

# Utilisation de la SVD pour l'analyse des champs de vitesse de convection naturelle turbulente.

Pierre BELLEOUD\*, Didier SAURY, Denis LEMONNIER

Institut Pprime - UPR CNRS 3346, CNRS - ENSMA - Université de Poitiers, Département Fluides Thermique Combustion, ENSMA, Téléport 2, 1 avenue Clément Ader - BP 40109, F-86961 Futuroscope CEDEX, France.

\*(auteur correspondant : pierre.belleoud@ensma.fr)

**Résumé** - Dans une dynamique d'économie d'énergie et de réduction des gaz à effet de serre concernant notamment le secteur du bâtiment (43% de l'énergie totale consommée), la compréhension des phénomènes qui régissent les transferts thermiques au sein des habitations s'avère indispensable. Cela concerne, notamment, les transferts par convection naturelle, inéluctables dès lors qu'un gradient de température s'établit, entre deux murs opposés d'une pièce par exemple. Les dimensions mises en jeu et les différences de température rencontrées conduisent la plupart du temps à des écoulements turbulents de convection naturelle. La cavité différentiellement chauffée constitue une configuration expérimentale géométriquement simple, mais représentative des phénomènes de transferts rencontrés dans des ambiances confinées.

Ce travail se propose d'étudier expérimentalement les écoulements et les transferts thermiques de convection turbulente dans une cavité différentiellement chauffée à des nombres de Rayleigh de l'ordre de ceux que l'on peut rencontrer dans le bâtiment ( $>10^{11}$ ). La hauteur de cette cavité disponible au laboratoire est de 4 m, pour un rapport de forme vertical (hauteur/largeur) de 4. L'instrumentation associée permet d'acquérir des champs de vitesse à différentes côtes par PIV dans un plan vertical, à mi-profondeur de la cavité. Bien que possible sur les images brutes, le calcul des gradients de vitesse peut être amélioré par un traitement adapté. Un filtrage « POD » (Proper Orthogonal Decomposition), reposant sur la décomposition en valeurs singulières des composantes de la vitesse, permet d'améliorer les champs instantanés et d'accéder de manière plus précise à des grandeurs difficilement accessibles directement (gradients instantanés de vitesse par exemple). La connaissance du tenseur des gradients de vitesse permet d'accéder à des quantités permettant de détecter et de suivre des structures cohérentes. De plus, l'étude des différents modes POD et de leur « vigueur » permet de mieux comprendre la contribution de chaque mode et par suite la structuration générale de l'écoulement. Les premiers résultats obtenus seront présentés dans cette étude.

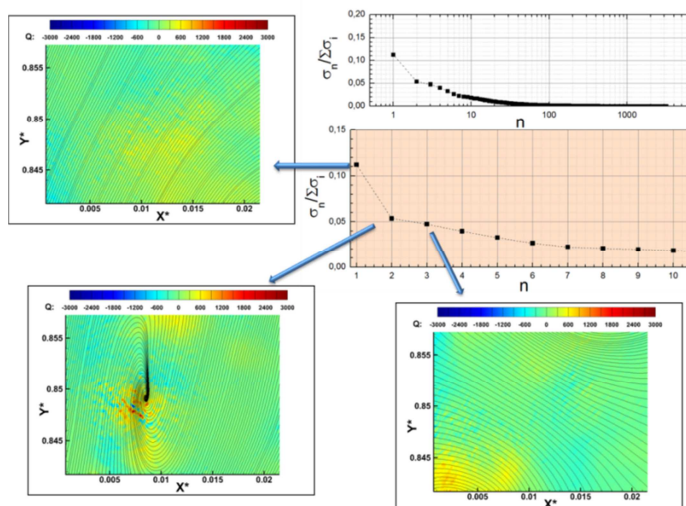


Figure 1 : Critère  $Q$  en proche paroi à une côte adimensionnée de  $Z^*=0,85$  superposé aux lignes de courant de l'écoulement pour les trois premiers modes

## Nomenclature

$U$	vitesse horizontale, $m.s^{-1}$
$V$	vitesse verticale, $m.s^{-1}$
$H$	hauteur de la cavité, $m$
$X^*, Y^*$	coordonnées adimensionnées par la hauteur ( $X^*=x/H, Y^*=y/H$ )
$Ra_H$	nombre de Rayleigh basé sur la hauteur ( $Ra_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}$ )
$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
$V_{réf}$	vitesse de référence, $V_{réf} = \frac{\alpha}{H}\sqrt{Ra_H}$ , $m.s^{-1}$
$U^*, V^*$	vitesse adimensionnées par vitesse de référence $V_{réf}$ ( $U^*=U/V_{réf}, V^*=V/V_{réf}$ )

