

# Simulation numérique de la convection naturelle tridimensionnelle par une méthode Meshless dans la formulation vitesse-vorticité

Eyad DABBOURA<sup>1\*</sup>, Hamou SADAT<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des études thermiques, Esip, 40, Av du Recteur Pineau - 86022 Poitiers

\* (auteur correspondant : [eyad.dabboura@etu.univ-poitiers.fr](mailto:eyad.dabboura@etu.univ-poitiers.fr) )

## Résumé

On présente une étude numérique portant sur le problème de la convection naturelle 3D dans une cavité différentiellement chauffée par une méthode de type Meshless.

La formulation vitesse-vorticité des équations de Navier-Stokes est utilisée.

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats de la littérature et permettent de valider cette approche.

## Nomenclature

$Ra$	nombre de Rayleigh.	$Nu$	nombre de Nusselt.
$Pr$	nombre de Prandtl.	$T_f$	température de la paroi froide.
$u, v, w$	composantes de la vitesse adimensionnelle.	$T_c$	température de la paroi chaude.
$\xi, \eta, \zeta$	composantes de la vorticité adimensionnelle.	$t$	temps adimensionnel.
$T$	température adimensionnelle.		

## 1. Introduction

La résolution numérique des problèmes de mécanique des fluides et de transfert de chaleur définis dans des géométries complexes est généralement effectuée par les méthodes des éléments finis ou des volumes finis à maillages non structurés. Le domaine d'étude est alors discrétisé en un nombre fini d'éléments géométriques reliés aux nœuds de discrétisation par l'intermédiaire d'une table de connectivités. La gestion de la base de données relative au maillage devient lourde quand la géométrie est tridimensionnelle et quand on est en présence de frontières ou d'interfaces mobiles. Les méthodes dites sans maillages (Meshless ou Meshfree) qui se sont développées depuis une dizaine d'années réduisent cette difficulté puisqu'elles n'utilisent que les nœuds de discrétisation. Nous avons développé et mis en œuvre une méthode de collocation basée sur l'approximation diffuse ou approximation glissante à moindres carrés pour la résolution de problèmes de conduction [1], de rayonnement [2] et de convection [3]. Dans ce dernier cas, un algorithme de projection a été utilisé pour traiter le couplage pression-vitesse. La matrice de correction de la pression est cependant très mal conditionnée et conduit à des temps de calcul importants. On propose ici de mettre en œuvre cette méthode dans le cadre d'une formulation en vitesse-vorticité. Le problème de la convection naturelle dans une cavité cubique différentiellement chauffée est d'abord traité et permet de valider la méthode. Quelques résultats obtenus dans le cas d'une cavité de forme plus complexe sont enfin présentés.

## 2. Equations générales et configurations étudiées

On considère le phénomène de convection naturelle tridimensionnelle dans une cavité cubique (figure 1-a) et dans une cavité cubique modifiée (figure 1-b) différentiellement chauffées. La cavité modifiée est une cavité cubique dont les parois horizontales sont remplacées par des demi-cylindres.

