

Etude d'un échangeur bi-tubulaire enterré en régime turbulent

Taoufik MNASRI¹, Atef MAZIOUD^{*2}, Rached BEN YOUNES¹, Jean Félix DURASTANTI²

¹Université de Gafsa, Tunisie

²Laboratoire CERTES (EA 3481) IUT de Sénart, Lieusaint, 77127, France

Résumé

Ce travail présente l'étude d'un écoulement turbulent d'air en convection forcée dans un échangeur bitubulaire enterré. La température de la paroi et le flux de chaleur à la paroi sont inconnus et évoluent au cours du temps. De plus le coefficient de transfert fluide-paroi est aussi inconnu. La complexité de la géométrie du système et l'infinité du milieu environnant l'échangeur nous ont conduit à coupler la méthode des volumes finis avec la méthode des éléments finis de frontière en s'appuyant sur la théorie des fonctions de Green pour résoudre le problème.

Nomenclature

a_{so}	diffusivité du sol, $m^2.s^{-1}$	t	temps, s
a_f	diffusivité du fluide, $m^2.s^{-1}$	$T(\vec{r}, t)$	température au point \vec{r} à l'instant t , K
D_H	diamètre hydraulique, $D_H = 2(R_i - r_{ex})$, m	T_m	température moyenne du fluide dans l'espace annulaire à la hauteur z au moment t , K
h	coefficient de transfert thermique fluide-paroi, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$T_w(\vec{r}', t)$	température de la paroi de l'échangeur à la hauteur z au moment t , K
k_f	conductivité thermique du fluide, $W.m^{-1}.K^{-1}$	T_0	température initiale du sol $T(\vec{r}, t=0)$, K
k_s	conductivité thermique du sol, $W.m^{-1}.K^{-1}$	u	vitesse radiale, $m.s^{-1}$
Nu	nombre de Nusselt local, sans dimension	v	vitesse orthoradiale, $m.s^{-1}$
Nu_m	nombre de Nusselt moyen, sans dimension	w	vitesse axiale, $m.s^{-1}$
P^*	pression dynamique, Pa	z	coordonnée axiale, m
r	coordonnée radiale, m	<i>Symboles grecs</i>	
\vec{r}	vecteur-position dans l'espace	ν_f	viscosité cinématique du fluide, $m^2.s^{-1}$
\vec{r}'	vecteur-position où la température est évaluée	ρ_f	masse volumique du fluide, $kg.m^{-3}$
Re	nombre du Reynolds, $Re = W_0 D_H \rho_f / \mu$, sans dimension		

1. Introduction

Les études qui concernent l'écoulement non établi dans le cas d'une conduite annulaire subissant un flux de chaleur inconnu et variable au cours du temps à travers sa paroi, restent jusqu'à présent rares. Ce type d'écoulement est obtenu à l'entrée des échangeurs de chaleur. La mise au point d'un modèle théorique complet [1, 2] utilisant la théorie des fonctions de Green [3] et la méthode des éléments finis de frontière, permet de calculer l'évolution des températures de tels systèmes. Mais l'utilisation de ce modèle nécessite la connaissance expérimentale de certains paramètres tel que le coefficient d'échange thermique local.

Le présent travail expose essentiellement la détermination du coefficient d'échange de chaleur. Les équations d'énergie dans les deux parties du système (solide et fluide) ont été établies, et reliées

par les relations de continuité de température et du flux thermique à la surface de contact fluide-solide. En s'appuyant sur la théorie des fonctions de Green, l'équation de l'énergie dans le milieu solide, milieu infini et tridimensionnel (volume du stock), a été transformée en une équation intégrale à résoudre dans un milieu fini et bidimensionnel (surface de l'échangeur). Ainsi nous obtenons un système d'équations différentielles et intégrales régissant les champs de vitesse et de température. La méthode des volumes finis combinée avec celle des éléments finis à la frontière permet une résolution numérique de ce système. Nous en déduisons les différents paramètres thermiques tels que le champ de la température et le nombre de Nusselt local et moyen.

2. Formulation mathématique du problème

Notre système est un échangeur bitubulaire composé de deux tubes concentriques s'enfonçant dans le stock (fig. 1). Le tube intérieur est constitué de P.V.C considéré thermiquement comme isolant. Le fluide chaud entre dans le tube intérieur à une température $T_e(t)$, circule de haut en bas, remonte de la base dans l'espace annulaire à une vitesse moyenne w_0 et sort à une température $T_s(t)$. La résistance thermique du tube extérieur est supposée négligeable.

