

Nouvelle approche numérique pour la modélisation des interfaces d'un canal vertical asymétriquement chauffé

Charles GARNIER^{1,2*}, Anne SERGENT^{1,2}, Yann FRAIGNEAU¹, Patrick LE QUERE¹

¹ LIMSI, CNRS UPR 3251, Bât 508 - BP 133 - 91403 Orsay, France

² Université Pierre et Marie Curie - Paris 06, 4 place Jussieu 75005 Paris, France

* (auteur correspondant : charles.garnier@limsi.fr)

Résumé - Ce travail vise à modéliser les interactions entre un canal vertical asymétriquement chauffé et le réservoir dans lequel il est plongé. Un jeu de conditions limites est proposé combinant des conditions limites de pression de type Robin, et une condition de type traction pure à l'interface basse. Un nouveau paramètre de longueur de relaxation doit être défini pour modéliser la zone d'influence du canal sur l'environnement. Les résultats sont comparés à un calcul complet associant canal vertical et réservoir de grande dimension. Un très bon accord est obtenu entre ces deux approches.

Nomenclature

H_c	hauteur, m	V	vitesse verticale adimensionnée
L_c	largeur, m	<i>Symboles grecs</i>	
P	pression motrice adimensionnée	α	diffusivité thermique, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl	β	coefficient d'expansion volumique, K^{-1}
q''	densité de flux, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	λ	conductivité thermique, $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Ra	nombre de Rayleigh	θ	température dimensionnée, K
T	température adimensionnée, $T = \frac{\theta - \theta_{ext}}{\Delta T}$	ν	viscosité cinématique, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
U	vitesse horizontale adimensionnée		

1. Introduction

Les écoulements ouverts de convection naturelle sont présents dans les systèmes industriels tels que le refroidissement passif des bâtiments, de panneaux solaires ou les cheminées. Le canal vertical est un prototype de ces configurations. La résolution numérique de ce type d'écoulement peut s'effectuer soit *i*) en simulant le canal et son environnement extérieur, soit *ii*) en ne considérant que le canal seul. Dans ce travail, nous retenons la deuxième approche afin de simuler un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. La principale difficulté réside alors dans la définition de l'écoulement aux interfaces haute et basse du canal. Les premières études expérimentales autour du canal vertical [1, 2, 3] se sont principalement intéressées à la caractérisation du transfert de chaleur. Par la suite les premières études numériques [4, 5] basées sur une approche parabolique des équations de Navier-Stokes ont aussi caractérisé le transfert de chaleur. La question de la modélisation des interfaces a notamment été posée par Dalbert *et al.* [6]. Ils ont proposé de prendre en compte la chute de pression en bas du canal due à l'aspiration du fluide. La loi de Bernoulli est appliquée en considérant un environnement extérieur à pression et température constantes. En haut du canal, le fluide est considéré sortant comme un jet en atmosphère libre. Ces premières études ne permettaient cependant pas de rendre compte de situation complexe où le fluide entre et sort par la même interface. Par la suite, le développement des moyens de calcul a permis la résolution des équations de Navier-Stokes sous leur forme elliptique. Un récent travail de collaboration [7] donne des solutions de référence pour un ensemble de conditions limites basées sur la loi de Bernoulli, mais ne conclut pas quant à la pertinence physique de ces conditions limites. La modélisation de l'interaction entre l'écoulement dans le canal et l'environnement extérieur reste donc une question ouverte. Pour pallier aux difficultés liées à la simulation du canal seul, plusieurs études numériques [8, 9] ont considéré à la fois le canal et son environnement extérieur. Dans des travaux antérieurs [10, 11], nous avons comparé les résultats obtenus pour la simulation d'un canal seul où des conditions limites de type Bernoulli sont considérées, avec des résultats obtenus pour un canal vertical plongé dans un réservoir de grande dimension. Il a été montré que les conditions de type Bernoulli ne permettent pas de correctement représenter les profils de pression motrice et de vitesse horizontale au niveau des interfaces. Il a aussi été mis en évidence qu'une condition limite de cisaillement nulle était nécessaire pour modéliser correctement l'écoulement entrant par l'interface basse du canal. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle modélisation des interfaces haute et basse du canal basée sur des conditions de type Robin pour la pression motrice. L'article est organisé de la façon suivante : après avoir présenté le problème physique dans la section 2, les méthodes numériques mises en œuvre sont décrites (section 3). Puis la modélisation des interfaces haute et basse est présentée dans la section 4. Dans la section 5, nos résultats sont comparés avec des résultats issus de travaux précédents [10, 11] où le canal vertical et son environnement ont été simultanément simulés.

