

Modélisation par les fonctions de GREEN de l'échange convectif fluide-paroi

Ali GRINE*, Jean-Yves DESMONS, Souad HARMAND

Laboratoire de Mécanique et Energétique, Le Mont Houy, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 59313 Valenciennes CEDEX 9

*(auteur correspondant : ali.grine@univ-valenciennes.fr)

Résumé - Ce travail traite les phénomènes convectifs en régime transitoire et plus particulièrement de l'identification du coefficient d'échange convectif sur une plaque plane chauffée et placée dans un canal rectangulaire. Nous avons élaboré un modèle mathématique fondé sur la résolution directe, par la méthode des fonctions de Green, de l'équation linéaire de propagation de la chaleur dans un fluide en mouvement, en interaction avec les parois d'un solide. Cette démarche originale permet, connaissant le profil de vitesse dans la couche limite dynamique, de déterminer analytiquement l'évolution du profil de température dans tout le fluide, les températures pariétales et la couche limite thermique, puis le coefficient d'échange convectif. Les valeurs obtenues sont en très bon accord avec celles obtenues à partir de corrélations issues de la littérature dans des conditions comparables.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
G_ϕ	fonction de Green	Φ	densité de flux, $W.m^{-2}$
λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	δ_T	épaisseur de la couche limite thermique, m
T	température, $^\circ C$	δ	épaisseur de la couche limite dynamique, m
t	temps, s	E	fonction de Heaviside
x, y, z	variables spatiales, m		

1. Introduction

Ce travail présente une méthode originale d'identification du coefficient d'échange convectif basée sur l'utilisation des fonctions de Green. Les méthodes les plus connues et les plus couramment utilisées pour identifier ce coefficient h sont des méthodes numériques ou semi analytiques [1,2,3,4]. La méthode proposée dans cet article est basée sur le développement de modèles théoriques décrivant la répartition spatio-temporelle de la température dans le fluide ainsi que son évolution à l'interface. Le fluide est soumis à un flux de chauffage par l'intermédiaire d'une plaque et une température constante à l'infini.

La méthode permet d'obtenir, en régime permanent, la valeur du coefficient d'échange convectif au voisinage d'une paroi en fonction du point et des caractéristiques de l'écoulement. Elle permet également d'étudier l'évolution de ce coefficient d'échange lorsque les parois sont soumises à des sollicitations thermiques dépendantes du temps.

2. Présentation du problème

Une bande chauffante (S_p) plane, de grande longueur b, de largeur c, située au bord d'un demi-plan isolant au dessus duquel s'écoule un fluide, est chauffée sur sa face inférieure par une densité de flux Φ (convection+rayonnement) connue. La face supérieure émet alors dans le fluide une densité de flux $\Phi(x,y,t)$. Nous nous proposons d'établir la relation analytique qui existe entre cette densité et le champ de température dans le fluide $T(\vec{r},t)$. Cette relation se présentera sous forme d'une série dont le premier terme apporte près de 50 % de la solution générale [5], les termes suivants améliorant le résultat en tenant compte de la couche limite dynamique.

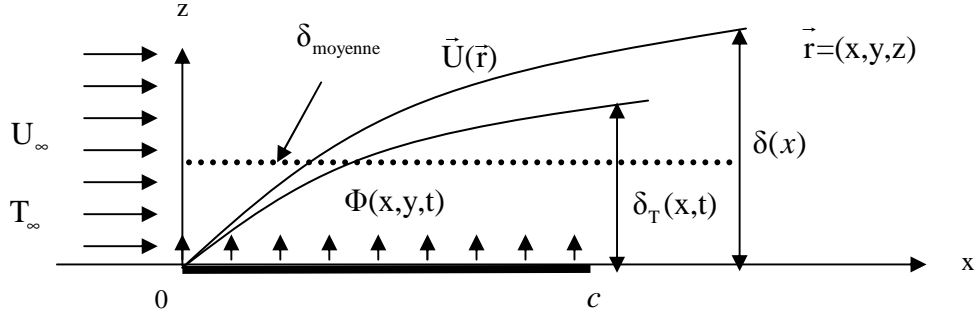


Figure 1 : Schéma et notation du problème de la convection forcée sur la plaque plane

Le fluide (air), de propriétés physiques constantes, s'écoule avec une vitesse $\vec{U}(\vec{r},t)$, supposée connue. Ce champ de vitesse dépend en général du point et du temps, est supposé isovolume ($\text{div}(\vec{U})=0$) et s'annule sur la paroi solide avec laquelle le fluide est en contact.