### Symboles grecs

$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$\beta$	coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
$\Delta T$	différence de température, $\Delta T=T_c-T_f, K$
$\varepsilon$	émissivité hémisphérique totale
$\lambda$	conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$

### Indices et exposants

$\langle X \rangle$	moyenne temporelle de la quantité X
$X'$	fluctuation RMS de la quantité X

## 1. Introduction

Dispositif expérimental unique dans ces dimensions, la cavité différentiellement chauffée de grandes dimensions de l'institut P' permet d'étudier des phénomènes de convection naturelle pour des régimes turbulents, proches de ceux que l'on peut retrouver dans le bâtiment. Cette configuration examinée depuis plusieurs décennies [1,2] tout d'abord en régime laminaire, reste étudiée la plupart du temps numériquement pour des nombres de Rayleigh correspondant à des régimes souvent faiblement turbulents [3-9].

Pour différentes raisons, les champs de vitesses mesurés à partir des images brutes issues de la PIV peuvent être localement bruités. Cela a généralement peu d'effets sur le calcul de moments statistiques d'ordre 1, cependant les moments statistiques d'ordres supérieurs sont plus affectés par ce bruit. Il en est de même pour le calcul de quantités instantanées comme la vorticité, faisant intervenir des composantes du gradient de vitesse. Il apparaît donc intéressant de post-traiter le champ de vitesse pour tenter d'en extraire les informations qui correspondent aux données spatio-temporelles réelles et d'écartier celles qui peuvent être associées à un bruit de mesure. La Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (ou POD pour *Proper Orthogonal Decomposition*) permet de décomposer le signal dont on peut classer les modes en fonction de l'énergie de ce signal. Ainsi lorsqu'on le reconstruit, on peut choisir de ne garder qu'un certain nombre des premiers modes qui conserveront ainsi la majeure partie de l'énergie du signal.

L'étude présentée dans cet article donne un aperçu des champs de quantités fréquemment utilisées par les « turbulenciers » (tension de Reynolds, critère Q) résultant d'un filtrage utilisant la méthode POD appliquée à des champs de vitesse mesurés de PIV dans la couche limite turbulente se développant le long de la paroi chaude d'une cavité différentiellement chauffée ( $Ra_H = 8,1 \times 10^{10}$ ). Après avoir décrit le dispositif expérimental, la méthode de traitement (POD) sera introduite et appliquée à différentes quantités turbulentes calculées à partir des champs de vitesse et de ses gradients. On montrera, pour chaque quantité, l'intérêt du filtrage ainsi que les améliorations apportées.

## 2. Dispositif expérimental et métrologie

### 2.1. Description du dispositif expérimental

Les mesures présentées ont été réalisées dans une cavité différentiellement chauffée de grandes dimensions. Les dimensions (intérieures) du volume d'étude sont : 3,84 m de hauteur,

1 m de largeur et 0,86 m de profondeur. Un circuit d'eau glycolée dont la température est imposée par deux cryothermostats avec une incertitude de 0,1 °C permet de maintenir la température des parois latérales de la cavité. Ces dernières sont réalisées en Dural (AU4G) de conductivité thermique  $\lambda=134 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et d'émissivité  $\varepsilon=0,15$ . Pour maintenir une condition d'adiabaticité au niveau des autres parois de la cavité on réalise un assemblage de panneaux de Styrodur® ( $\lambda=0,035 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) d'épaisseur 8 cm que l'on recouvre d'un film de Mylar® basse émissivité ( $\varepsilon=0,1$ ) de 40  $\mu\text{m}$  d'épaisseur. Une dernière couche de Styrodur® de 3 cm d'épaisseur est ajoutée sur toutes les parois de cavité pour renforcer l'isolation thermique. La moitié supérieure de la cavité est présentée sur la Figure 2. Le plafond est muni d'une première fente vitrée (dans le plan médian de la cavité), pour permettre le passage de la nappe laser utilisée pour la PIV. Une seconde permet le passage et le déplacement du thermocouple.

