

Apport de la technique de décomposition de domaine en réduction modale de branche

Pierre-Olivier LAFFAY¹, Olivier QUEMENER^{1*}, Etienne VIDECOQ¹, Alain NEVEU¹

¹Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry (LMEE)
40, Rue du Pelvoux – 91020 Evry Cedex

* (auteur correspondant : O.Quemener@iut.univ-evry.fr)

Résumé - Cette étude présente l'utilisation d'une technique de décomposition de domaines, adaptée à la formulation modale pour un problème de conduction thermique. Un des intérêts de cette méthode tient dans sa capacité à obtenir une base modale spécifique à chaque sous domaine et donc à améliorer notablement le degré de réduction du problème. L'application traitée est un cas tridimensionnel avec des conditions limites non linéaires ainsi que des sources volumiques variables dans le temps.

Nomenclature

c	capacité thermique, $J.m^{-3}.K^{-1}$	x	état d'excitation d'un mode
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	Symboles grecs	
h	coefficient de convection, $W.m^{-2}.K^{-1}$	Ω	domaine
P_{vol}	puissance volumique, $W.m^{-3}$	$\partial\Omega$	bord d'un domaine
T	température, °C	Γ	partie du bord d'un domaine
N	dimension du modèle complet	ζ	condition de Steklov, $kg.s^{-2}.K^{-1}$
\tilde{N}	dimension du modèle réduit	ε	émissivité
V	mode propre	σ	constante de Stefan-Boltzmann, $W.m^{-2}.K^{-4}$
v	fonction d'essai	σ_{max}	écart maximum entre modèles, K
n_j	normale extérieure au corps Ω_j	σ_{moy}	écart moyen entre modèles, K
M	point de l'espace	α	coefficient de pénalisation
RTC	résistance de contact, $K.m^2.W^{-1}$	Indices et exposants	
t	temps, s	j	numéro de domaine
z	valeur propre d'un mode, s^{-1}	i	numéro d'un mode
Δ	opérateur de Laplace, m^{-2}		
∇	vecteur de l'opérateur nabla, m^{-1}		

1. Introduction

Cette étude s'inscrit dans la thématique de réduction de modèles thermiques non linéaires par méthode modale, qui permet une diminution du temps nécessaire à la simulation, tout en conservant une précision satisfaisante sur l'intégralité du domaine étudié [1]. Depuis peu, afin de pouvoir traiter des cas où apparaissent des discontinuités dans le champ de température (résistances de contact), une réduction par décomposition de domaine a été mise en œuvre [4]. Cette méthode permet la résolution du problème réduit par couplage des différentes équations d'états modaux de chaque sous-domaine.

On étudie ici l'intérêt de l'utilisation de ce procédé de décomposition de domaine pour un cas où l'on considère le contact thermique parfait, mais avec des matériaux dont les propriétés thermophysiques (diffusivité) sont fortement différentes. Les tentatives de réduction utilisant une technique d'amalgame [2,3] montrent que la réduction de modèle sans décomposition de domaine est alors difficile à mettre en œuvre. En outre, il faut garder un grand nombre de modes si l'on désire obtenir un écart entre modèles faible, la réduction du modèle n'est alors pas suffisante pour permettre un gain de temps significatif.

2. Méthodologie

2.1. Obtention et réduction du modèle modal

Considérons un cas de conduction thermique classique sur un domaine Ω , de frontières extérieures Γ_e recevant une condition de convection h avec l'ambiance à T_{ext} . La formulation variationnelle faible correspondante s'écrit de façon classique, avec v une fonction d'essai :

$$\iint_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega = - \int_{\partial\Omega} v h (T_{ext} - T) d(\partial\Omega) - \iint_{\Omega} k \nabla(v) \bullet \nabla(T) d\Omega + \iint_{\Omega} v P_{vol} d\Omega \quad (1)$$