2. Problème physique

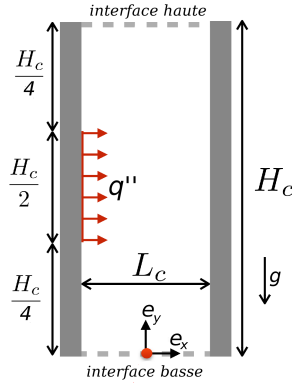


Figure 1 Canal vertical asymétriquement chauffé sans son environnement extérieur : domaine de calcul.

Le canal vertical étudié est présenté par la figure 1. On considère un canal vertical 2D chauffé à flux constant q'' sur la moitié de la paroi intérieure gauche, les autres parois sont adiabatiques. Le rapport d'aspect du canal $Rf_c = H_c/L_c = 10$. Le fluide considéré est de l'eau ($Pr = 7.85$).

Les équations instationnaires 2D de Boussinesq sont résolues. Elles sont adimensionnées en utilisant la largeur du canal L_c comme échelle de longueur, la vitesse de référence est $\frac{\alpha Ra^{1/2}}{L_c}$ (où $Ra = \frac{g\beta q'' L_c^4}{\alpha\nu\lambda}$) et la différence de température $\Delta T = \frac{q'' L_c}{\lambda}$. Les interfaces haute et basse sont ouvertes sur deux milieux semi-infinis à température constante $T_{ext} = 0$ et pression constante P_{ext} . Cette configuration a été proposée dans les études expérimentales [3, 12] et adoptée comme cas test numérique [7]. A l'état initial, le fluide est au repos et à température constante $T_{ext} = 0$. La simulation numérique est réduite aux limites géométriques du canal.

3. Méthodes numériques

La résolution numérique est basée sur une approche volumes-finis d'ordre 2 en espace et en temps et un schéma semi-implicite (termes visqueux traités implicitement [13]). Les équations 2D de Navier-Stokes sous les hypothèses de Boussinesq sont discrétisées en espace sur un maillage décalé en se basant sur des schémas numériques centrés d'ordre 2. L'avance en temps emploie sur le schéma Euler retardé d'ordre 2. Le problème vitesse-pression est résolu par un algorithme de prédiction-projection incrémentale [14].

4. Conditions limites

• **Température T : interfaces haute et basse** On considère ici le fluide entrant dans le canal à la température extérieure T_{ext} tandis qu'une condition limite de type Neumann homogène est appliquée lorsque le fluide sort du canal :

$$\text{si } \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_y < 0 \text{ alors } T = 0 \text{ et si } \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_y \geq 0 \text{ alors } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

• **Vitesse verticale V : interfaces haute et basse** Nous utilisons la condition de divergence nulle pour le champ de vitesse comme condition limite aux interfaces haute et basse du canal. Une condition de Neumann non homogène sur la vitesse verticale est donc appliquée aux

frontières haute et basse du domaine de calcul. D'où

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, Rf_c) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, Rf_c). \quad (2)$$

• **Vitesse horizontale U : interface basse** La normale sortante à l'interface basse étant $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$, le vecteur contrainte sur cette interface s'écrit : $\sigma(x, 0) \cdot \mathbf{n} = -\tau(x, 0) \mathbf{e}_x - \sigma_{yy}(x, 0) \mathbf{e}_y$ avec τ la contrainte de cisaillement. Nous supposons qu'à l'interface basse du canal, il n'existe que de la traction pure. Nous imposons donc la composante tangentielle du tenseur des contraintes nulle $\tau = 0$. On peut noter que la pression n'intervient pas dans cette condition. Le gradient normal de la contrainte de traction $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(x, 0)$ est alors directement relié aux termes d'inertie. Imposer $\tau = 0$ se traduit par une condition limite de Neumann non homogène sur U

