Etude des effets de la rotation sur les champs cinématique et thermique d'une turbulence homogène cisaillée

Besma CHEBBI[1], Mounir BOUZAIANE[1*] & Taieb LILI[1]
[1]Laboratoire de Mécanique des Fluides, Faculté des Sciences de Tunis
[*]*(auteur correspondant : mbouzaiane@yahoo.fr)*

Résumé Dans ce travail, nous étudions les effets de la rotation sur l'évolution des champs cinématique et thermique d'une turbulence homogène cisaillée. Cette étude est menée selon deux démarches différentes. La première est analytique et consiste en la résolution des équations d'évolution de l'écoulement dans le cas d'un fort cisaillement *S*. La deuxième consiste en la fermeture au second ordre des équations d'évolution de l'écoulement et leur intégration numérique. Les solutions analytiques ont montré un comportement asymptotique d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermiques alors que seul le modèle 2 a confirmé ce comportement.

Nomenclature

b_{ij}	tenseur anisotrope de Reynolds	u_i	fluctuation de la vitesse ms^{-1}, $u_i' = (\overline{u_i^2})^{1/2}$
K	énergie cinétique turbulente, $m^2 s^{-2}$	$\overline{u_i u_j}$	tenseur de Reynolds, $m^2 s^{-2}$
p	fluctuation de la pression, Nm^{-2}	$U_{i,j}$	gradient de la vitesse moyenne, s^{-1}
R	nombre de rotation $R = \dfrac{\Omega}{S}$	$\overline{u_i \theta}$	flux thermique turbulent, Cms^{-1}
Ri	nombre du Richardson adimensionnel Ri=2R(1+2R)	*Symboles grecs*	
S	cisaillement moyen s^{-1}	δ_{ij}	Symbole de kroneker
S_ρ	gradient de température moyenne Cm^{-1} $S_\rho = \dfrac{d\,\overline{T}}{d\,x_2}$	Ω	Taux de rotation, s^{-1}
t	temps, s	θ	fluctuation de la température, C
$\overline{T}$	température moyenne, C	$\overline{\theta^2}$	variance de la fluctuation de la température, C^2, $\theta' = (\overline{\theta^2})^{1/2}$, C
$\overline{U}_i$	vitesse moyenne, ms^{-1}	$\tau = St$	temps adimensionnel

1. Introduction

L'étude d'une turbulence homogène cisaillée demeure l'un des cas classiques d'évaluation des modèles au second ordre. C'est à l'aide de ces modèles au second ordre que nous avons étudié des différentes configurations d'une turbulence homogène cisaillée en présence d'une stratification stable Bouzaiane et al. 2004. [1]. Si le champ cinématique d'une turbulence homogène cisaillée a été largement étudié par les auteurs, le champ thermique n'a pas fait l'objet de nombreux travaux les dernières années. Ce ci constitue la motivation essentielle de ce travail en plus du large domaine d'application de la rotation dans la nature entre autre les courants océaniques et les limites atmosphériques ainsi que dans les systèmes mécaniques et thermiques industriels tels que les turbomachines. Il est essentiel aussi de préciser que ce travail est une extension d'une étude antérieure que nous avons menée [2] au cas de la rotation.

Nous commençons au paragraphe 2 par présenter les équations générales des corrélations doubles decrivant l'écoulement turbulent considéré. Au paragraphe 3, nous effectuons une résolution analytique des équations d'évolution dans le cas d'un cisaillement important. Au paragraphe 4, une modélisation au second ordre est abordée et une forme adimensionnelle des équations est obtenue et est suivie par l'intégration numérique des équations différentielles et la présentation des principaux résultats.

2. Equations générales

Nous rappelons dans ce paragraphe les équations générales des tensions de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, des flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$, de l'énergie cinétique turbulente K et de la variance de la fluctuation de la température $\overline{\theta^2}$. Dans le cadre d'une modélisation conventionnelle au second ordre, ces équations se présentent sous les formes suivantes [3] [4] :

$$\frac{d}{dt}\overline{u_i u_j} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{u_i \theta} = P_{i\theta} + \Phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \tag{2}$$

En considérant la trace de l'équation (1), nous obtenons l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente $K = \overline{u_i u_i} / 2$

$$\frac{d}{dt} K = P - \varepsilon \tag{3}$$

L'équation de la variance de la fluctuation du scalaire est associée aux équations (1), (2) et (3) et peur être écrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta^2} = 2P_{\theta\theta} - 2\varepsilon_{\theta\theta} \tag{4}$$