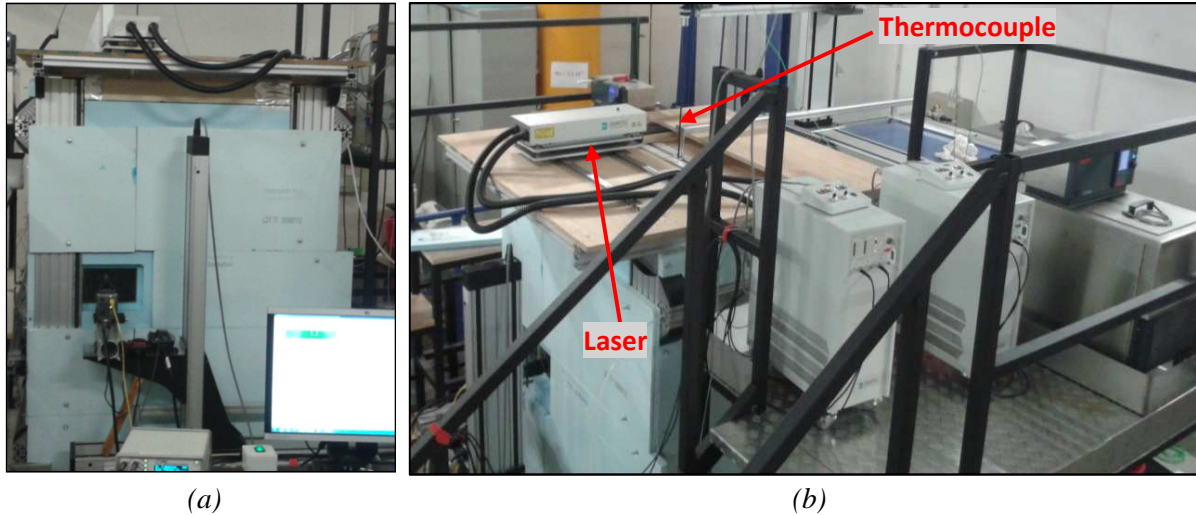


Figure 2 : Tiers supérieure de la cavité différentiellement chauffée (a) et vue du plafond avec la canne du micro-thermocouple et la tête laser (b).

## 2.2. Métrologie associée

Les composantes de la vitesse dans le plan vertical médian de la cavité sont mesurées par PIV. La chaîne de mesure PIV comprend un laser (Nd-YAG), pulsé à 100 Hz, une caméra haute vitesse Dantec SpeedSence 9040 CCD. La chaîne est utilisée à une fréquence d'acquisition de 25 Hz. Un générateur de fumée permet d'ensemencer l'écoulement de particules d'huile (Ondina Shell®) « froides » de quelques micromètres de diamètre avec une densité proche de celle de l'air. La mise au point est réalisée à l'aide d'un objectif macro de 105 mm de distance focale ayant une ouverture maximale de 2,8. Les champs de vitesse sont obtenus par inter-corrélations sur des fenêtres d'interrogation de  $32 \times 32$  pixels avec 50 % de recouvrement.

## 3. Proper Orthogonal Decomposition (POD)

Pour réaliser la POD on cherche à définir une base de fonctions que l'on dit « adaptée » au signal que l'on considère, c'est-à-dire que l'on cherche une base spatiale,  $(\phi_i(x))$ , et une base temporelle,  $(a_i(t))$ , aussi proches que possible de ce signal [10]. Pour cela, on décompose le signal sur une base d'espace et une base de temps, indépendantes l'une de l'autre :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) a_i(t) \quad (1)$$

Afin d'obtenir (1) on réalise une Décomposition par Valeurs Singulières (SVD), qui est une extension de la décomposition aux valeurs propres utilisée pour des matrices rectangulaires [11] :

$$U = A \Sigma B^T \quad (2)$$

Où  $U$ , de dimension  $(M, N)$ , est le champ recherché,  $A$  et  $B$  deux matrices de dimensions respectivement  $(M, M)$  et  $(N, N)$  contenant, pour l'une, la base spatiale et pour l'autre la base temporelle et  $\Sigma$ , une matrice  $(M, N)$ , dont les termes « diagonaux » sont appelés valeurs singulières de  $U$ . Ces coefficients sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $UU^T$  (pour des matrices à coefficients réels) [12]. Usuellement lors de la SVD, les valeurs singulières de la matrice sont rangées par ordre décroissant sur la diagonale de  $\Sigma$ . Dans ce cas, l'énergie représentée par les  $n$  premiers vecteurs de la base est supérieure à celle représentée par toute autre association de  $n$  vecteurs de base.