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x, 0). \quad (3)$$

• **Vitesse horizontale U : interface haute** A l'interface haute du canal, il existe dans une certaine plage de paramètres, une zone de recirculation, le fluide sort du côté de la paroi chauffée et entre du côté de la paroi non-chauffée, créant ainsi localement une contrainte de cisaillement non-nulle. Nous choisissons d'imposer une condition de Neumann homogène sur la vitesse horizontale que le fluide entre ou sorte du canal

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, Rf_c) = 0 \quad (4)$$

• **Pression motrice P : interfaces haute et basse** Il est difficile de modéliser la pression motrice aux interfaces basse et haute du canal car elle résulte des interactions entre le canal et son environnement extérieur. Les effets visqueux et convectifs sont tous les deux présents aux interfaces du canal. Pour lever cette difficulté, nous supposons ici qu'il existe une certaine distance L selon \mathbf{e}_y (notée L_{top} pour l'interface haute et L_{bot} pour l'interface basse, constantes positives) où le champ de pression motrice peut être considéré comme connu et non influencé par la cheminée (figure 2).

Notre objectif est de modéliser l'écoulement dans la zone (notée Ω_P) comprise entre l'interface (haute ou basse) du canal et une distance L_{top} ou L_{bot} de l'interface. On suppose que

1) Le canal est immergé dans un réservoir infini :

- $\exists L_{top}$ tel que $P(x, Rf_c + L_{top}) = P_{ext}$,
- $\exists L_{bot}$ tel que $P(x, -L_{bot}) = P_{ext}$.

2) P dépend uniquement que de y dans Ω_P .

3) P évolue linéairement selon y dans Ω_P .

Sous ces hypothèses, nous obtenons alors la distribution suivante de la pression motrice dans Ω_P : $\Delta_y P = 0$. Par double intégration de cette équation, d'abord entre la position de l'interface (notée y_I) et une hauteur y située dans Ω_P puis entre la position de l'interface y_I et la position $y_I + L$, nous pouvons en déduire une condition limite de type Robin pour P aux deux interfaces :

$$P(x, Rf_c) + L_{top} \frac{\partial P}{\partial y}(x, Rf_c) = P_{ext} \quad (5)$$

$$P(x, 0) - L_{bot} \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = P_{ext} \quad (6)$$

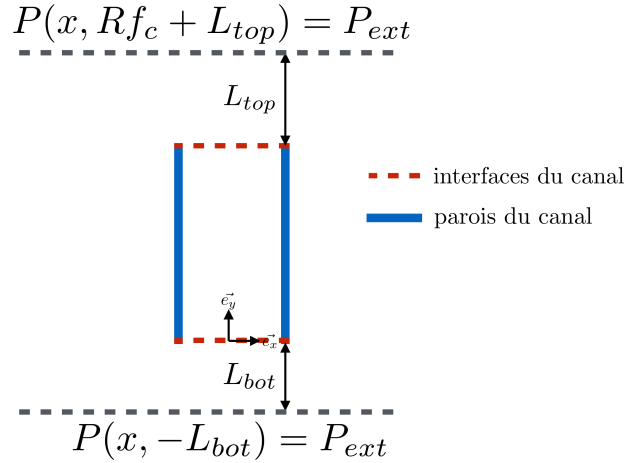


Figure 2 Modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal : schéma de principe.

Ces conditions de Robin pour la modélisation de la pression motrice aux interfaces du canal font apparaître les distances L_{top} et L_{bot} qui ne sont *a priori* pas connues. Dans le cas général, les distances L_{top} et L_{bot} sont variables en temps et en espace selon e_x . Ces deux paramètres dépendent des effets convectifs, visqueux et de la poussée d'Archimède dans la zone Ω_P et demandent une modélisation physique imposant des hypothèses supplémentaires à moins de connaître l'écoulement dans le milieu extérieur.