Dans ces équations les termes notés P sont des termes de production dus aux gradients cinématiques et thermiques moyens:

$$P_{ij} = -\overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - 2(\varepsilon_{imk}\overline{u_j u_k} + \varepsilon_{jmk}\overline{u_i u_k})\Omega_m \tag{5}$$

$$P = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - 2\varepsilon_{imk}\Omega_m \overline{u_i u_k} \tag{6}$$

$$P_{i\theta} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} - (S\delta_{i1}\delta_{k2} + 2\varepsilon_{imk}\Omega_m)\overline{\theta u_k} \tag{8}$$

$$P_{\theta\theta} = -2\overline{u_i\theta}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \qquad (9)$$

Les termes notés ε sont les termes de dissipation dus aux effets moléculaires. Les termes notés ϕ sont les termes de corrélation faisant intervenir la fluctuation de pression.

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho_0}(\overline{pu_{i,j} + pu_{j,i}}), \qquad \phi_{i\rho} = \frac{1}{\rho_0}\overline{p\rho_{,i}} \qquad (10)$$

A ce niveau du travail, il est essentiel de rappeler que deux démarches ont été abordées pour résoudre les équations générales de l'écoulement. La première est analytique et elle fera l'objet du paragraphe suivant, alors que la seconde est numérique et consistera en une intégration numérique des équations d'évolution de l'écoulement et elle fera l'objet du paragraphe 4.

3. Solutions analytiques dans le cas où sont négligés les effets de de viscosité et de pression

En turbulence homogène et dans le cas d'un cisaillement important, Holt et al. [5] ont noté dans leurs résultats de simulation numérique directe que les effets de pression et de viscosité sont négligeables. Tenant compte de cette hypothèse, nous pouvons considérablement simplifier les équations d'évolution décrivant l'écoulement. En négligeant les termes de corrélation faisant intervenir les fluctuations de la pression et les termes de dissipation, les équations d'évolution se présentent sous les formes simplifiées suivantes:

$$\frac{d}{dt}\overline{u_1^2} = -2S(1-2R)\overline{u_1u_2} \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{u_2^2} = -4RS\overline{u_1u_2} \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{u_3^2} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{u_1u_2} = -S(1-2R)\overline{u_2u_2} - 2RS\overline{u_1u_1} \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta u_1} = -\overline{u_2u_2}S_\rho + (2R-1)S\overline{\theta u_2} \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta u_2} = -\overline{u_2u_2}S_\rho - 2RS\overline{\theta u_1} \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta^2} = -2\overline{\theta u_2}S_\rho \qquad (17)$$

Un système de sept équations différentielles linéaires, paramétré par le nombre de rotation R, est obtenu. La transformée de Laplace est utilisée pour le résoudre. Les solutions, des grandeurs turbulentes, obtenues ont permis de confirmer le comportement asymptotique des grandeurs adimensionnelles cinématiques : composantes b_{11} , b_{12} et b_{22} du tenseur d'anisotropie et thermiques:

$$\rho_1 = \frac{\overline{u_1\theta}}{u_1'\theta'} \quad , \quad \rho_2 = \frac{\overline{u_1\theta}}{\overline{u_2\theta}} \quad , \quad \rho_3 = \frac{\theta'/S_\rho}{q'/S} \tag{18}$$

En particulier le coefficient de corrélation ρ_1 associé au flux thermique turbulent $\overline{u_1\theta}$ et le rapport ρ_2 des flux thermiques turbulents tendent vers des constantes quand le temps adimensionnel $\tau = St$ devient très grand :

$$(\rho_1)_\infty = (\frac{\overline{\theta u_1}}{\theta' u_1'})_\infty \simeq \frac{1}{S_\rho}\frac{D_{\theta\theta}^{1/2}}{D_q^{1/2}} . \quad , \quad (\rho_2)_\infty = (\frac{\overline{\theta u_2}}{\overline{\theta u_1}})_\infty \simeq \frac{D_{2\theta}e^{4R_i\tau}}{D_{1\theta}e^{4R_i\tau}} \tag{19}$$

Ici les coefficients D ne dépendent que des valeurs initiales des grandeurs turbulentes, du nombre de rotation R et du nombre de Richardson Ri.

Une deuxième démarche de résolutions des équations d'évolution de l'écoulement fera l'objet du paragraphe suivant.