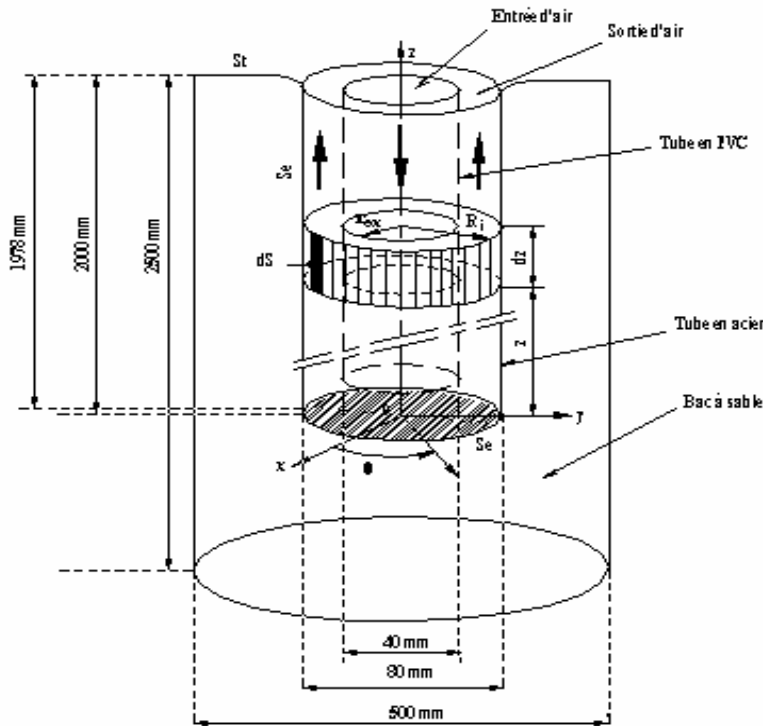


Fig. 1. Section de l'échangeur

2-1. Equation de propagation de l'énergie dans le sol

Le sol est considéré comme un milieu solide homogène, isotrope et de caractéristiques thermiques stables et indépendantes de la température. Ce milieu de stockage constitue un domaine (D) limité par une frontière (S). L'équation de propagation de la chaleur dans ce milieu est :

$$\frac{1}{a_{so}} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T(\vec{r}, t) = 0 \quad (1)$$

Soit la fonction de Green $G(\vec{r}, \vec{r}', t)$ solution de l'équation associée (2) :

$$\frac{1}{a_{so}} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}', t)}{\partial t} - \Delta G(\vec{r}, \vec{r}', t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2)$$

La surface (S) du domaine (D) est la réunion de la surface du sol libre (St) et la surface de l'échangeur enterré (Se); $(S) = (Se) \cup (St)$. Les transformées de Laplace des équations (1) et (2) combinées et ensuite intégrées sur \vec{r} dans le domaine (D) limité par la surface (S), aboutissent à :

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}',p) = & \iiint_{(D)} \bar{G}(\bar{r},\bar{r}',p) \frac{T_0(\bar{r})}{a_{so}} d^3r + \iint_{(St)} \left[\bar{G}(\bar{r},\bar{r}',p) \bar{\nabla} T(\bar{r},p) - T(\bar{r},p) \bar{\nabla} \bar{G}(\bar{r},\bar{r}',p) \right] \bar{n} dS \\ & + \iint_{(Se)} \left[\bar{G}(\bar{r},\bar{r}',p) \bar{\nabla} T(\bar{r},p) - T(\bar{r},p) \bar{\nabla} \bar{G}(\bar{r},\bar{r}',p) \right] \bar{n} dS \end{aligned} \quad (3)$$

Remontant à l'origine, la température de la surface de l'échangeur (paroi et base) est reliée au flux de chaleur qui s'échappe en tout point de cette surface [1, 3] :

$$T_w(\bar{r}',t) = 2 F(\bar{r}',t) + 2 \int_0^t \iint_{(Se)} \left[G(\bar{r},\bar{r}',t-\tau) \bar{\nabla} T(\bar{r},\tau) - T(\bar{r},\tau) \bar{\nabla} G(\bar{r},\bar{r}',t-\tau) \right] \bar{n} dS d\tau \quad (4)$$

avec :

$$F(\bar{r}',t) = \iiint_{(D)} G(\bar{r},\bar{r}',t) \frac{T_0(\bar{r})}{a_{so}} d^3r - \int_0^t \iint_{(St)} T(\bar{r},\tau) \bar{\nabla} G(\bar{r},\bar{r}',t-\tau) \bar{n} dS d\tau \quad (5)$$