On suppose ici que le mouvement est essentiellement décrit par ses premiers modes (les plus énergétiques). Les modes suivants n'apportent alors pas d'information significative voire (ré-)introduisent et/ou reproduisent le bruit dû de mesure. Ainsi, en tronquant la reconstruction du signal pour garder un nombre bien choisi de valeurs singulières il serait alors possible de reconstruire le signal en réduisant fortement le bruit. En prenant différentes étapes de la reconstruction de la composante verticale de la vitesse pour le calcul de la RMS par exemple, Figure 3, on constate que trop peu de modes (cas b, 10) ne représentent pas efficacement le champ de RMS, tandis que l'utilisation de trop de modes (cas d, 800) vient introduire du bruit. Dans ce cas, aux alentours de cinquante modes, soit environ 84% de l'énergie du signal (cas c), on améliore grandement les niveaux de RMS correspondant au champ brut (cas a). Les résultats présentés sur la figure 3 correspondent à un écoulement de convection naturelle turbulente dans une cavité différenciellement chauffée de rapport de forme égal à 4 et pour un écart de température de  $14^\circ\text{C}$  centré sur la température d'ambiance (soit  $Ra_H = 8,2 \times 10^{10}$ ), d'où une vitesse de référence de  $V_{réf}=1,59$  m/s.

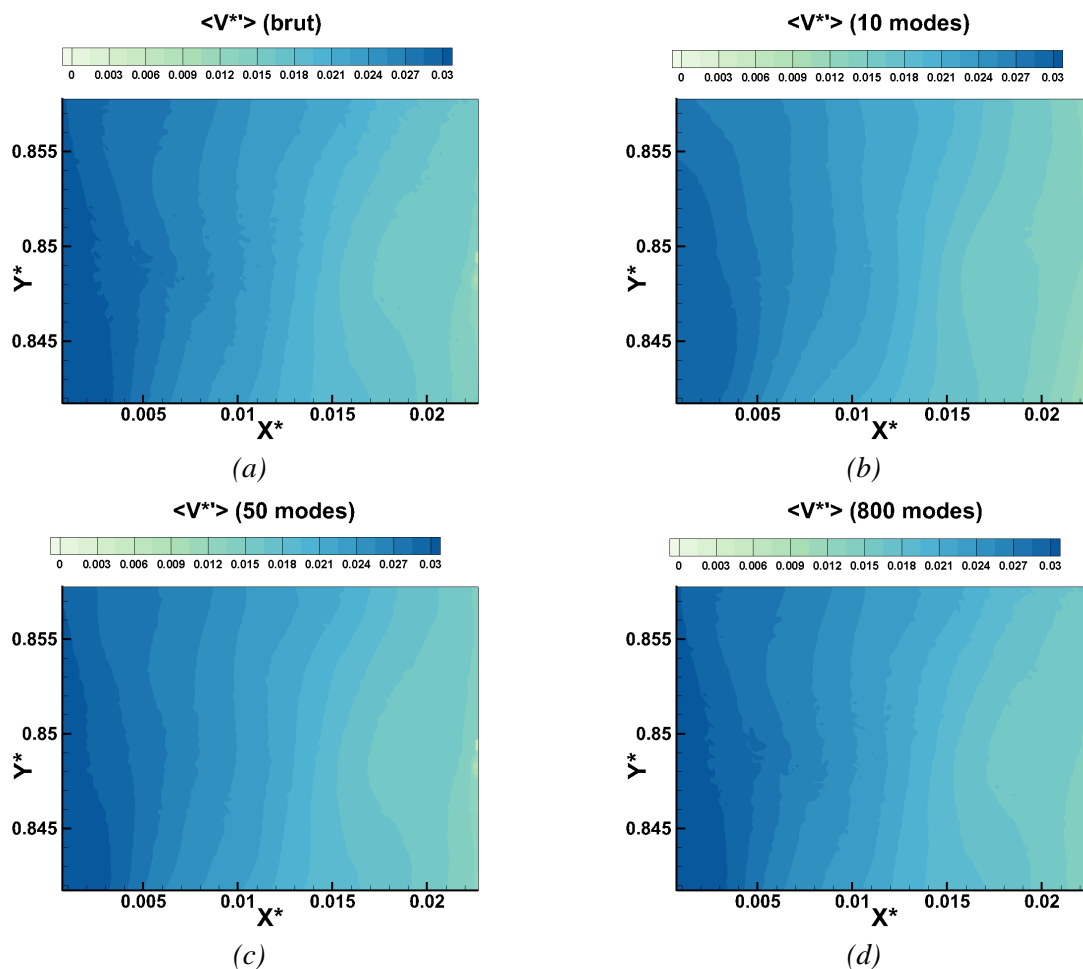


Figure 3 : Champs RMS de la composante verticale de la vitesse tracés après l'acquisition (a), puis en reconstruisant le signal en considérant 10 (b), 50 (c) et 800 modes (d).