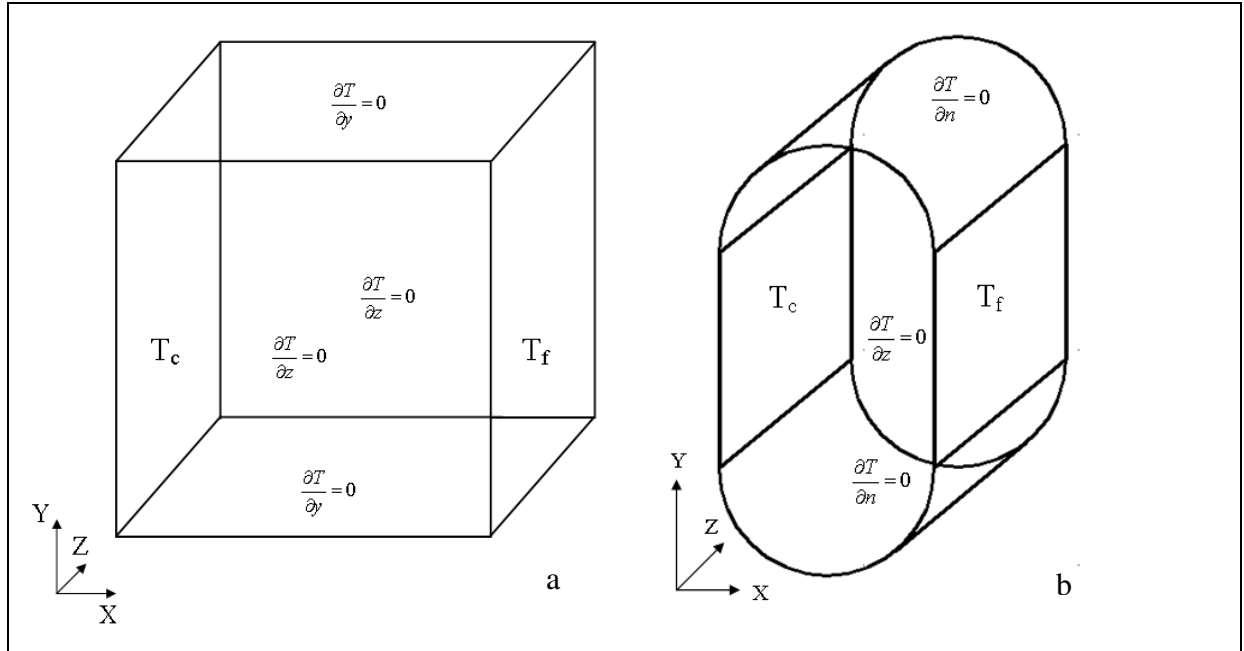


Figure 1 : les cavités étudiées

Dans la formulation en vitesse-vorticité, les équations de Navier-stokes adimensionnelles s'écrivent :

$$\nabla^2 \vec{U} = -\nabla \Lambda \vec{\omega} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{U} + \text{Pr}(\nabla^2 \vec{\omega}) + Ra \text{Pr} \nabla \Lambda(T) \vec{j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T \quad (3)$$

Le schéma implicite utilisé conduit à la discrétisation temporelle suivante :

$$\left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\omega} \right]^{i+1} = \left[ \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{U} \right]^i + \left[ \text{Pr}(\nabla^2 \vec{\omega}) \right]^{i+1} + \left[ Ra \text{Pr} \nabla \Lambda(T) \vec{j} \right]^i \quad (4)$$

$$\left[ \nabla^2 \vec{U} \right]^{i+1} = \left[ -\nabla \Lambda \vec{\omega} \right]^i \quad (5)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla T) \right]^{i+1} = \left[ \nabla^2 T \right]^{i+1} \quad (6)$$

Les vecteurs vitesse et vorticité ont pour composants respectivement  $(u, v, w)$  et  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Nous ne reprendrons pas ici les détails relatifs à la méthode de collocation utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles précédentes et qui peuvent être trouvés par

ailleurs [1-3]. On rappellera simplement qu'étant donnée une fonction  $f(X)$  de la variable de coordonnées tridimensionnelle  $X(x,y,z)$ , la valeur de la fonction en  $X=X_0+\Delta X$  est donnée par le développement à l'ordre  $m$  suivant :

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{1 < j_1 + j_2 + j_3 < m-1} \frac{\Delta x^{j_1} \Delta y^{j_2} \Delta z^{j_3}}{j_1! j_2! j_3!} \left[ \partial_x^{j_1} \partial_y^{j_2} \partial_z^{j_3} f \right]_{X_0} \quad (7)$$

Si les valeurs  $f(X_i)=f_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) de la fonction sont supposées connues en un nombre  $n$  de points voisins  $X_i=X_0+\Delta X_i$ , on peut tronquer le développement en série précédent et approximer ainsi les dérivées partielles  $\left[ \partial_x^{j_1} \partial_y^{j_2} \partial_z^{j_3} f \right]_{X_0}$  de la fonction au nœud de référence  $X_0$  en résolvant un système d'équations linéaires.

Les dérivées partielles apparaissant dans les équations à résoudre sont ensuite remplacées par ces approximations en chacun des points de la discrétisation. On obtient finalement des systèmes d'équations linéaires qui sont résolus séquentiellement au moyen d'une méthode BICGSTAB après introduction des conditions aux limites. Les équations (4), (5) et (6) sont résolues dans cet ordre avec comme critère de convergence une erreur relative sur chacune des variables et en chaque point inférieure à  $10^{-4}$ .

