

# Détermination automatique de la période de couplage entre un code de simulation aux grandes échelles et un code de conduction thermique

Chai KOREN<sup>1,2,3\*</sup>, Ronan VICQUELIN<sup>1,2</sup>, Olivier GICQUEL<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>CentraleSupélec, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry, France

<sup>2</sup>CNRS, UPR 288 Laboratoire Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C). Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry, France.

<sup>3</sup>AIR LIQUIDE, Centre de Recherche Paris Saclay, 78350 Les loges-en-josas, France.

\* (auteur correspondant : chai.koren@ecp.fr)

**Résumé** – Les chambres de combustion industrielles voient leur performance augmenter au prix de fortes contraintes sur les flux thermiques aux parois et sur les injecteurs. La prédiction de ces flux à partir de simulations numériques est une étape clé dans le dimensionnement de ces installations. Les conditions étudiées requièrent un caractère profondément multi-physique des simulations envisagées en prenant en compte plusieurs types de transferts (écoulements réactifs et convection, conduction de la chaleur dans les parois, rayonnement des produits de combustion).

Cette étude se concentre sur le couplage entre un code d'écoulements réactifs et un code de conduction de la chaleur dans les solides. Un tel couplage nécessite d'assurer un maintien des performances de calcul tout en gardant une précision et une robustesse suffisantes. Lors de telles simulations couplées, chaque code de calcul résout un jeu d'équations spécifiques sur son domaine indépendamment pendant un certain temps physique correspondant à la période de couplage. A la fin de celle-ci, les données nécessaires à la mise à jour des conditions limites sont échangées. La période de couplage optimale en termes de performance et de précision est souvent issue d'études *a posteriori* et dépend fortement du cas étudié.

L'approche présentée est basée sur l'utilisation d'une condition limite de type Dirichlet/Dirichlet sur l'interface physique. La mise à jour de la température d'interface à chaque échange se fait à l'aide d'une équation bilan sur un volume de contrôle autour de l'interface. Cette équation bilan s'exprime sous forme d'une équation différentielle ordinaire. Il est donc possible d'utiliser l'ensemble des théories associées à ce type d'équations pour contrôler la période de couplage. L'approche est ici validée sur des configurations instationnaires monodimensionnelles représentatives d'une interaction couche limite – paroi solide. Les résultats obtenus confirment la pertinence de cette approche.

# Nomenclature

$H$	Enthalpie, $J$
$a$	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$b$	Effusivité thermique, $J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-0.5}$
$c_p$	Capacité calorifique massique, $J.K^{-1}.kg^{-1}$
$t$	Variable temporelle, s
$x$	Variable d'espace, m
$T$	Température, K
$h$	Enthalpie massique, $J.kg^{-1}$

## Symboles grecs

$\lambda$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\omega$	Pulsation, $s^{-1}$
$\Phi$	Flux, $W.m^{-2}$

$\rho$  Masse volumique,  $kg.m^{-3}$

$\Delta t$  Pas de temps, s

$\Delta x$  Taille de maille, m

$\epsilon$  Erreur d'intégration

$\eta$  Tolérance

$\tau$  Temps adimensionné

## Indices et exposants

$[k]$  Ordre k

$cpl$  Grandeur de couplage

$f$  Grandeur fluide

$i$  Valeur sur la cellule i

$n$  Valeur à l'instant n

$s$  Grandeur solide

# Introduction

L'augmentation constante en taille et en puissance des chambres de combustion industrielles induit des conditions opératoires de plus en plus extrêmes. Les forts niveaux de pression et de température qui règnent à l'intérieur de ces chambres donnent lieu à de très importants flux thermiques sur les parois et les injecteurs qui sont limitant en terme de dimensionnement. Il est donc crucial de pouvoir les prédire dès les phases de développement.

Il existe aujourd'hui différents travaux où sont présentés des simulations d'écoulements aérodynamiques de haute fidélité basées sur la simulation aux grandes échelles (LES) qui prennent en compte les transferts de chaleur entre le fluide et les parois [1, 2, 3]. Il est aussi possible de trouver des travaux similaires couplant ces outils avec un code de rayonnement [4, 5, 6] qui sont plus particulièrement dédiés au calcul des configurations qui présentent des niveaux de pression élevés rendant nécessaire la prise en compte du rayonnement.