Le modèle réduit modal s'exprime en considérant la projection du champ de température sur une base modale adaptée et en utilisant le fait que seuls quelques modes possèdent une influence non négligeable sur la reconstruction du champ thermique :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot V_i(M) \cong \sum_{i=1}^{\tilde{N} \ll N} x_i(t) \cdot V_i(M) \quad (2)$$

Le problème aux valeurs propres de branche $\{z_i, V_i\}$ permettant l'obtention d'une base adaptée à ce cas de conduction thermique non-linéaire est :

$$\forall M \in \Omega \quad k(M) \Delta V_i(M) = z_i c(M) V_i(M) \quad (3)$$

$$\forall M \in \partial\Omega \quad k \nabla V_i(M) \cdot n = -\zeta z_i V_i(M) \quad (4)$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres sous forme discrète permet de déterminer N modes $\{z_i, V_i\}$. La spécificité de cette base est sa condition aux limites (équation 4) qui fait intervenir la valeur propre du mode. On note l'existence d'un paramètre ζ dit nombre de Steklov, qui permet d'éviter la dégénérescence du problème modal de branche [1].

La procédure de réduction de la base qui permet de diminuer le nombre de modes de N à \tilde{N} fait appel à une technique d'amalgame modal [2,3], qui permet par combinaisons linéaires d'obtenir \tilde{N} modes à partir de la base initialement calculée.

L'application de l'équation 2 sur la formulation variationnelle du cas thermique (équation 1), permet d'obtenir un système d'équations d'états, dont le nombre d'inconnues est égal au nombre \tilde{N} de modes utilisés. On remplace ainsi le système matriciel (N, N) sur les températures aux N nœuds du maillage par un système matriciel (\tilde{N}, \tilde{N}) sur les états des \tilde{N} modes.

2.2. Couplage des modèles réduits

Dans la technique de décomposition de domaine, les conditions sur les frontières internes Γ_i sont caractérisées par un saut de température liée à l'existence d'une résistance de contact RTC. On ajoute ainsi à l'équation 1 une fonctionnelle de saut de température :

$$\Delta_{\Gamma_i}^T(v, T) = - \int_{\Gamma_i} \frac{[[v]]_{\Gamma_i} [[T]]_{\Gamma_i}}{RTC} d\Gamma_i \quad (5)$$

Dans l'équation 5, $[[f]]_{\Gamma_i}$ désigne le saut de f à travers la frontière Γ_i . Dans le cas présent où le contact est considéré parfait, on choisit une valeur RTC suffisamment faible pour que le saut de température soit numériquement négligeable.

Lorsque l'on sous-structure le problème, le système étudié est alors considéré comme un ensemble de sous-domaines juxtaposés, chacun donnant lieu au calcul d'une base modale de branche spécifique. Comme pour un cas mono-corps, le système d'équation d'états est obtenu en projetant la formulation faible de l'équation de la chaleur dans chaque base respective à chaque sous domaine.

Compte tenu de la réduction du modèle, on ne peut plus imposer le respect rigoureux de la continuité de flux à l'interface entre deux domaines. On fait alors intervenir dans l'équation 1 en plus du terme 5, une fonctionnelle de pénalisation de saut de flux $\Delta_{\Gamma_i}^{\Phi}$ qui permet l'équilibre entre les sauts de température et les sauts de flux [5].

$$\Delta_{\Gamma_i}^{\Phi}(T, v) = \alpha \int_{\Gamma_i} [[k \nabla(T) \cdot n_i]] [[k \nabla(v) \cdot n_i]] d\Gamma_i \quad (6)$$

Le paramètre α en permet sa pondération, on étudiera son influence dans l'application traitée.