### 3. Résultats

#### 3.1. Cavité cubique

Le tableau 1 regroupe les nombres de Nusselt obtenus par la méthode proposée avec différents maillages ainsi que quelques résultats de la littérature pour des nombres de Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^6$ . On peut constater la bonne précision des résultats puisque l'erreur relative maximale est inférieure à 1%. Notons que pour un nombre de Rayleigh de  $10^5$  et pour le maillage  $25^3$ , le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le régime stationnaire est de 1899.

Ra		$10^3$					
Method		Meshless		GDQ[6]	PSC[8]	FDM[10]	LBM[9]
Mesh size	$15^3$	$19^3$	$25^3$	$25^3$	$32^3$	$32^3$	$81^3$
$Nu$	1,0673	1,0682	1,0692	1,070	1,070	1,085	1,075
Ra		$10^4$					
Method		Meshless		GDQ[6]	PSC[8]	FDM[10]	LBM[9]
Mesh size	$15^3$	$19^3$	$25^3$	$25^3$	$61^3$	$62^3$	$61 \times 45 \times 45$
$Nu$	2,1050	2,0762	2,0679	2,054	2,0542	2,1	2,085
Ra		$10^5$					
Method		Meshless		GDQ[6]	PSC[8]	FDM[10]	LBM[9]
Mesh size		$25^3$		$25^3$	$81^3$	$62^3$	$91 \times 65 \times 65$
$Nu$		4,3370		4,335	4,337	4,361	4,378
Ra		$10^6$					
Method		Meshless		GDQ[6]	PSC[8]	FDM[10]	
Mesh size		$25^3$		$25^3$	$81^3$	$62^3$	
$Nu$		8,6457		8,666	8,6407	8,77	

Tableau 1 : Nombre de Nusselt

On présente sur la figure 2, les champs de température (dans les sections  $z=0,5$  et  $x=0,5$ ) ainsi que les champs de la troisième composante de la vorticité dans la section médiane ( $z=0,5$ ) de la cavité pour  $Ra=10^3$  et  $Ra=10^5$ . Comme attendu, les champs obtenus dans la section  $z=0,5$  sont similaires à ceux du cas bidimensionnel.