Ces simulations multi-physiques peuvent être réalisées de deux façons bien distinctes. La première, consiste à utiliser un outil unique résolvant toutes les équations en même temps, ce qui assure la continuité de tous les champs. L'inconvénient majeur de ces approches est qu'elles nécessitent de résoudre les différents phénomènes physiques avec le même pas en temps, le plus limitant [7]. Ceci conduit à une utilisation non-optimale des ressources de calcul et à une sur-résolution de certains phénomènes.

La seconde approche consiste à coupler des codes distincts, chaque code étant dédié à un seul phénomène physique. Il est alors nécessaire de faire interagir ces codes régulièrement afin de mettre à jour les conditions limites et fermer les différents sous-problèmes. La fréquence de couplage de ces codes est cependant choisie arbitrairement et sa validité est vérifiée *a posteriori* [1, 3, 8]. Un autre inconvénient majeur de ces simulations couplées est la non-continuité aux interfaces de certaines grandeurs physiques comme la température, qui induit une non conservation de l'énergie.

Dans cette étude, nous proposons une méthodologie pour répondre à ces deux problèmes dans le cadre du couplage d'un code fluide LES et d'un code de thermique du solide. Nous proposons ainsi un modèle d'interface basé sur l'utilisation d'un couplage Dirichlet-Dirichlet assurant la conservation de l'énergie. Dans ce modèle, l'évolution de la température d'interface est formulée au travers d'une équation différentielle ordinaire (EDO). Ceci permet de proposer une détermination automatique de la fréquence de couplage des différents codes en s'appuyant sur les travaux de contrôle d'erreur et d'adaptation de pas de temps d'intégration. Ainsi, à partir d'une tolérance d'erreur fournie par l'utilisateur, la fréquence de couplage s'adapte automatiquement. Cette approche est validée sur une série de cas mono-dimensionnels de simulation d'interaction entre une couche limite et une paroi. Les résultats permettent de sélectionner

l'approche la plus efficace et la plus intéressante en terme de performance de calcul.

## 1 Modèle d'interface

La configuration étudiée est composée de deux sous-domaines : une partie fluide et une partie solide, qui partagent toutes les deux une interface commune. Une même condition de Dirichlet, température imposée, est utilisée par les deux codes de simulation. Le formalisme des volumes finis est utilisé pour la discrétisation spatiale. La mise à jour de la condition d'interface se fait à l'aide d'un nouveau modèle d'interface décrit ci-dessous.

### 1.1 Validité du modèle

La température d'interface entre un gaz et un solide dépend quasiment exclusivement de l'inertie thermique du corps solide. Ceci est dû au fait que les fluctuations de la température d'interface sont proportionnelles au rapport des effusivités thermiques et que ce rapport est très faible devant 1, voir figure 1. Ainsi, les fluctuations de température au niveau de l'interface sont très faibles en comparaison avec celles observées dans une couche limite turbulente comme étudié en détail par Tiselj et al. [9].

Ces résultats tendent à justifier l'utilisation d'une condition de Dirichlet pour le code fluide. Pour le code solide, cette hypothèse reste valable à condition que le temps entre deux instants de couplage ne dépasse pas un temps caractéristique de diffusion dans le corps solide.

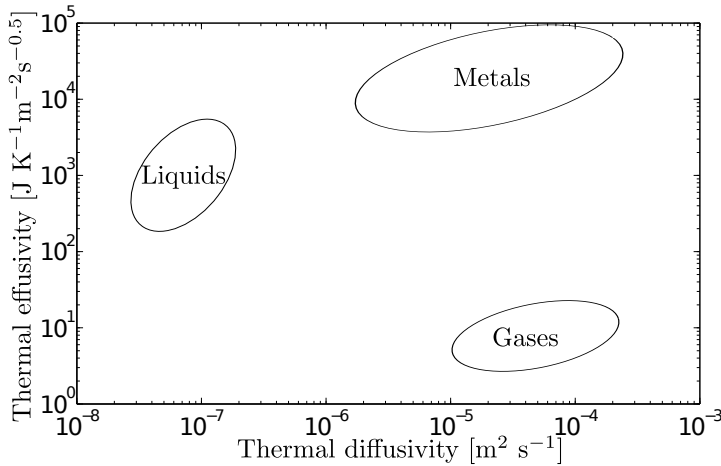


Figure 1: Comparaison des effusivités et diffusivités thermiques pour des gaz, liquides et solides