La SVD a été effectuée sur une matrice dont les colonnes sont constituées des composantes de la vitesse pour un champ complet de l'image en un temps donné. On peut ainsi comparer les tensions de Reynolds obtenues en reconstruisant le signal avec 50 modes avec le signal brut issu des acquisitions PIV, Figure 4. Le filtrage permet encore une fois de lisser les niveaux des composantes du tenseur de Reynolds tout en gardant l'allure des champs. Cela permet d'éviter la dispersion des valeurs qui fait apparaître les « tâches » que l'on observe sur le signal non filtré. On peut également le voir sur les profils du terme croisé des tensions de Reynolds reconstruit selon un nombre croissant de modes, Figure 5. A partir de 50 modes (voire 30 modes pour cette quantité) le signal reconstruit suit la même tendance et le même niveau que le signal brut. Avec moins de modes le signal reconstruit s'éloigne plus distinctement du signal mesuré alors qu'au-delà de 50 modes, on tend à rejoindre tous les points de mesure, et ainsi introduire de forte variation de pente entre ces points.

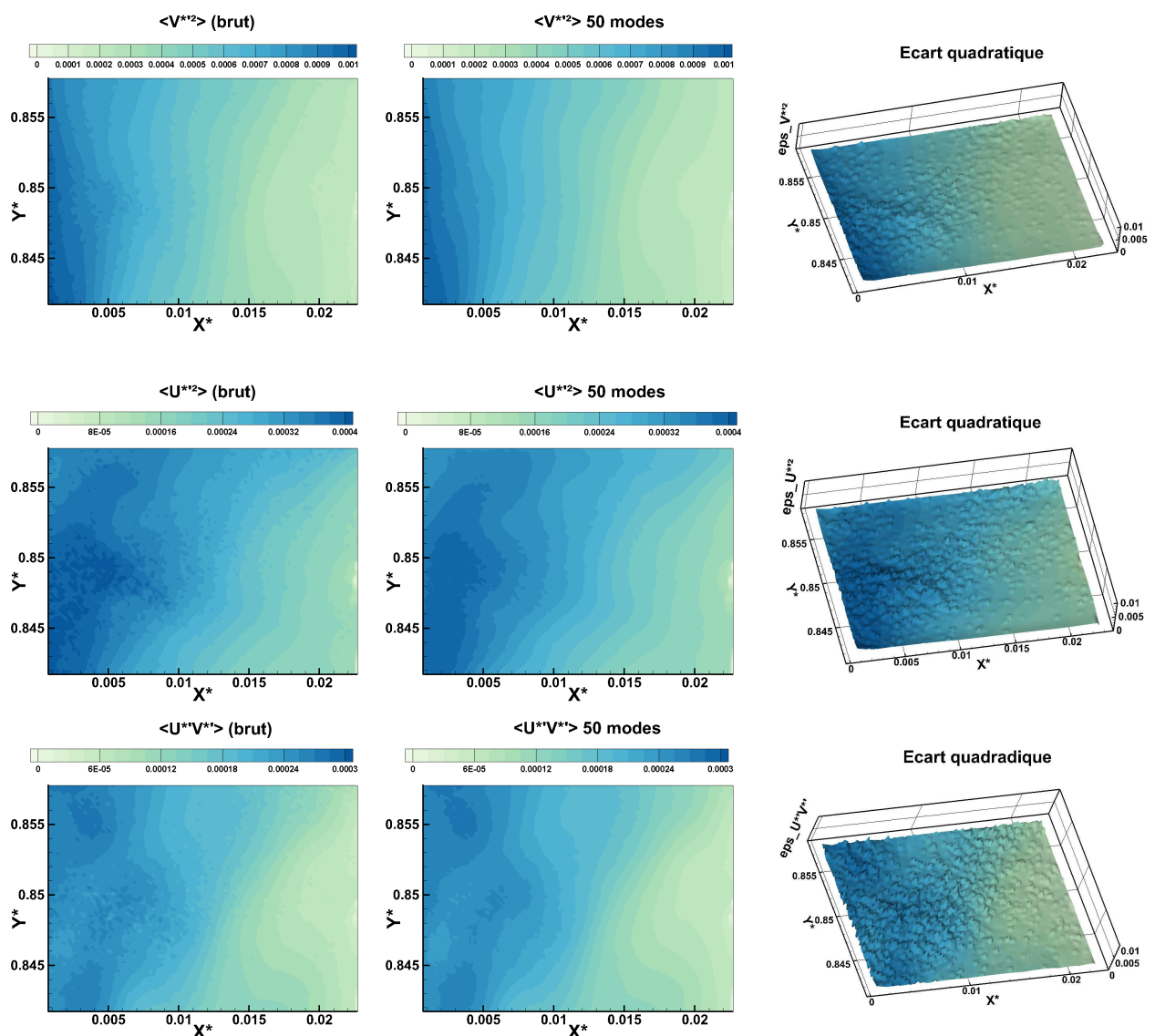


Figure 4 : Tensions de Reynolds brutes, « filtrées » à 50 modes et leur écart quadratique normalisé pour  $Y^* \approx 0,85$  et  $Ra_H = 8,2 \times 10^{10}$ .



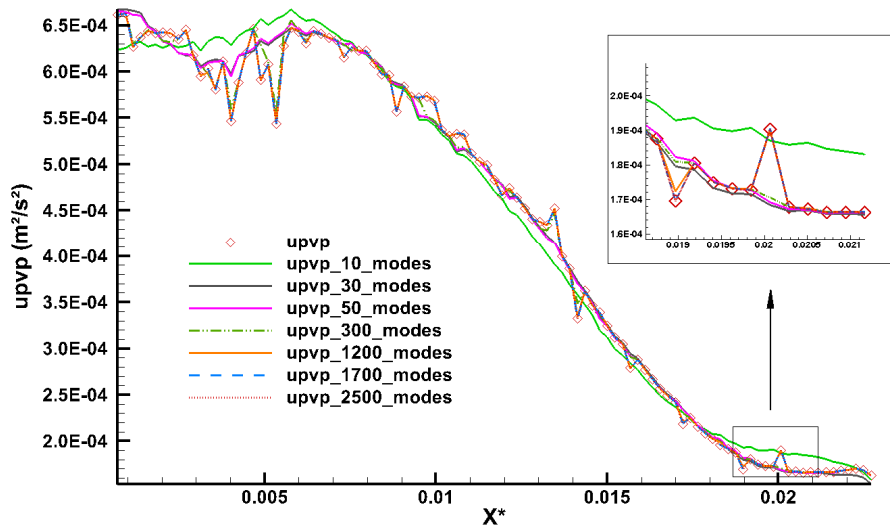