3. Application

3.1. Description du problème physique

On s'intéresse au cas 3D (figure 1a) d'un bloc en acier Ω_1 ($k=52 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $c=3,84.10^{-6} \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$), contenant deux cartouches chauffantes Ω_2 et Ω_3 ($k=8 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $c=4,2.10^{-6} \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$). Ce bloc est parcouru par deux conduits dans lesquels circule de l'huile qui échange par convection ($T_h=40^\circ\text{C}$, $h_h=40 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) le long de la frontière Γ_1 . Sur deux faces des frontières externes du bloc Γ_2 , des conditions de convection ($h_e=8 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) et rayonnement ($\varepsilon=0,9$) sont appliquées par rapport à l'ambiante ($T_{\text{ext}}=300\text{K}$). Les autres faces Γ_3 sont considérées comme parfaitement isolées. On se propose de simuler l'évolution thermique lorsque les deux sources Ω_2 et Ω_3 dissipent des puissances variables (figure 1b) dans le temps (notées respectivement P_2 et P_3), à partir d'un champ thermique initial uniforme $T_0 = 300\text{K}$.

La frontière interne Γ_i est donc constituée de deux parties : Γ_{12} et Γ_{13} . Γ_{12} étant l'interface entre le bloc (Ω_1) et la cartouche chauffante (Ω_2), de la même manière Γ_{13} est l'interface entre le bloc (Ω_1) et la cartouche chauffante (Ω_3).

Le problème physique est donc décrit par les équations (6,7,8,9,10,11,12,13,14,15) dans le cas où le contact est parfait et par les équations (6,7,8,9,10,11,16,17) dans le cas contraire. Nous considérons une résistance de contact particulièrement faible : $RTC = 0.000001 \text{ K.m}^2.\text{W}^{-1}$ qui introduit un écart de température négligeable par rapport à l'évolution thermique de l'ensemble.

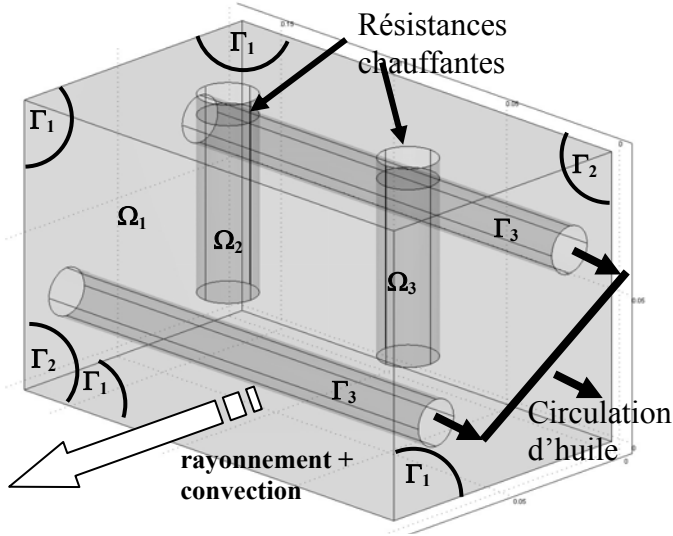


Figure 1a : Géométrie

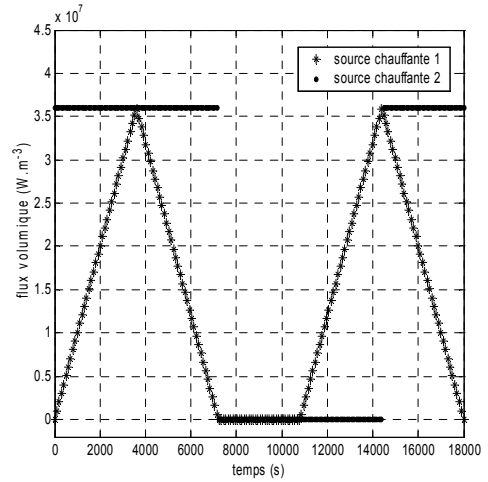


Figure 1b : Evolution du flux surfacique

Figure 1 : Présentation du problème

Le problème physique est donc le suivant :

$$j \in \{1, 2, 3\} \quad \forall M \in \Omega_j \quad c_j \frac{\partial T_j(M, t)}{\partial t} = k_j \Delta T_j(M, t) + P_j(M) \quad (7)$$

$$j \in \{1, 2, 3\} \quad \forall M \in \Omega_j \quad T_j(M, 0) = T_{0,j}(M) \quad (8)$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \quad \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad (9)$$

$$\forall M \in \Gamma_2 \quad k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = h_e (T_1(M, t) - T_{\text{ext}}) + \varepsilon \sigma (T_1^4(M, t) - T_{\text{ext}}^4) \quad (10)$$

$$\forall M \in \Gamma_3 \quad k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = h_h (T_1(M, t) - T_h) \quad (11)$$