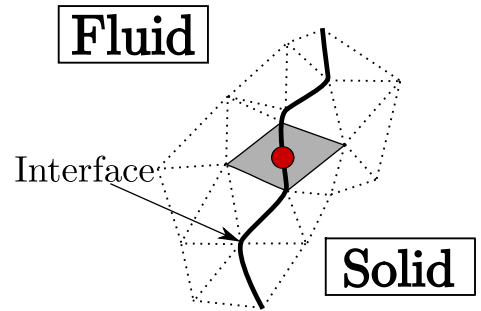


Figure 2: Vue de l'interface fluide/solide. Trait plein : Interface. Triangles pointillés : cellules dans les domaines. Triangles grisés : Cellules formant une cellule hybride

### 1.2 Dérivation du modèle d'interface

Le point de départ de ce modèle est la constitution d'une couche de cellules hybrides autour de l'interface. Chaque point d'interface se retrouve au centre d'une macro-cellule qui est l'union de la cellule fluide et de la cellule solide qui le contiennent. La dite cellule a donc deux moitiés avec des propriétés physiques distinctes, voir figure 2.

L'enthalpie au sein de la cellule hybride est donnée par  $H_{hyb} = H_f + H_s$ , où les indices *hyb*, *f* et *s* représentent respectivement les grandeurs liées aux cellules hybride, fluide et solide. En approximant la température moyenne de la cellule hybride à la température d'interface  $T_{bnd}$ , on obtient :

$$H_{hyb} = (V_f \rho_f c_{pf} + V_s \rho_s c_{ps}) T_{bnd} \quad (1)$$

En écrivant le bilan sur l'ensemble de la cellule, on obtient :

$$\frac{dH_{hyb}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_{hyb}} \rho_{hyb} h_{hyb} dV = \sum_{j=1}^{nface} \phi_j \cdot \mathbf{n}_{ext,j}, \quad (2)$$

où  $\Phi_f$  et  $\Phi_s$  sont les flux intégrés sur les faces de la cellule hybride, respectivement côté fluide et côté solide. Une équation différentielle du premier ordre est finalement obtenue pour la température  $T_{bnd}$  :

$$\frac{dT_{bnd}}{dt} = \frac{\Phi_f + \Phi_s}{V_f \rho_f c_{pf} + V_s \rho_s c_{ps}} \quad (3)$$

La mise à jour de la température d'interface se fait alors à l'aide du protocole suivant :

1. Les deux codes démarrent au temps  $t_n$  en ayant la même condition limite,  $T_{bnd} = T_{bnd}^n$ .
2. Chaque code avance indépendamment jusqu'à atteindre le temps  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{cpl}$ .  $\Delta t_{cpl}$  étant le temps séparant deux instants de couplage. Pendant tout ce temps, la condition limite des deux codes est maintenue fixe à  $T_{bnd}^n$ .
3. Les deux codes échangent alors les flux thermiques intégrés sur les faces de la cellule hybride de leur côté.
4. L'équation 3 est résolue et fournit alors la température d'interface  $T_{bnd}^{n+1}$  pour l'instant  $t_{n+1}$ .

Il peut être noté que ce modèle d'interface fonctionne tel une décomposition de domaines. Les deux sous-domaines avancent en parallèle et à la fin d'une étape d'intégration la condition d'interface est mise à jour. Par l'ordre d'enchaînement des étapes, l'énergie est conservée car les flux arrivant au niveau de l'interface sont utilisés pour faire avancer la température d'interface. De plus, en raison de cet enchaînement, la température d'interface peut être vue comme un troisième sous-domaine qui est géré par un code de simulation dédié. Ce code sera discuté dans le paragraphe 2.