Figure 5 : Profil du terme croisé du tenseur des contraintes de Reynolds issu de la mesure et du signal reconstruit à  $Y^* = 0,85$  pour  $Ra_H = 8,2 \times 10^{10}$ .

La troncature de la base POD donne le même type de résultat pour les moments statistiques d'ordres plus élevés  $\left( \frac{1/N \times \sum_1^N (x'^n)}{x'_{RMS}^n} \right)$ , ici  $n=3$  (dissymétrie) et 4 (applatissage). Une nouvelle fois, on retrouve les niveaux des valeurs de dissymétrie et d'applatissage du signal lors de la reconstruction en uniformisant les discontinuités/inhomogénéités qui apparaissent sur les données obtenues à partir du champs brut. On évite ainsi les variations brutales de pentes. Cela a pour effet d'améliorer le calcul des dérivées spatiales (gradients).

La Figure 8 présente les champs résultants du calcul du critère Q à un instant donné. Ce critère permet l'identification de structures cohérentes [13]. Il est construit en évaluant localement l'écart quadratique de la partie symétrique et antisymétrique du tenseur de gradient de vitesse. Les valeurs positives du critère identifient donc des structures tourbillonnaires tandis que les valeurs négatives représentent les zones d'étirement. Grâce au filtrage, les deux types de comportements sont plus clairement identifiables et correspondent plus exactement aux structures observées.