Avec si le contact est parfait les quatre conditions supplémentaires :

$$\forall M \in \Gamma_{12} \quad -k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_2 \nabla T_2(M, t) \cdot \mathbf{n}_2 \quad (12)$$

$$\forall M \in \Gamma_{12} \quad T_1(M, t) = T_2(M, t) \quad (13)$$

$$\forall M \in \Gamma_{13} \quad -k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_3 \nabla T_3(M, t) \cdot \mathbf{n}_3 \quad (14)$$

$$\forall M \in \Gamma_{13} \quad T_1(M, t) = T_3(M, t) \quad (15)$$

Et si au contraire, il y a une résistance de contact, les double conditions suivantes :

$$\forall M \in \Gamma_{12} \quad -k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_2 \nabla T_2(M, t) \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{T_1(M, t) - T_2(M, t)}{\text{RTC}} \quad (16)$$

$$\forall M \in \Gamma_{13} \quad -k_1 \nabla T_1(M, t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_3 \nabla T_3(M, t) \cdot \mathbf{n}_3 = \frac{T_1(M, t) - T_3(M, t)}{\text{RTC}} \quad (17)$$

3.2. Résultats

L'écriture sous forme discrète du problème utilise la méthode des éléments finis P^1 , le schéma temporel est implicite à pas de temps variable. Le problème complet classique est résolu par gradient conjugué préconditionné par la diagonale, le problème modal utilise une

décomposition LDL^t. La fréquence du processeur est de 2,4Ghz et la mémoire vive est de 2Go.

On présente ici les résultats correspondant à deux configurations :

- Le domaine Ω ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$) décrit comme étant un seul corps : on ne calcule donc qu'une seule base définie sur tout le domaine dont la dimension est \tilde{N} .
- Au contraire chaque corps est décrit indépendamment, il y a alors 3 bases de branches définies respectivement sur Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 . La dimension du problème réduit couplé dépend donc des ordres de réduction respectifs. Par convention on notera la réduction $\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3\}$ où \tilde{N}_i est l'ordre de réduction utilisée pour le sous domaine Ω_i .

Compte tenu de leurs constructions bien distinctes, les maillages ne sont pas construits de la même manière. La comparaison s'effectue en respectant malgré tout le même ordre de grandeur de tétraèdres, comme l'indique le tableau suivant :

	Nombre de tétraèdres			Nombre de nœuds
	Bloc en acier Ω_1	Source Ω_2	Source Ω_3	
Modèle mono-corps	101540	5646	5655	23503
Modèle multi-corps	91530	4931	4995	23306

Tableau n°1 : *Données respectives de la discrétisation*

Une première étude présente l'influence de la fonctionnelle de flux (6). Le tableau 2 présente les résultats en terme de précision pour un modèle réduit multi-corps à 50 modes pour différentes valeurs du paramètre α défini dans (6). Ces modèles réduits sont tous caractérisés par un réassemblage tous les 100 pas de calcul pour tenir compte des non linéarités. Par contre pour le cas complet qui sert de référence, on effectue un réassemblage systématique à chaque pas de temps. Les écarts (σ_{\max} et σ_{moy}) par rapport au modèle éléments finis, sont indiqués en pourcentage de l'évolution thermique maximale $\Delta T_{\max} = 656\text{K}$:

$$\sigma_{\max} (\%) = \frac{\max_t (\max_{\Omega} (T - T_{\text{référence}}))}{\Delta T_{\max}} \cdot 100 \quad (18)$$

$$\sigma_{\text{moy}} (\%) = \frac{\int_t \int_{\Omega} |T - T_{\text{référence}}| d\Omega dt}{\int_t \int_{\Omega} d\Omega} \cdot \frac{100}{\Delta T_{\max}} \quad (19)$$