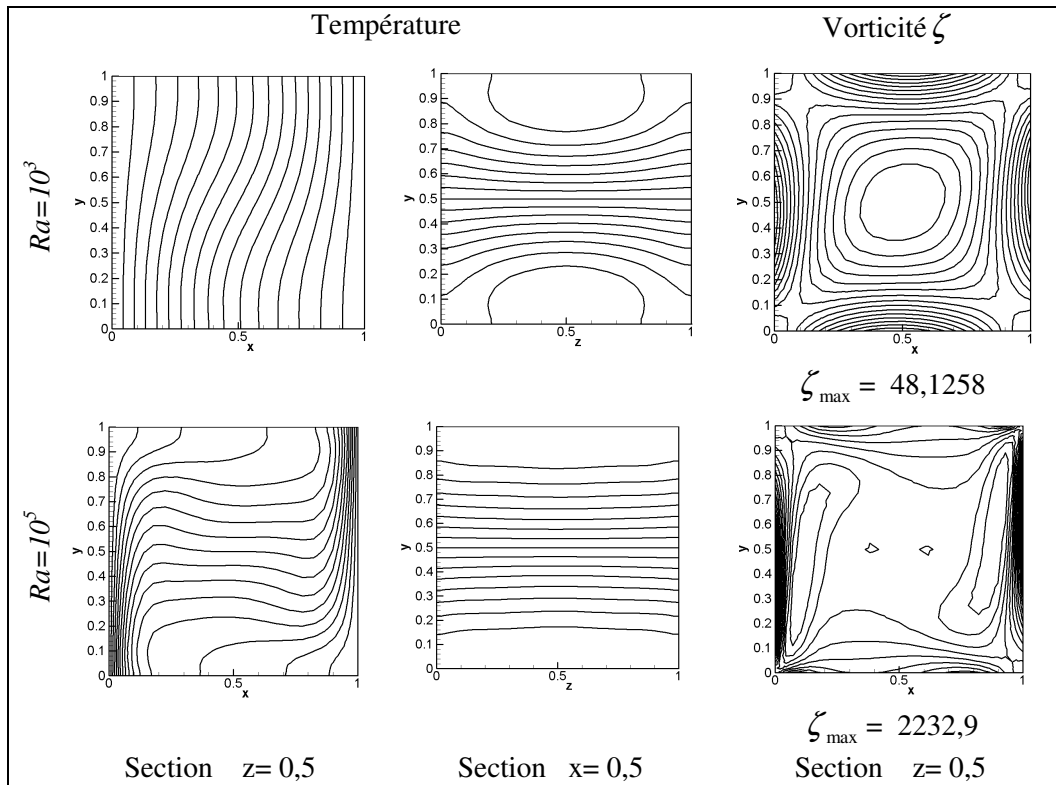


Figure 2 : Champs de température et de vorticité

### 3.2. Cavité arrondie

La figure 3 montre les champs de température, les deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse ainsi que la composante suivant  $z$  de la vorticité dans la section  $z=0,5$  pour  $Ra=10^3, 10^4$  et  $10^5$ . La composante de la vorticité suivant  $x$  dans la section  $x=0,5$  y est également présentée. Les résultats pour  $Ra=10^5$  ont été obtenus avec une discrétisation en 69685 nœuds (en utilisant 52 points suivant la direction  $y$  et 35 points suivants la direction  $x$ ). L'écoulement est similaire à celui qui a lieu dans la cavité cubique avec notamment un amincissement des couches limites verticales à mesure que le nombre de Rayleigh augmente. Le fait que les parois horizontales soient arrondies conduit à un écoulement plus rapide par rapport à celui qui a lieu dans la cavité cubique. Les échanges de chaleur sont donc plus importants comme le montre le tableau 2. Les nombres de Nusselt augmentent dans une proportion allant de 10,85 % à 25,6%.