#### 4. Conclusion

La POD procure une méthode de traitement des données intéressante en ce qui concerne les champs de vitesse car la reconstruction se fait en fonction de la valeur quadratique du signal et qui correspond à l'énergie cinétique de l'écoulement lorsque le signal est la vitesse. On peut ainsi reconstruire le signal en utilisant les modes les plus énergétiques et en réduisant le bruit dû à la mesure sans notion de fréquence (comme le ferait un filtrage reposant sur la transformée de Fourier du signal). Cela permet d'affiner l'analyse des champs statistiques des signaux de vitesse y compris pour des moments ordres élevés (dissymétrie et applatissage), mais aussi de faciliter le calcul de grandeurs basées sur des gradients et liées à la turbulence comme le critère Q (ou la vortacité).

Ce traitement va maintenant pouvoir être appliquée à des mesures de vitesses couplées à une mesure de température qui, après un traitement adapté à cette dernière, pourront donner accès à des valeurs de flux thermiques turbulents filtrés.

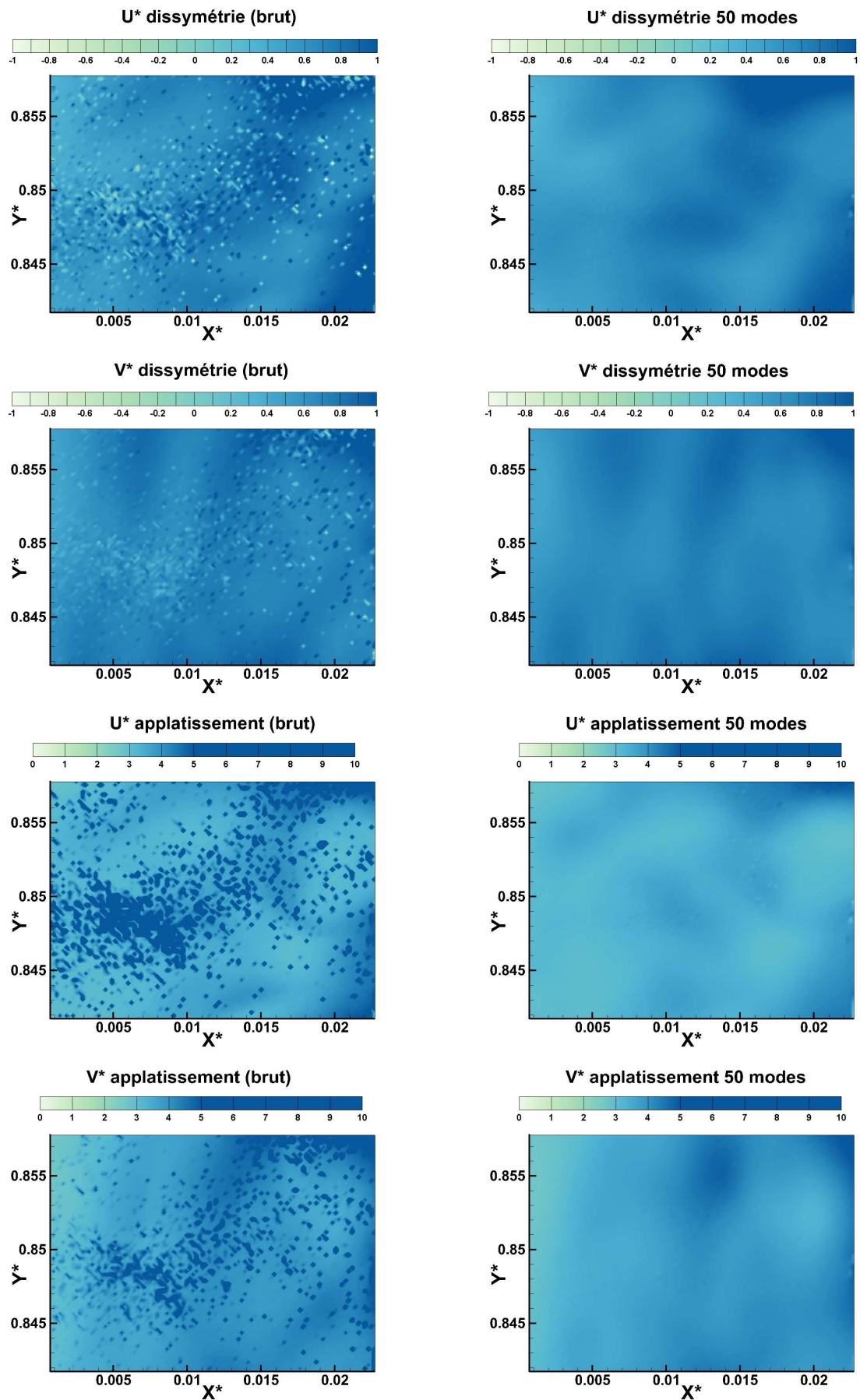


Figure 7 : Champs de moments statistiques d'ordres 3 et 4 des composantes de la vitesse.