α	0	10	20	30	34	40
$\sigma_{\max} (\%)$	52.85	38.14	23.14	9.57	6.42	14.00
$\sigma_{\text{moy}} (\%)$	35.71	26.00	15.28	5.57	1.57	4.42

Tableau 2 : *Influence du paramètre de pondération de la fonctionnelle de saut de flux*

Ces résultats mettent en évidence l'importance du choix de ce paramètre de pondération de la fonctionnelle de saut de flux, choix qui pour l'instant reste ouvert. A partir de la connaissance de la valeur optimale de ces paramètres, on vient alors comparer les résultats en terme de précision et de temps calcul pour les configurations mono-corps et multi-corps. Le tableau 3 présente les résultats obtenus.

Mono Corps	\tilde{N}	300	250	200	150	100	50
	σ max (%)	4,9	5,7	7,0	9,2	10,9	14,1
	σ moy (%)	0,71	0,75	0,78	0,80	0,88	1,57
	T _{CPU} (s)	538	362	238	140	66	21
Multi Corps	$\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3\}$	{100,100,100}	{90,80,80}	{80,60,60}	{50,50,50}	{40,30,30}	{40,5,5}
	σ max (%)	4.57	4.57	4.70	4.33	5.00	6.42
	σ moy (%)	0.73	0.68	0.71	0.71	0.86	1.57
	T _{CPU} (s)	137	105	81	58	47	41

Tableau 3 : Comparaison modèle complet – modèles réduits

A titre de comparaison, le temps de calcul du modèle éléments finis est de 1105s. Ainsi la réduction du modèle mono-corps avec un écart entre le modèle éléments finis et le modèle modal inférieure à 5% en valeur maximale, ne permet qu'un gain de temps de l'ordre de 2.

Au contraire en multi-corps, pour un écart maximum inférieur à 5%, il est possible de prendre un modèle d'ordre global 100 (40+30+30) qui tourne en 47s soit un gain en temps calcul de l'ordre de 23. On comprend alors l'intérêt qu'il peut y avoir à utiliser des techniques de réduction de modèles avec une méthode de sous-structuration.

4. Conclusion

La méthode modale avait déjà montré son efficacité dans le cas d'un domaine homogène de forme complexe. Le cas d'une variation brutale des propriétés thermophysiques est connu pour être difficile à réduire avec une approche modale. Ici, nous avons montré, qu'en introduisant une liberté sur l'interface par le biais d'une résistance de contact, il était alors possible d'effectuer une réduction par corps, tout en conservant un écart entre le modèle modal obtenu et le modèle éléments finis d'origine faible. Le gain de temps obtenu est alors important.

Références

- [1] A. Neveu, K. El-Khoury, B. Flament, Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche, *IJTS* 38 (1999), 289-304.
- [2] A. Oulefki, A. Neveu, Réduction par amalgame modal d'un modèle thermique, *J.Phys. III France* 3 (1993), 303-320
- [3] O.Quéméner, A. Neveu, E. Videcoq, A specific method for the branch modal formulation : Application to a highly non-linear configuration, *IJTS* 46 (2007), 890-907.
- [4] P-O. Laffay, O. Quéméner, A. Neveu, Simulation d'un microprocesseur par couplage de modèles réduits modaux, Congrès français de thermique (Ile des Embiez, 29mai-1juin 2007), 1209-1214.
- [5] P-O. Laffay, O. Quéméner, A. Neveu, Optimisation de couplage de modèles réduits par fonctionnelle de pénalisation de flux : application à un composant, Journées internationales de thermique (Albi, 28-30 août 2007), 236-240