Il s'agit ici d'une restriction forte quant à la généralisation de cette approche, mais c'est une première étape dans la recherche de conditions aux limites aux interfaces d'une cheminée pertinentes au regard de la physique de l'écoulement mise en évidence par le calcul complet *CE*. La complexité des interactions cheminée - environnement extérieur est ici réduite à seulement deux paramètres. De plus, on peut noter que les conditions limites présentées sont compatibles avec des conditions de type jet en atmosphère libre lorsque la distance L_{top} est supposée nulle.

• **Définition de L_{top} et L_{bot}** La figure 3 présente les distributions spatiales de L_{bot} et L_{top} extraites des solutions numériques (notées *CE*) obtenues à partir de la simulation complète du canal avec son environnement extérieur [10, 11]. A bas nombres de Rayleigh, L_{top} est symétrique par rapport à l'axe du canal, car l'écoulement lui-même est symétrique. Lorsque le nombre de Rayleigh Ra augmente, L_{top} se dissymétrise et diminue. Cette diminution de L_{top} peut s'expliquer par la diminution des effets visqueux avec le nombre de Rayleigh : **l'écoulement se rapproche d'une sortie de type jet lorsque l'écoulement est sortant**. Au contraire L_{bot} varie peu avec Ra et reste quasiment toujours symétrique.

En première approximation, nous considérons que L_{top} et L_{bot} sont uniformes selon x et constantes en temps. Les valeurs de ces deux paramètres sont estimées à partir des distributions issues de *CE* [10, 11] moyennées en espace. Le tableau de la figure 3 récapitule ainsi les valeurs moyennes retenues à différents nombres de Rayleigh.

5. Résultats et discussion

Les résultats sont présentés pour $10^3 \leq Ra \leq 5.10^5$. Le maillage utilisé est de 64×256 . Une convergence en maillage a été préalablement réalisée. Pour l'ensemble des nombres de Rayleigh étudiés, les résultats obtenus sont stationnaires. Le jeu de condition limite décrit ci-dessus est noté *RBC* (Robin Boundary Condition).

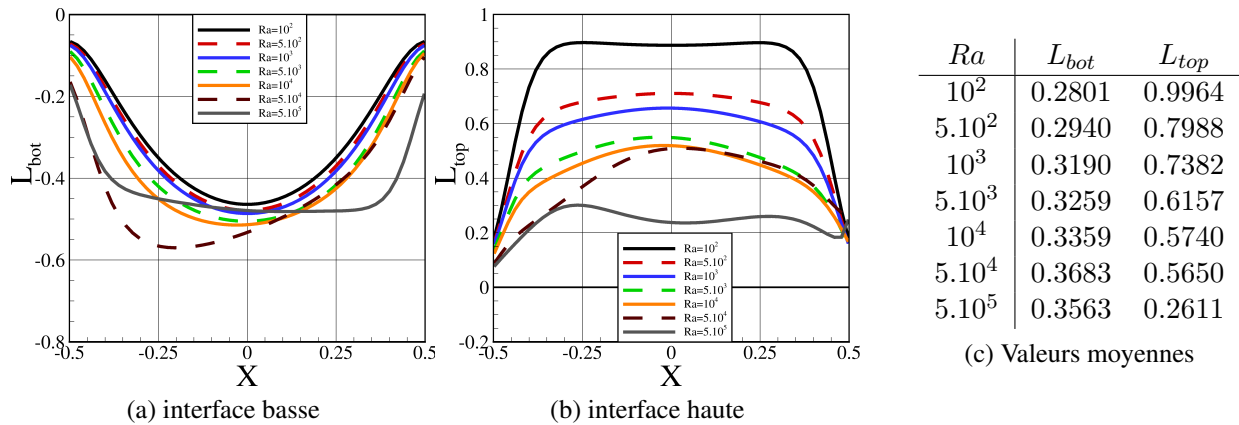


Figure 3 Profils horizontaux de L_{bot} et L_{top} aux interfaces pour les solutions CE [10, 11]