2-2. Conditions aux limites

On envisage sur (St) le cas où la température de surface est égale à la température ambiante $T_a(\bar{r},t)$ supposée égale à la température de référence uniforme T_0 . En conséquence, le terme $F(\bar{r}',t)$ est nul [2]. On étudie le cas où le contact entre le sol et l'échangeur est parfait :

$$T_w(\bar{r},t) = T_f(\bar{r},t)_{paroi} \quad (6)$$

La densité du flux de chaleur à la paroi de l'échangeur est continue :

$$-k_f \left(\frac{\partial T_f(\bar{r},t)}{\partial n} \right)_{paroi} = -k_s \left(\frac{\partial T(\bar{r},t)}{\partial n} \right)_{paroi} \quad (7)$$

En remplaçant les termes intervenants dans les relations (6) et (7) dans l'expression de la température à la paroi de la relation (4) on obtient :

$$T_w(\bar{r}',t) = 2 \int_0^t \iint_{(Se)} \left[\frac{k_f}{k_s} G(\bar{r},\bar{r}',t-\tau) \bar{\nabla} T_f(\bar{r},\tau) - T_f(\bar{r},\tau) \bar{\nabla} G(\bar{r},\bar{r}',t-\tau) \right] \bar{n} dS d\tau \quad (8)$$

La densité de flux de chaleur est exprimée selon la loi de Newton :

$$\bar{\Phi} = -k_f \bar{\nabla} T_f = -k_f \left(\frac{\partial T_f(\bar{r},t)}{\partial r} \right)_{paroi} \bar{n} = h (T_f - T_w)_{paroi} \bar{n} \quad (9)$$

2-3. Equations régissant l'écoulement du fluide

Nous traitons le cas où la masse volumique ρ_f du fluide est supposée constante. Compte tenu des symétries les équations qui régissent l'écoulement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = & - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P^*}{\partial z} + (v_f + v_{yf}) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial T_f}{\partial t} + u \frac{\partial T_f}{\partial r} + w \frac{\partial T_f}{\partial z} = & (a_f + a_{yf}) \left[\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

La viscosité turbulente v_{yf} et la diffusivité turbulente a_{yf} sont déterminées en utilisant le modèle $k-\varepsilon$ [4].

2-4. Conditions aux limites et conditions initiales pour tout le système

A la sortie de l'espace annulaire, le régime est supposé établi. Afin de comparer avec les résultats présentés dans la littérature, les conditions adoptées sont les suivantes :

Pour le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(r, z, 0) = w(r, z, 0) = 0 \\ u(R_i, z, t) = u(r_{ex}, z, t) = 0 \\ w(R_i, z, t) = w(r_{ex}, z, t) = 0 \\ u(r, 0, t) = 0 \\ w(r, 0, t) = w_0 \end{cases} \quad (12)$$

Pour la température :

$$\begin{cases} T(r, z, 0) = T_0 \\ T(r, 0, t) = T_e \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_{ex}} = 0 \\ T(R_i, z, t) = T_w(R_i, z, t) = 2 \int_0^t \iint_{(Se)} \left[\frac{k_f}{k_s} G(t-\tau) \vec{\nabla} T(\tau) - T(\tau) \vec{\nabla} G(t-\tau) \right] \vec{n} dS d\tau \end{cases} \quad (13)$$

2-5. Calcul du coefficient d'échange

La température du mélange est la moyenne des différentes températures locales $T(r, z, t)$ sur une section transversale de l'échangeur (fig. 1) :

$$T_m(z, t) = \frac{2}{W_0(R_i^2 - r_{ex}^2)} \int_{r_{ex}}^{R_i} T(r, z, t) w(r, z) r dr \quad (14)$$

L'équation (9) permet d'exprimer le coefficient de transfert thermique local $h(z, t)$ comme suit :

$$h(z, t) = \frac{\left(k_f \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} \right)_{r=R_i}}{(T_w - T_m)} \quad (15)$$

Le nombre de Nusselt $Nu(z, Re)$ est relié au coefficient de transfert par la relation suivante :

$$Nu = \frac{hD_H}{k_f} \quad (16)$$

3. Résolution numérique

La résolution des équations régissant le champ de vitesse a été faite à l'aide de la méthode de discrétisation aux volumes finis en adoptant la technique du maillage décalé. Le maillage utilisé est de (30×120) . Il est non uniforme et serré au voisinage des parois intérieure et extérieure pour tenir compte des variations importantes de la vitesse et de la température dans la zone de la couche limite. Le couplage pression-vitesse repose sur l'algorithme Semi-Implicit Method for Pressure Linked Revised (*S.I.M.P.L.E.R*) proposé par Patankar [5]. Les équations seront intégrées sur un volume de contrôle $\Delta r \times \Delta z$ et dans un intervalle de temps $[t, t + \delta]$.