4. Modélisation au second ordre, résolution numérique et résultats

Les termes de corrélation pression déformation ϕ_{ij} et pression température $\phi_{i\theta}$ sont les termes essentiels à modéliser dans les équations d'évolution des tensions de Reynolds et des flux thermiques turbulents. Des formes modélisées des équations d'évolution des dissipations cinématiques et thermiques sont aussi associées. Dans ce travail, deux parmi les modèles les plus utilisés dans la littérature sont retenus. Le modèle classique de Launder-Reece et Rodi (LRR) [6] (modèle1) est retenu pour les champs cinématique et thermique. Le modèle élaboré de Sarkar, Speziale et Gatski (SSG) [7], n'ayant pas eu une extension au champ thermique, sera couplé au modèle LRR des phénomènes thermiques et constituera le modèle 2. Une forme adimensionnelle des équations d'évolution de l'écoulement est obtenue après leurs modélisations. Les grandeurs adimensionnelles cinématiques [8] et thermiques citées au paragraphe 3 substituent les grandeurs turbulentes. Un système de sept équations différentielles non linéaires est obtenu. Dans le but de ne pas alourdir la présentation de ce papier, seules les équations d'évolution des grandeurs adimensionnelles thermiques sont présentées:

$$\frac{d\rho_1}{d\tau} = -\frac{1}{\rho_3}\frac{b_{12}}{(b_{11}+\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}} - C_1\frac{\varepsilon}{kS}\rho_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}(1.8-3R) + \rho_1(1-2R)\frac{b_{12}}{b_{11}+\frac{1}{3}} + \frac{C_1}{4}\rho_1\frac{\varepsilon}{kS}\frac{b_{11}}{b_{11}+\frac{1}{3}}$$
$$+\frac{C_2}{4}(1-\frac{2}{3}C_2)\rho_1\frac{b_{12}}{b_{11}+\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\rho_1\frac{\varepsilon}{kS}\frac{1}{b_{11}+\frac{1}{3}} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2\rho_3} + \frac{1}{2}\rho_1\frac{\varepsilon}{kS}r_c \tag{20}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\tau} = -\frac{\rho_2}{\rho_1\rho_3}\frac{b_{12}}{(b_{11}+\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}} + 3R - 1.8 + (R-0.2)\rho_2^2 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1\rho_3}\frac{b_{22}+\frac{1}{3}}{(b_{11}+\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}} \tag{21}$$

$$\frac{d\rho_3}{d\tau} = -\frac{\rho_1}{\rho_2}(b_{11}+\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\rho_3\frac{\varepsilon}{kS}r_c + \rho_3 b_{12} + \frac{1}{2}\rho_3\frac{\varepsilon}{kS} \qquad (22)$$

Les coefficients $C_1, C_2 \dots$ sont des coefficients numériques associées aux modèles [4]. L'intégration numérique effectuée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, est poursuivie vers des intervalles de temps $\tau = St$ suffisamment grands a permis d'obtenir les valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermiques présentées aux tableaux suivants. Il est aussi essentiel de préciser à ce niveau de travail que le cas d'une turbulence isotrope se traduit par des composantes b_{ij} nulles du tenseur d'anisotropie de Reynolds **b** et par la suite les deux modèles retenus se ramènent au même modèle et les résultats d'une turbulence isotrope ne peuvent pas être retenus dans cette étude consacrée à une turbulence homogène cisaillée.

	b_{11}	b_{22}	b_{12}	ε / KS	ρ_1	ρ_2	ρ_3
R= 0,00	0,192	-0,090	-0,183	0,181	0,484	0,346	0,658
R= 0,50	-0,119	-0,310	-0,415	0,206	0,882	0,232	0,514
R= 1,00	….	…	…	….	4,52	-0,623	26,3

Tableau 1 : *Valeurs d'équilibre prédites par le modèle 1 (LRR)*

	b_{11}	b_{22}	b_{12}	ε / KS	ρ_1	ρ_2	ρ_3
R= 0,00	0,220	-0,147	-0,164	0,167	0,298	-1,11	2,44
R= 0,50	0,537	-0,201	-0,365	0,387	0,621	-1,46	2,27
R= 1,00	0,809	-0,235	-0,550	0,061	…..	-1,8	…..
R=-0,50	-0,040	-0,123	-0,166	0,172	0,461	-1,56	1,81
R=-1,00	-0,271	-0,123	-0,291	0,309	1,35	-2,63	0,93
R=-1,50	-0,516	-0,164	-0,402	0,426	…..	…..	….