La figure 4 compare le champ de vitesse verticale au sein du canal pour $Ra = 5 \cdot 10^5$ pour les cas RBC et CE [10, 11]. On peut noter un très bon accord entre les deux types de simulation, aussi bien qualitativement en ce qui concerne l'allure globale du champ que quantitativement au niveau du profil vertical le long de l'axe médian du canal. De plus, la profondeur L_p de la zone de recirculation observée en haut du canal est très bien approchée ($L_p = 3.413$ pour RBC et $L_p = 3.401$ pour CE).

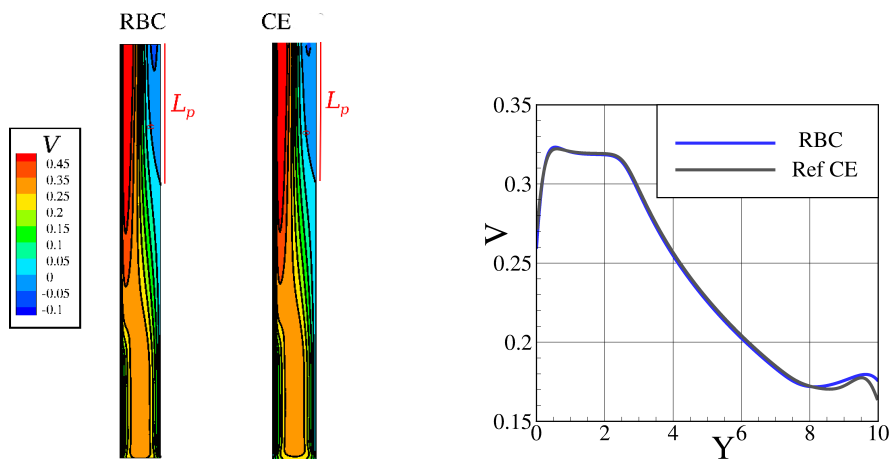


Figure 4 Comparaison entre les cas RBC et CE pour $Ra = 5 \cdot 10^5$. Champ de vitesse verticale (gauche) et profil vertical de la vitesse verticale le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite).

Ce bon comportement de la modélisation RBC au niveau de la structure de l'écoulement traduit une bonne approximation du champ de pression motrice dans le canal, malgré les hypothèses fortes introduites aux conditions limites, comme le montre la figure 5. Quelques différences apparaissent cependant proches des interfaces. C'est ce que montre la figure 6, où les profils horizontaux de la pression motrice à différentes hauteurs près des interfaces du canal sont représentés pour trois nombres de Rayleigh.

Tout d'abord, on peut noter que RBC permet d'obtenir, quel que soit Ra , un profil de pression concave à l'interface basse comme obtenu par les solutions complètes CE , ce qui n'est pas possible avec les modélisations classiques [7]. Ainsi la pression motrice P est plus élevée au centre du canal qu'au niveau des parois. Au niveau de l'interface haute, de bon accords sont