### 1.3 Comportement pour l'interaction Gaz-Solide

Lorsque l'interaction thermique entre un gaz et un solide est considérée, plusieurs ordres de grandeur séparent  $\rho_s c_{ps} V_s$  et  $\rho_f c_{pf} V_f$ , au point que l'équation 3 se simplifie et devient :

$$\frac{dT_{bnd}}{dt} \approx \frac{\Phi_f + \Phi_s}{V_s \rho_s c_{ps}} \quad (4)$$

En intégrant l'équation 4, la valeur obtenue pour la température d'interface est la même que dans le cas où un couplage de type Neumann-Dirichlet a été utilisé. Ainsi, tant que l'équation 4 est valable, ce qui est le cas pour des applications telles des chambres de combustion ou des turbines à gaz, cette approche fournit les mêmes résultats qu'un raccord Neumann-Dirichlet, raccord utilisé dans les travaux de Giles [10] et de Duchaine et al. [1, 3] tout en assurant la conservation de l'énergie.

## 2 Contrôle du pas de temps

L'objectif dans cette section est de présenter l'approche permettant de contrôler le pas de temps de couplage grâce au modèle d'interface. La température d'interface est régie par l'équation 3, et sa résolution requiert un intégrateur numérique. Cet intégrateur est en réalité un code de résolution autonome qui utilise comme données d'entrée la température d'interface et les flux venant des deux sous-domaines et qui fournit en sortie la nouvelle température d'interface.

### 2.1 Estimation de l'erreur d'intégration

Seules les méthodes numériques d'intégration explicites sont ici retenues. Les éléments théoriques de l'intégration d'équation aux dérivées ordinaires permettent de déterminer un pas d'intégration optimal à l'aide d'une estimation de l'erreur d'intégration [11]. En effet, en définissant une méthode d'intégration d'ordre  $k$ , il est possible d'écrire que cette méthode a une erreur d'ordre  $k$ , ce qui donne :

$$T^{[k]}(\Delta t) - T(t = 0) = (T(\Delta t) - T(t = 0)) + C \cdot \Delta t^{k+1} \quad (5)$$

L'utilisation de deux méthodes d'ordres différents,  $k$  et  $k+1$ , permet d'estimer l'erreur commise par la méthode d'ordre inférieur. En définissant l'erreur d'intégration de la méthode d'ordre  $k$ ,  $\epsilon^{[k],n}$  telle que :  $\epsilon^{[k],n} = |T^{[k],n} - T(t_n)|$ , il est possible d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^{[k],n} = |T^{[k],n} - T(t_n)| \\ \epsilon^{[k],n} = \underbrace{|(T^{[k],n} - T^{[k+1],n})|}_{\propto \Delta t^k} + \underbrace{|(T^{[k+1],n} - T(t_n))|}_{\propto \Delta t^{k+1}} \\ \epsilon^{[k],n} \approx |T^{[k],n} - T^{[k+1],n}| \end{array} \right. \quad (6)$$

Les méthodes d'intégration explicites d'Adams-Bashforth d'ordre 1 et 2 ont été retenues. Les formules utilisées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{RHS} = \frac{\Phi_f + \Phi_s}{\rho_f c_{pf} V_f + \rho_s c_{ps} V_s} \\ T^{[1],n+1} = T^n + (t_{n+1} - t_n) f_{RHS}^n \\ T^{[2],n+1} = T^n + (t_{n+1} - t_n) f_{RHS}^n + \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} \frac{f_{RHS}^n - f_{RHS}^{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \end{array} \right. \quad (7)$$

### 2.2 Choix du pas de temps optimal

Contrôler l'erreur précédemment estimée permet de déterminer le pas de temps de couplage que l'on souhaite le plus grand possible, tout en respectant une tolérance sur l'erreur obtenue et en ayant une évolution du pas de temps la plus régulière possible. L'approche retenue est basée sur la théorie du contrôle [11, 12] à l'aide de contrôleurs PID. Ceci se fait à l'aide des variables  $C$  et  $\theta$  définies ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \log(\Delta t_{cpt}) \\ \theta = \log(\epsilon) - \log(\eta) \end{array} \right. \quad (8)$$