L'équation de transport de chaleur dans le fluide est en générale non linéaire mais elle possède une partie linéaire, dominant dans le cas d'un écoulement forcé, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} - \Delta T(\vec{r},t) + \frac{1}{a} \text{div}(\vec{U}(\vec{r},t)T(\vec{r},t)) = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (1)$$

On peut toujours écrire le champ de vitesse sous la forme : $\vec{U}(\vec{r},t) = U_\infty \vec{i} + \vec{v}(\vec{r},t)$ où U_∞ représente le champ de vitesse moyen loin de la paroi et $\vec{v}(\vec{r},t)$, l'écart du champ de vitesse réel par rapport au champ uniforme $U_\infty \vec{i}$. $\vec{v}(\vec{r},t)$ est à divergence nulle et est égal à $-U_\infty \vec{i}$ sur la plaque plane.

Soit P un point quelconque sur la paroi de la plaque plane soumise à l'écoulement ; appelons $\Phi(\vec{\rho},t)$; ($\Phi(\vec{\rho},t < 0) = 0$ $\vec{\rho} = \vec{OP}$), la densité de flux de chaleur entrant dans le fluide par conduction au point P. Nous avons alors :

$$K \vec{\nabla} T(\vec{r},t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{\rho}} = \Phi(\vec{\rho},t) \quad (2)$$

Nous allons maintenant établir une relation mathématique exacte entre le champ $T(\vec{r},t)$ et le champ pariétal, $\Phi(\vec{\rho},t)$.

3. Solution analytique par la méthode des fonctions de Green

Le changement de variable suivant : $T(\vec{r},t) = e^{\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} t \right)} T_1(\vec{r},t)$, permet de mettre l'équation de l'énergie (1) sous la forme d'une équation de conduction pure avec un terme de source dépendant linéairement du champ inconnu T_1 :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\vec{r},t)}{\partial t} - \Delta T_1(\vec{r},t) + \underbrace{\frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r},t) \cdot \vec{e}^{-\frac{x}{\ell}} \vec{\nabla} e^{\frac{x}{\ell}} T_1(\vec{r},t)}_{\text{terme de source}} = 0 \quad \left(\frac{U_\infty}{2a} = \frac{1}{\ell} \right) \quad (3)$$

On peut dès lors utiliser la méthode des fonctions de Green de la même façon que dans un solide et choisir une fonction de Green $G_\varphi(\vec{r},\vec{r}',t)$ [5,6,7] permettant d'obtenir le champ de température dans le fluide sous la forme :

$$T(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau \frac{U_\infty}{2\ell} \iint_{S_p} e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_\varphi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \Phi(\vec{r},\tau) dS_p}_{[T_0]} + \frac{1}{a} \int_0^t d\tau \frac{U_\infty}{2\ell} \iiint_{(D)} d^3r e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} T(\vec{r},\tau) \vec{v}(\vec{r},\tau) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\varphi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \vec{i} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cette expression est une relation linéaire intégrale exacte (mais implicite puisque $T(\vec{r},\tau)$ figure dans le second membre) entre le champ de température régnant dans tout le fluide, et le flux entrant par conduction dans celui-ci par la paroi. Cette relation intégrale peut s'écrire formellement sous la forme : $|T\rangle = |T_0\rangle + V|T\rangle \Rightarrow |T\rangle = (1-V)^{-1}|T_0\rangle$ (5)

Où V représente l'opérateur linéaire intégral du second membre agissant sur le champ de température réel $|T\rangle$. Ce type d'équation peut être, en principe, résolu par itération, méthode qui consiste à développer l'opérateur $(1-V)^{-1}$ sous la forme :

$$(1-V)^{-1} = 1 + V + V^2 + V^3 + \dots \text{ soit : } |T\rangle = |T_0\rangle + \underbrace{V|T_0\rangle}_{T_1} + \underbrace{V^2|T_0\rangle}_{T_2} + V^3|T_0\rangle + \dots$$

Le premier terme $|T_0\rangle$ représente le champ de température, engendré par conduction, dans le fluide comme s'il s'écoulait à vitesse uniforme. Nous verrons qu'il représente à lui seul 50 % de la solution générale. Les termes suivants corrigent progressivement le premier en fonction de la forme de la couche limite dynamique.

Nous n'analyserons dans cet article que l'influence des termes T_1 et T_2 pour un champ de vitesse indépendant du temps.