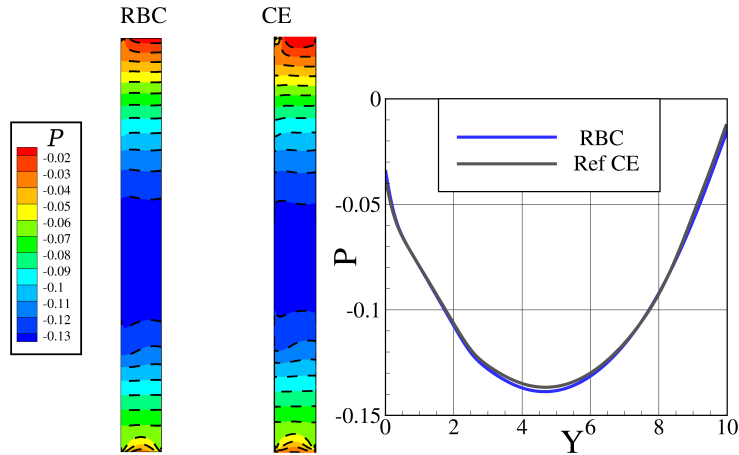
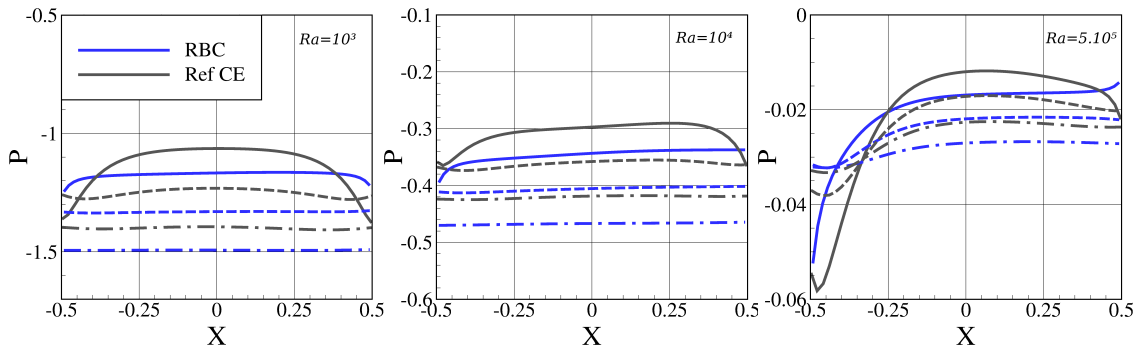
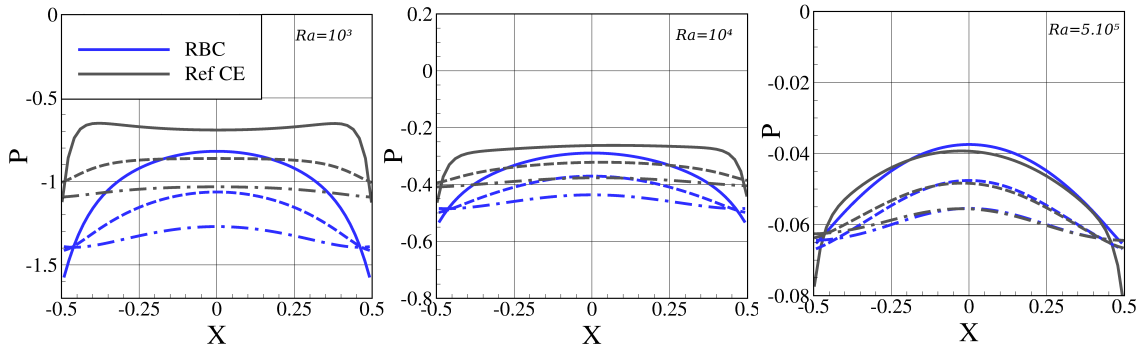


Figure 5 Comparaison du champ de pression motrice (gauche) et de la pression motrice le long de la ligne médiane $x = 0$ (droite) entre les cas RBC et CE pour $Ra = 5.10^5$



(a) interface haute : trait plein : $y = Rf_c = 10$, trait pointillé : $y = 9.88$ et trait mixte $y = 9.76$



(b) interface basse : trait plein : $y = 0$, trait pointillé : $y = 0.12$, trait mixte $y = 0.24$

Figure 6 Comparaison entre les cas RBC et CE. Profils horizontaux de P à différentes hauteurs proches des interfaces pour $Ra = 10^3, 10^4, 5.10^5$. (a) interface basse, (b) interface haute.

aussi observés. Ainsi à $Ra = 10^3$, la pression près des parois est plus faible qu'au niveau de l'axe traduisant une légère contraction du jet sortant du canal. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, le profil de pression motrice n'est plus symétrique et la pression est plus basse du côté de la paroi chauffée. Cela traduit une orientation vers la paroi chauffée du jet chaud sortant du canal. Tous ces comportements se retrouvent pour les solutions de référence CE[10, 11]. En outre, la qualité de l'approximation s'améliore avec Ra , ce qui peut être mis en relation avec les distributions de L_{top} et L_{bot} (figure 3), dont les profils deviennent de plus en plus plats au centre du canal quand Ra augmente.

6. Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une nouvelle modélisation pour la pression motrice aux interfaces d'un canal vertical asymétriquement chauffé à flux constant. Celle-ci est basée sur l'imposition de condition limite de type Robin. Cette condition limite résulte de la modélisation de l'écoulement dans le milieu extérieur près des interfaces du canal. Il est ainsi supposé qu'à une certaine distance L des interfaces la pression motrice est indépendante de l'écoulement dans le canal, et égale à la pression motrice du milieu extérieur au loin. Cette distance est alors vue comme un paramètre de modélisation devant être estimé. En première approximation cette distance est considérée constante en espace et en temps et estimée à partir des solutions obtenues avec environnement extérieur [10, 11]. De plus, il est considéré qu'à l'interface basse du canal, l'écoulement est en traction pure. Aux interfaces haute et basse, la contrainte de divergence nulle est utilisée comme condition limite. Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent de très bon accords avec les solutions avec environnement extérieur [10, 11]. De plus, cette méthode permet de considérer des pressions motrices au loin du canal différentes à chaque interface : la stratification en pression motrice du milieu extérieur peut donc être modélisée. Cependant la détermination de L , et ses variations en temps et en espace restent un problème ouvert demandant une modélisation physique de l'écoulement au voisinage proche du canal.

Références

- [1] W. Elenbaas. Heat dissipation of parallel plates by free convection. *Physica*, 9 :1–28, 1942.
- [2] R.A. Wirtz and R.J. Stutzman. Experiments on free convection between plates with symmetric heating. *Journal of Heat Transfer*, 104 :501–507, 1982.
- [3] B.W. Webb and D.P. Hill. High rayleigh number laminar natural convection in an asymmetrically heated vertical channel. *Transactions of the ASME*, 111 :649–656, 1989.
- [4] J.R. Bodia and J.F. Osterle. The development of free convection between heated vertical plates. *Journal of Heat Transfer*, pages 40–44, 1962.
- [5] W. Aung. Fully developed laminar free convection between vertical plates heated asymmetrically. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :1577–1580, 1972.
- [6] A.-M. Dalbert, J.-L. Peube, F. Penot, and J.-F. Robert. Etude de l'écoulement dans un collecteur plan. *Revue Phys. Appl.*, 15 :201–206, 1980.
- [7] G. Desrayaud, E. Chenier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quere, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, and A. Zoubir. Benchmark solutions for natural convection flows in vertical channels submitted to different open boundary conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, 72 :18–33, 2013.
- [8] G.S. Barozzi, M.A. Corticelli, and E. Nobile. Numerical simulation of time-dependent buoyant flows in an enclosed vertical channel. *Heat and Mass Transfer*, 35 :89–99, 1999.
- [9] G. Gan. Impact of computational domain on the prediction of buoyancy-driven ventilation cooling. *Building and Environment*, 45 :1173–1183, 2010.
- [10] C. Garnier, A. Sergent, Y. Fraigneau, and Le Quéré P. Comparative study of numerical simulations of a 2d buoyancy-driven flow in a vertical channel asymmetrically heated with or without external domain. In *International Heat Transfer Conference 15*, volume 9291, pages 1–15, Kyoto, Japan, August 10-15 2014. Begell House.
- [11] C. Garnier, A. Sergent, Y. Fraigneau, and Le Quéré P. *Etude numérique de l'interaction entre un canal vertical asymétriquement chauffé et son environnement extérieur*, volume 8691, pages 1–8. Lyon, France, 3-6 Juin 2014.
- [12] D. Ospir, C. Popa, C. Chereches, G. Polidori, and S. Fohanno. Flow visualization of natural convection in a vertical channel with asymmetric heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :486–493, 2012.
- [13] F. Harlow and J. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [14] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two - or three - dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76–95, 1979.