Pour la discrétisation de l'équation de l'énergie sur la paroi de l'échangeur, la méthode utilisée sera celle des éléments finis à la frontière [1]. Elle consiste à découper la surface de l'échangeur en éléments annulaires finis de hauteur Δz . La méthode itérative retenue, pour la résolution, au cours des deux étapes est celle de Gauss-Seidel, méthode de balayage ligne par ligne suivant l'axe radial.

4. Résultats

Nous avons obtenu en première étape le champ de vitesses pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds Re correspondantes au régime pleinement turbulent $10000 < Re < 50000$. Nous avons déterminé ensuite le champ de températures pour plusieurs combinaisons de Re et temps t . Nous avons trouvé que h est indépendant de la durée de chauffage (pour une variation de température faible où ρ_f reste constante, voir § 2.3). Il est constant et conserve pratiquement la même valeurs au cours du régime instationnaire. Ce qui est confirmé par les corrélations expérimentales, présentées dans la littérature. Nous avons déterminé numériquement l'évolution du coefficient de transfert local $h(z)$ pour $R_i / r_{ex} = 2$, $L/D_H = 50$. On a présenté dans la figure 2 le nombre de Nusselt $Nu(z)$ en fonction de l'abscisse axiale adimensionnée z / D_H .

$Nu(z, Re)$ peut être corrélé sous la forme suivante :

$$Nu(z, Re) = A(Re) \left(\frac{z}{D_H} \right)^{-n(Re)} \quad (17)$$

Les coefficients $A(Re)$ et $n(Re)$ dépendent du nombre de Reynolds (fig. 3). L'interpolation qui s'approche fidèlement des courbes numériques exige que ces coefficients soient des polynômes de second et troisième degré respectivement (tableau) :

$$A = p_0 + p_1 Re + p_2 Re^2 \quad (18)$$

$$n = q_0 + q_1 Re + q_2 Re^2 + q_3 Re^3 \quad (19)$$

p_0	p_1	p_2	q_0	q_1	q_2	q_3
7.100	0.003385	$-2.539 \cdot 10^{-8}$	0.3636	$1.610 \cdot 10^{-5}$	$-3.7 \cdot 10^{-10}$	$2.702 \cdot 10^{-15}$

Tableau. Coefficients des polynômes.

La valeur moyenne prise sur la longueur entière de l'échangeur du coefficient de transfert en fonction des nombres du Reynolds est présentée, dans la figure 4. Les résultats obtenus par Boetler [6] et Gnielensky [7] sont représentés sur la même figure. On constate une bonne concordance entre les différents résultats.

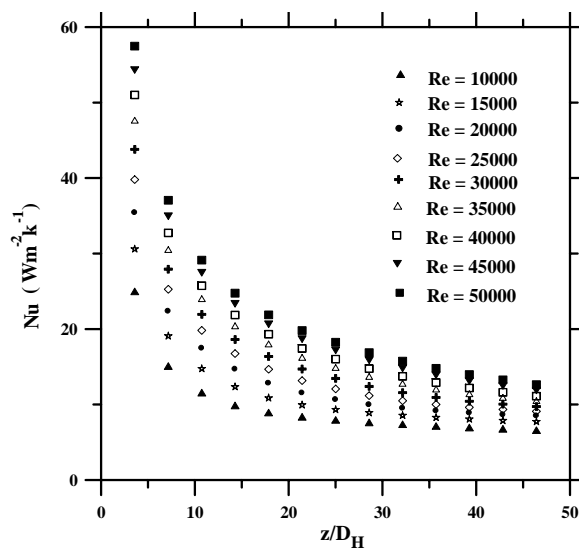


Fig. 2. Variation du coefficient d'échange local pour différents nombres de Reynolds.