Dans notre configuration géométrique (en supposant, pour simplifier, que le flux de chauffage est uniforme dans la direction y), le premier terme de l'équation (4) est développé dans un de nos anciens articles [5].

La fonction de Green se factorise en trois parties : $G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t) = \frac{1}{a^2} G_\phi^1(x,x',t) G_\phi^2(y,y',t) G_\phi^3(z,z',t)$

(suivant x , y et z), avec :

$$G_\phi^1(x,x',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4at}} ; \quad G_\phi^2(y,y',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4at}} ; \quad G_\phi^3(z,z',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left(e^{-\frac{(z-z')^2}{4at}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4at}} \right)$$

4. Calcul des termes correctifs

Appelons $T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r},\tau)$, le champ de température dans le fluide solution des équations précédentes pour une impulsion de flux localisée en un point quelconque $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ donné sur la paroi solide : $\Phi(\vec{p},t) = \delta(\vec{p} - \vec{r}_i)\delta(t)$. L'intérêt de l'introduction de ce champs est que, pour un flux quelconque $\Phi(\vec{r}_1,t)$ (avec : $\vec{r}_1 \in S_\ell$), le champ de température dans le fluide s'écrira :

$$T(\vec{r},t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_\ell} dS_{\vec{r}_i} T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r},t-\tau)\Phi(\vec{r}_i,t) \quad (6)$$

Ou encore pour $\Phi(\vec{r}_1,t) = \Phi_0$; $T(\vec{r},t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r},\tau)$

On a alors : $T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r},t) = T_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r},t) + T_{\delta\vec{r}_i}^1(\vec{r},t) + T_{\delta\vec{r}_i}^2(\vec{r},t) + \dots$ et le terme correctif dû à la première itération s'écrit : $T_1(\vec{r},t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}_i}^1(\vec{r},\tau)$ avec :

$$T_{\delta\vec{r}_i}^1(\vec{r},t) = \frac{1}{\lambda_f a} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{-\frac{(x-x_1)}{\ell}} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r\vec{v}(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} G_\phi(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, \tau) G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \vec{i} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nous ne traiterons dans ce travail qu'un cas de couche limite dynamique très simplifiée.

Admettons que le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ soit de la forme :

$$\vec{v}(\vec{r}) = E(f(x) - z) U_\infty (g(z, f(x)) - 1) \vec{i} \quad (8)$$

On obtient donc :

$$T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r},t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^4} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty dx G_\phi^1(x_1, x, \tau) \left(\frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \right) K(x, z', \tau, t - \tau) \quad (9)$$

$$\text{avec : } K(x, z', \tau, t - \tau) = \int_0^{f(x)} dz G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) (g(z, f(x)) - 1) ; g(z, f(x)) = \frac{z}{\delta} \left(2 - \frac{z}{\delta} \right).$$

Le calcul purement analytique du terme correctif n'est relativement aisé que si l'on peut accéder analytiquement au calcul de l'intégrale suivant x . Cela est possible dans le cas où $f(x) = \text{constante} = \delta$: couche limite dynamique d'épaisseur constante.

Dans le cas d'une bande infinie ($b \rightarrow \infty$) :

$$T_1(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0 U_\infty}{2\lambda_f a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left\{ \left(e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \times a \left(-\frac{(z-\delta)^3}{6\delta^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{\delta}{6} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) + \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{2\delta+z}{u}\right) \right) \right. \\ \left. \left(-\frac{u^2}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u^2}{4\delta} i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u}{4} i \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) \right) \right\} \quad (10)$$

$$\text{Le terme d'ordre 2 s'écrit : } T_2(\vec{r}, t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\bar{r}}^2(\vec{r}, \tau) \quad (11)$$

$$\text{Avec : } T_{\delta\bar{r}}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{a^4 \lambda_f} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', t) \right) K_\delta^2(z', t) \quad (12)$$

Où $K_\delta^2(z', t) = \int_0^\delta dz v(z) \int_0^t d\tau K_\delta^1(z, t - \tau) G_\phi^3(z, z', \tau)$ possède les mêmes propriétés que $K_\delta^1(z', t)$.

Le calcul du terme d'ordre 2, après calcul de $K_\delta^2(z, \tau)$, (fonction des erf et erfc) [8], conduit finalement à :

$$T_2(\vec{r}, t) = \Phi_0 \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t du \left\{ \left(-\left(2\frac{c-x}{u^2} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - \left(\frac{2x}{u^2} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \times K_\delta^2(z, u) \right\} \quad (13)$$

5. Résultats et analyse

Nous appliquons maintenant le modèle développé précédemment pour un échelon de flux unité $\Phi_0 = 1 \text{ W/m}^2$, distribué sur toute la surface de la bande chauffante avec une vitesse d'air à l'infini $U_\infty = 1 \text{ m/s}$ et une température $T_\infty = 25^\circ\text{C}$.