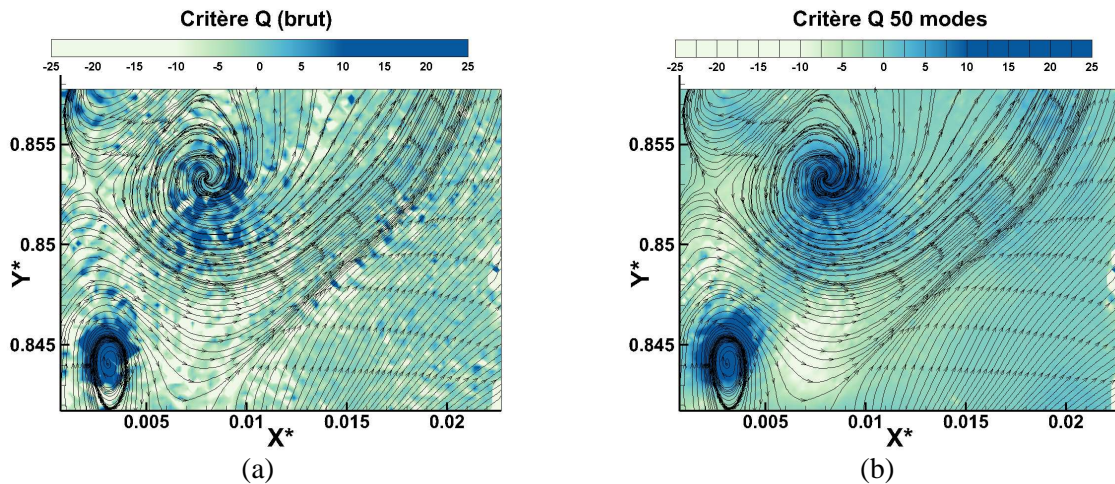


Figure 8 : Critère  $Q$  à  $Y^* \approx 0,85$  pour  $Ra_H = 8,2 \times 10^{10}$ .

## Références

- [1] G. De Vahl Davis, Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 11 (1968), 1675-93.
- [2] R. A. W. M. Henkes, Natural Convection Boundary Layers, *Thèse de doctorat* (Université Technologique de Delft - 1990).
- [3] F.X. Trias, A. Gorobets, M. Soria, A. Oliva, Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part I: Numerical methods and time-averaged flow, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, 53 (2010), 665-73.
- [4] F.X. Trias, A. Gorobets, M. Soria, A. Oliva, Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – Part II: Heat transfer and flow dynamics, *Int. J. of Heat and Mass Tr.*, 53 (2010), 674-83.
- [5] S. Xin, J. Chergui, P. Le Quéré, R. Dai, Turbulent 3D natural convection flows and interaction with surface radiation in air-filled cavity, *Int. Centre for Heat and Mass Tr.* Palermo, 24-27 sept. 2012).
- [6] F.X. Trias, A. Gorobets, , A. Oliva, C.D. Pérez-Segarra, DNS and regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity of aspect ratio 5, *Int. J. of Heat and Mass Tr.*, 57 (2013), 171-82.
- [7] A. Sergent, S. Xin, P. Joubert, P. Le Quéré, J. Salat, F. Penot, Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities. Part I: Reference solutions using Chebyshev spectral methods, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 39 (2013), 1-14.
- [8] A. Sergent, P. Joubert, S. Xin, P. Le Quéré, Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities. Part II: End walls effects using large eddy simulation, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 39 (2013), 15-27.
- [9] S. Xin, J. Salat, P. Joubert, A. Sergent, F. Penot, P. Le Quéré, Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities. Part III: A full convection-conduction-surface radiation coupling, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 42 (2013), 33-48.
- [10] B. Podvin, *Introduction à la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres ou P.O.D.*, Notes de cours, Université Paris-Sud (2001)
- [11] A. Chatterjee, An introduction to the proper orthogonal decomposition, *Current Sci.*, vol. 78, No. 7 (2000), 808-17.
- [12] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Tome 1, Ed Masson (1986), 72-8.
- [13] J.C.R. Hunt, A.A. Wray, P. Moin, Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows, *Tech. Report CTR-S88*, (Center for Turbulence Research, 1988).