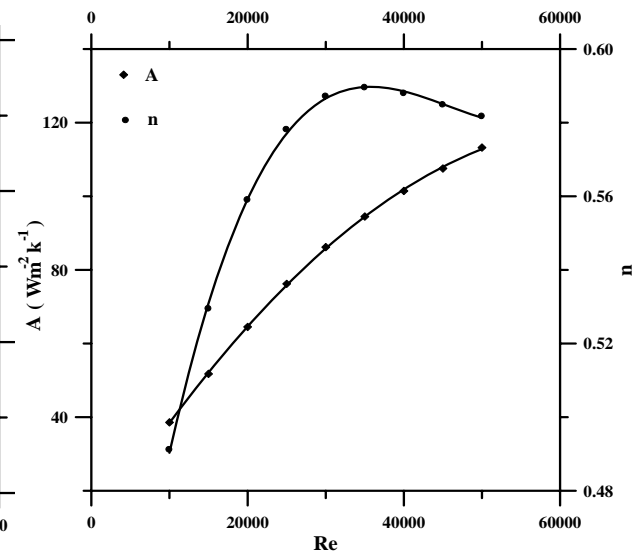


Fig. 3. Variation des coefficients A et n en fonction du nombre de Reynolds.

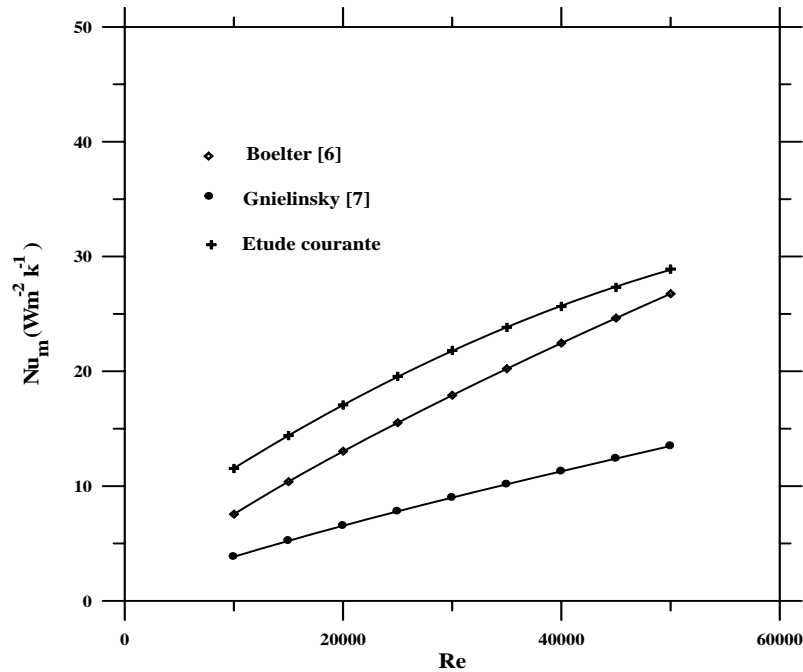


Fig. 4. Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre du Reynolds.

5. Conclusion et perspectives

L'originalité du présent travail est le type de la frontière manipulée. Cette condition aux limites est fondamentale pour la simulation du fonctionnement des échangeurs. La méthode développée est capable de traiter une température d'entrée variable. La simulation nous a permis de déterminer certains paramètres thermophysiques importantes tels que la température à la paroi et la température moyenne du fluide en tout point de l'axe de l'échangeur et en particulier à la sortie. Nous allons prochainement exploiter ce code pour généraliser nos résultats en fonction des différents paramètres tels que R_i / r_{ex} , L/D_H , Pr , etc.

Références

- [1] J. Y. Desmons, Formulation et résolution numérique de problèmes aux limites appliquées aux générateurs de chaleurs tubulaires enterrées, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Valenciennes. (1984)
- [2] J. Y. Desmons and R. Ben Younés, Prévision à long terme de la réponse d'un stockage de chaleur sensible dans le sol, *Int. J. Heat Mass Transf.* 40, 3119, (1997)
- [3] H.S. Carslaw and J.C. Jager, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, London. (1959)
- [4] C.K.G. Lam and K. Bremhorst, A modified form of the k- ϵ model for predicting wall turbulence, *J. of fluids Eng.* 103, 456-460, (1981)
- [5] S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Serie in computational methods in mechanics and thermal sciences, McGraw Hill, New York. (1980)
- [6] M. K. L. Boelter, G. Young, H. W. Inversen, Distribution of heat transfer rate in the entrance section of circular tube, *National Advisory Committee for Aeronautics*, T. N. 1451, (1948)
- [7] V. Gnielenski, *Forced convection in ducts*, Heat exchanger design hand book, Hemisphere publishing corporation. (1984)