Nous présentons nos résultats, comparés à ceux disponibles dans la littérature ; à savoir la méthode différentielle, la méthode intégrale et celle des volumes finis [4].

Les résultats numériques obtenus par ces méthode sont ceux du modèle physique (fig.1), où la vitesse d'écoulement est $U_\infty = 1 \text{ m/s}$ et la couche limite thermique est dépendante de x et du temps, la couche limite dynamique étant stationnaire $\delta = 5x/\sqrt{\text{Re}_x} = 5\sqrt{vx/U_\infty}$.

Sur la figure 2, nous représentons l'évolution des températures en fonction du temps, au milieu de la plaque. Nous constatons que les différentes courbes obtenues par les différentes méthodes évoluent de façon analogue dans la période de temps considérée, avec cependant des différences relativement importantes pour le régime permanent.

En ce qui concerne notre méthode, on constate une très forte anomalie, sous forme d'un pic négatif, se produisant aux temps critiques $t_c = x/U_\infty$. Cette anomalie, évidemment dénuée de sens physique, provient du procédé itératif utilisé pour résoudre l'équation intégrale (très probablement en raison de la très faible valeur de la longueur caractéristique l ($l \approx 8,85 \cdot 10^{-6}$ m) comparée à l'épaisseur de la couche limite δ ($\delta \approx 0,0031$ m)), au voisinage des temps critiques $t_c = x/U_\infty$. En revanche pour les temps faibles, nos résultats sont cohérents avec ceux des autres méthodes. Il en est de même en régime permanent, qui est d'ailleurs très rapidement atteint. La série itérative converge rapidement en régime permanent puisque avec deux termes correctifs seulement, nous obtenons un écart relatif maximal de 5 % avec la méthode des volumes finis et de 10 % avec les autres méthodes. La figure 3, représente l'évolution du rapport $\Phi_0 / T(x,t)$, équivalent en régime permanent à un coefficient d'échange convectif, qui présente une singularité en $1/\sqrt{t}$ au voisinage de $t = 0$.

Il décroît ensuite jusqu'à une valeur en régime permanent dépendante du type de méthode. Le tableau présenté ci-dessous montre l'écart relatif entre le coefficient d'échange convectif, en régime permanent, obtenu par notre modèle théorique et celui de la littérature [9] pour différentes abscisses x en régime permanent.

Le coefficient d'échange h obtenu par la modélisation analytique du fluide parfait est presque la moitié de la solution donnée par la littérature et cela quelle que soit la position du point de mesure et la vitesse d'écoulement, ce qui montre que la loi de dépendance de h , en fonction de la position est la même (d'autres calculs non présentés ici confirment que cette loi de dépendance est également valable pour la vitesse).

On constate que cet écart diminue en augmentant le nombre d'itérations. Il passe de 45 % à 22 % après la première itération et à 10 % après la deuxième itération. Par extrapolation, l'écart relatif peut atteindre 2 % après la quatrième itération.

x(m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8
<u>Après la première itération</u>							
$\Delta(\%)$	22,93	22,90	22,82	22,84	22,87	22,87	22,86
<u>Après la deuxième itération</u>							
$\Delta(\%)$	10,61	10,66	10,62	10,61	10,59	10,63	10,59

Tableau : écart en pourcentage entre $h_{\text{Modèle}}$ et $h_{\text{Littérature}}$ pour $0 < x' < c$; $c = 0,21$ m

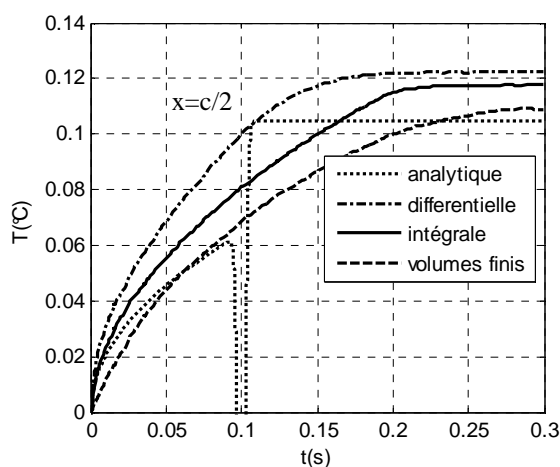


Figure 2 : Evolution temporelle de la température pariétale pour différentes méthodes