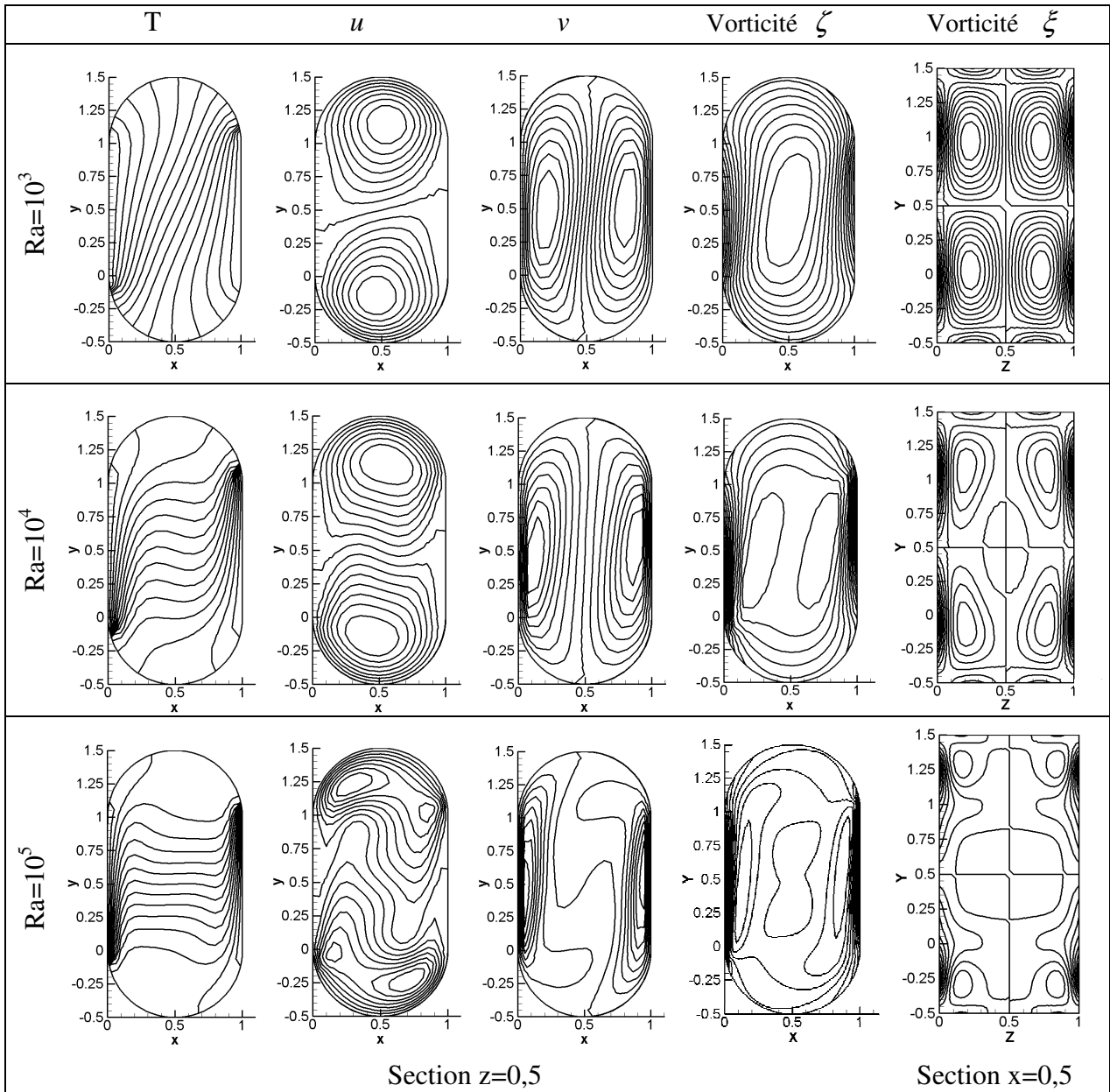


Figure 3 : champs de température, de vitesse et de vorticité.

Rayleigh	$10^3$	$10^4$	$10^5$
$Nu$	1,299	2,60	4,80

Tableau 2 : Nombres de Nusselt.

Signalons pour terminer que les temps de calcul sont ici de l'ordre de 4 fois plus faibles par rapport au cas où la méthode est couplée à un algorithme de projection dans la formulation en variables primaires.

## 4. Conclusion

Une méthode Meshless a été utilisée pour résoudre un problème de convection naturelle tridimensionnel dans la formulation vitesse-vorticité. La bonne qualité des résultats obtenus montre que cette approche est une alternative intéressante, qui permet d'envisager l'étude de problèmes 3D instationnaires.

## Références

- [1] H.Sadat, N.Dubus, T.Sophy, On the Solution Of Heterogeneous Heat Conduction Problems by a Diffuse Approximation Meshless Method, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 50: 6, 491 – 498 december (2006).
- [2] H.Sadat, On the use of a meshless method for solving radiative transfer with the discrete ordinates formulations, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 101: 2, 263-268 September (2006).
- [3] H.Sadat, S. Couturier, Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals* 37: 4, 455 - 467 June (2000).
- [4] D.C.Lo , D.L.Young , K. Murugesan, C.C.Tsaid, M.H.Gou, Velocity-vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined cavity by DQ method, *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2005).
- [5] D.L.Young, S.C. Jane, C.Y. Lin, C.L. Chiu, K.C. Chen , Solutions of 2D and 3D Stokes laws using multiquadrics method, *Engineering analysis with boundary elements* (2003).
- [6] D.C.Lo, D.L.Young , K.Murugesan , GDQ method for natural convection in a cubic cavity using velocity-vorticity formulation , *Numerical Heat Transfer ,Part B*,48:363-386 (2005).
- [7] D.L Young, Y.H Liu, T.I.Eldho, A combined BEM-FEM model for the velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations in three dimensions *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 24, Number 4, pp, 307-316(10) ,(April 2000).
- [8] E.Tric, G.Labrosse,M.Betrouni, A First Incursion into the 3D Structure of Natural convection of Air in a Differentially Heated Cubic Cavity ,from Accurate Numerical Solutions ,*Int,J,Heat Mass Transfer* ,vol,43,pp,4043-4056,(2000).
- [9] Y.Peng, C.Shu,Y.T.Chew, A 3D Incompressible Thermal Lattice Boltzmann Model and its Application to Simulate Natural Convection in a Cubic Cavity ,*J,Comput,Phys*,,vol,193, pp, 260-274 ,(2003).
- [10] T.Fusegi, J.M.Hyun, K.Kuwahara, B.Farouk, Numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34 (6), pp, 1543-1557,( 1991).