas d'un milieu transparent et le cas d'un milieu semi-transparent ont été considérés. L'investigation est menée d'abord dans le cadre de l'ABO puis étendue au cas de l'AFM. Dans les deux cas, les résultats montrent qu'une baisse de l'épaisseur optique du milieu s'accompagne d'un accroissement du flux de chaleur sur les parois thermostatées. Par ailleurs, des différences importantes ont été observées entre les deux formulations, justifiant le recours à l'extension proposée dans cette étude (AFM). Les auteurs sont, toutefois, conscients des efforts qu'il reste à fournir afin de pallier aux limitations connues de la MOD, en implémentant des schémas de discrétisation plus précis [5, 6]. L'investigation devrait, par la suite, porter sur l'influence des nombres de Rayleigh et de Planck ainsi que la prise en compte des phénomènes de réflexion se produisant aux parois ($\varepsilon \neq 1$). Par la suite, l'analyse devrait être étendue aux cas de milieux non homogènes, pouvant diffuser et non gris. Une discrétisation angulaire basée sur la méthode des volumes finis pourrait alors être envisagée. Enfin, il est à noter qu'une version parallèle du code, développée sous OpenMP, est disponible et exploitable sur une plateforme SGI ALTIX (comprenant 20 processeurs Itanium2).

Références

- [1] Colomer, G., Costa, M., Consul, R., and Oliva, A., Three-dimensional numerical solution of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 2004, 357-269.
- [2] Modest, M.F. [2003], *Radiative heat transfer*, Academic Press.
- [3] Accary, G., Meradji, S., Morvan, D., Fougère, D., Towards a Numerical Benchmark for 3D Mixed Convection Low Mach Number Flows in a Rectangular Channel Heated from Below. *Fluid Dynamics and Materials Processing*, 141(1), 2008, 1-7.
- [4] Accary, G. and Raspo, I., A 3D finite volume method for the prediction of a supercritical fluid buoyant flow in a differentially heated cavity. *Comp. & Fluids*, 35(10), 2006, 1316-1331.
- [5] Coehlo, P.J., The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified ordinates method, *JSQRT*, 73, 2002, 231-238.
- [6] Coehlo, P.J., Bounded skew high-order resolution schemes for the Discrete Ordinates Method. *J. Comp. Physics*, 175, 2002, 412-437.

Remerciements

Les auteurs remercient la Communauté Européenne pour le soutien financier apporté au projet de lutte contre les feux de forêts Fireparadox.