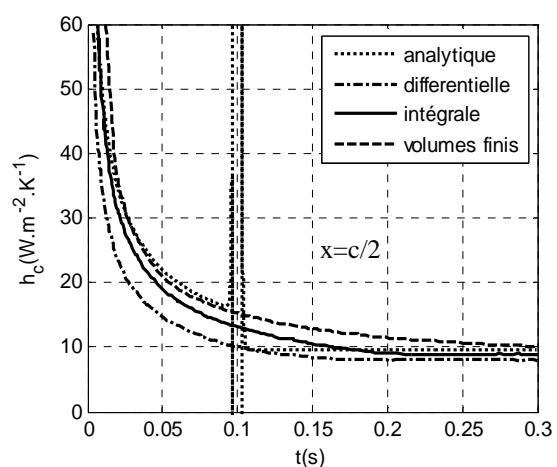


Figure 3 : Evolution temporelle du coefficient d'échange convectif pour différentes méthodes

6. Conclusion

Le travail présenté dans cet article concerne le développement d'un modèle analytique d'identification des échanges thermique sur une plaque plane. La démarche théorique développée est originale par l'utilisation de la méthode des fonctions de Green et permet d'établir une relation intégrale linéaire exacte, découlant de l'équation différentielle de propagation de la chaleur dans le fluide, entre le champ de température dans celui-ci et le flux de chaleur le pénétrant par la paroi solide, et d'en expliciter la forme analytique (relation 4) en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Cette démarche permettra d'identifier la répartition de la température pariétale ainsi que la température dans le fluide en régime transitoire.

Les termes correctifs que nous avons examinés dans cet article corrigent le terme de la conduction pure (représentant déjà près de 50 % de la solution générale en régime permanent) en fonction de la forme de la couche limite.

Tout comme dans les corrélations issues de la littérature, le coefficient de transfert convectif prend des valeurs importantes au voisinage de $t = 0$, décroît très rapidement et tend vers une valeur limite en régime permanent qui suit la même loi de dépendance $\left(\sqrt{x/U_\infty}\right)$ en fonction de la vitesse et de la position.

Enfin la méthode utilisée peut s'étendre au cas où le flux de chaleur à l'interface est variable dans le temps et dépendant du point.

Nous avons pu mettre en évidence les points suivants :

- La série converge très rapidement pour les temps très faibles (régime conductif) et les temps (relativement) très grands (régime permanent)
- La prise en compte de deux termes correctifs, toujours en régime permanent, suffit à approcher à près de 10 % la réponse obtenue par les autres méthodes, de manière uniforme lorsque nous prenons en compte une couche limite dynamique.
- La durée du régime transitoire est faible : la condition de Newton avec un coefficient de convection constant est très rapidement valide et notre méthode présente l'intérêt de permettre de déterminer analytiquement ce coefficient dans des conditions et des géométries variées.

Références

- [1] M. Lachi, M. Rebay, E. Mladin et J. Padet. Etude de la convection forcée transitoire sur une plaque plane avec la méthode intégrale. *SFT*. 2003, 1-8
- [2] M. Lachi, E. Mladin M. Rebay et J. Padet. Modélisation du couplage conduction – convection entre un écoulement et une plaque plane. *SFT*. 2002, 101-106.
- [3] G Polidori, M. Lachi et J. Padet. Unsteady convective heat transfer on a semi-infinite flat surface impulsively heated. *Int. Comm. Heat. Mass. Transfer*, 1998 33-42.
- [4] M. Stoian. Couplage thermique convection – conduction en régime non stationnaire. *Thèse à l'université de Reims* (2006).
- [5] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Modélisation analytique de la convection transitoire sur plaque plane. *SFT 2007, Ile des Embiez*, 492-500.
- [6] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Identification Models for Transient Heat Transfer on a Flat Plate. *Experimental thermal and Fluid Science*. 31 (2007) 701-710.
- [7] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux. *Applied Thermal Engineering*. 27 (2007) 492-500
- [8] A. Grine. Etude théorique et expérimentale de la convection forcée sur plaque plane en régime transitoire. *Thèse à l'université de Valenciennes*. n° 07/44. (2007).
- [9] JF. Sacadura. Initiation aux transferts thermiques. *Cast. INSA de Lyon.Tec. et doc. de Paris*. (1980).