Tableau 2 : *Valeurs d'équilibre prédites par le modèle 2 (SSG+LRR)*

Nous constatons d'après ces deux tableaux que le modèle 1 a prédit des valeurs d'équilibre seulement pour les valeurs R=0,5 et R=0,0 du nombre de rotation. Ces résultats confirment aussi les limites du modèle classique (modèle 1) dans la prédiction des écoulements présentant une certaine anisotropie. Cette défaillance est due d'une part au fait que le modèle classique est un modèle linéaire et ne contient pas des termes en b_{ij} traduisant réellement l'anisotropie de l'écoulement [4] et d'autre part à la formulation mathématique même de ce modèle basée sur des relations simples dites de contraintes cinématiques [4]. Le modèle 2, contenant des termes en b_{ij} et dont la formulation est soumise à des relations plus strictes de réalisabilité, a prédit des valeurs d'équilibre pour presque toutes les valeurs du nombre de rotation R retenue dans ce travail. Il a aussi montré que l'anisotropie de l'écoulement augmente en présence de la rotation et une forte anisotropie attendue est observée pour le nombre adimensionnel de rotation R égal à 1,0. La valeur maximale des composantes d'anisotropie b_{ij} atteint 0,809. Une anisotropie moins forte est constatée pour les valeurs négatives du nombre de rotation.

Sur ces mêmes tableaux, sont aussi présentées les valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles ρ_1, ρ_2, ρ_3 . La différence est nette entre les résultats des deux modèles Le modèle SSG retenu pour le champ cinématique est d'un grand apport sur le champ thermique. Ce modèle n'intervenant pas explicitement dans les équation d'évolution décrivant le champ thermique a permis d'améliorer les résultats obtenus par le modèle de LRR quand il est retenu à lui seul pour les champs cinématique et thermique et a permis d'obtenir des valeurs d'équilibre pour 4 des 6 valeurs retenus pour le nombre de rotation R. La rotation affecte clairement le champ thermique et c'est essentiellement le coefficient de corrélation ρ_1 qui semble le plus touché par la rotation. La valeur d'équilibre de ce coefficient double en passant de R=0,0 à R=0,50. Une aberration est aussi constatée pour la valeur du nombre de rotation R=1,0. La valeur du coefficient de corrélation dépasse l'unité. Cette aberration est expliquée si on rappelle que le modèle classique (LRR) n'est pas soumis à des conditions strictes de réalisabilité. Ce modèle n'est soumis qu à des relations simples dites contraintes cinématiques.

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié le comportement asymptotique d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermiques. Deux démarches ont été retenues. La première est analytique et a consisté en la résolution des équations d'évolution de l'écoulement dans le cas d'un fort cisaillement se traduisant par des termes de viscosité et de pression négligeables. Les solutions obtenues ont montré un comportement asymptotique d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermiques. La deuxième est numérique et basée sur une modélisation au second ordre de l'écoulement. Deux modèles parmi les plus connus dans la littérature et notés ici modèle 1 et modèle 2 sont retenus. L'intégration numérique des équations d'évolution de l'écoulement écrites sous une forme adimensionnelle a été effectuée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. L'intégration numérique poursuivie vers des intervalles de temps suffisamment grands a montré que le modèle 2 (SSG+LRR) est celui qui confirme le comportement asymptotique d'équilibre des grandeurs adimensionnelles pour quatre des six valeurs du nombre de rotation. Le modèle 1 (LRR) ne confirme que rarement ce comportement, montre aussi une aberration physique dans sa prédiction de l'écoulement.
La modélisation du champ thermique à l'aide des modèles plus élaborés de Shih et Lumley d'une part et de Craft et Launder d'autre part pourrait constituée une extension de ce travail.

Références

[1] M.Bouzaiane, H.Ben Abdallah, T.Lili A second order modeling of a stably stratified sheared turbulence submitted to a non vertical shear, Journal of turbulence . (2004)

[2] M.Bouzaiane, T.Lili Prédiction des états d'équilibre d'un champ thermique turbulence homogène, International journal of thermal sciences.4 , (2002), 871-882.

[3] J.R.Ristorcelli, J.L.Lumley, R.Abid Rapid –pressure correlation representation consistent with the Taylor-Proudman theorem materially-frame-indifferent in the 2D limit, Institute for computer applications in science and engineering (ICASE), NASA Langley research center, Hampton, VA23681.(1998)

[4] A.Cadiou Contribution à l'étude de modèles de turbulence au second ordre, Thèse de doctorat, École centrale de Nantes. (1996)

[5] S. E. Holt, J. R. Koseff, J. H. Ferziger, A numerical study of the evolution and structure of homogeneous stably stratified sheared turbulence, J. Fluid. Mech. 237 , 1992 499-539

[6] B. E. Launder, G. Reece, W. Rodi, Progress in the development of a Reynolds stress closure, J. Fluid Mech. 68, (1975), 537-576.

[7] C.G.Speziale, S.Sarkar, T.B.Gatski Modeling the pressure strain correlation of turbulence an invariant dynamical systems approach», NASA Langley research center, Hampton, Virginia23665-5225 (1990)

[8] C.G.Speziale, N.M.G.Mhiris On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence, J.Fluid Mech, .209, (1989), 591-615.