Ces deux variables sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$-\dot{C}(t) = K_P \dot{\theta}(t) + K_I \theta(t) + K_D \ddot{\theta}(t) \quad (9)$$

Il est alors possible d'obtenir la relation suivante pour déterminer le pas de temps de couplage  $\Delta t_n$  :

$$\Delta t_n^{opt} = \Delta t_n \left( \frac{\eta}{\epsilon_n} \right)^{K_P + K_I + K_D} \left( \frac{\eta}{\epsilon_{n-1}} \right)^{-(K_P + 2K_D)} \left( \frac{\eta}{\epsilon_{n-2}} \right)^{K_D} \quad (10)$$

Les valeurs des gains,  $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$ , sont choisies afin d'optimiser les performances du contrôleur. De telles valeurs sont disponibles dans des ouvrages [13, 14] pour les trois familles principales qui sont utilisées pour le contrôle d'erreur. Les valeurs choisies sont données dans le tableau 1. Ces trois familles sont comparées dans la section 2.3 et un contrôleur en particulier est choisi.

Contrôleur	$K_P(k+1)$	$K_I(k+1)$	$K_D(k+1)$
I	0	1	0
PI	0.4	0.7	0
PID	1/9	1/18	1/18

Tableau 1: Valeurs utilisées pour les différents gains, issues de [13, 14], pour une méthode d'ordre  $k$ .

Normalement, lorsque le pas de temps optimal est obtenu, il est comparé à celui qui vient d'être réalisé. Si jamais ce dernier est plus grand que le pas de temps optimal, l'itération est refaite avec la valeur optimale. Sinon, la valeur est utilisée pour l'itération suivante. Dans le cas de simulations couplées fluide-solide en 3 dimensions, il ne sera pas envisageable de refaire des itérations fluides régulièrement, étant donné le coût de l'itération. Ainsi, dans l'approche présentée par la suite, il n'y a pas de rejet. C'est à dire que la relation retenue n'est pas  $\Delta t_{n,cpl} = \Delta t_n^{opt}$  mais  $\Delta t_{n+1,cpl} = \Delta t_n^{opt}$ .

## 2.3 Validation 1D

La validation de la méthode se fait à l'aide de simulations 1D couplées. Le dispositif est composé d'un code de conduction solide, d'un code de transfert fluide et du module PID pour le contrôle du pas de temps de couplage. Il a été montré auparavant que le comportement est quasi-identique pour tout couplage thermique gaz-métal, un seul cas sera exposé ici. Le cas traité simule l'équivalent d'une couche limite fluide en contact avec une paroi solide. La couche limite a comme condition limite extérieure des fluctuations de températures sinusoidales. Côté paroi solide, la condition extérieure est une température fixe. Le fluide est un mélange de gaz brûlés issus de l'oxycombustion du méthane tandis que la paroi est faite d'Inconel. Les propriétés sont données dans le tableau 2, et montrent que ce cas vérifie bien les hypothèses évoqués dans la section 1.1.

	$\lambda$	$\rho$	$c_p$	$a$	$b$	$K = b_f/b_s$	$G = a_f/a_s$
	$W/m/K$	$kg/m^3$	$J/kg/K$	$m^2/s$	$J/m^2/K/s^{0,5}$	—	—
Gaz	0.15774	3.6504	1737.9	$2.49 \cdot 10^{-5}$	$3.16 \cdot 10^{+1}$	$4.78 \cdot 10^{-3}$	7.94
Inconel	11.7	8510.0	439.0	$3.13 \cdot 10^{-6}$	$6.61 \cdot 10^{+3}$	1	1

Tableau 2: Propriétés thermo-physiques des milieux utilisés pour la validation 1D

Les résultats sont présentés sur les figures 3 et 4. Il est possible de constater que le contrôleur I, le plus simple, a un problème de stabilité. Ce contrôleur prédit des pas de temps trop grands, qui en raison du choix de ne pas utiliser le rejet induit des instabilités numériques. Pour cette raison, il est à proscrire.

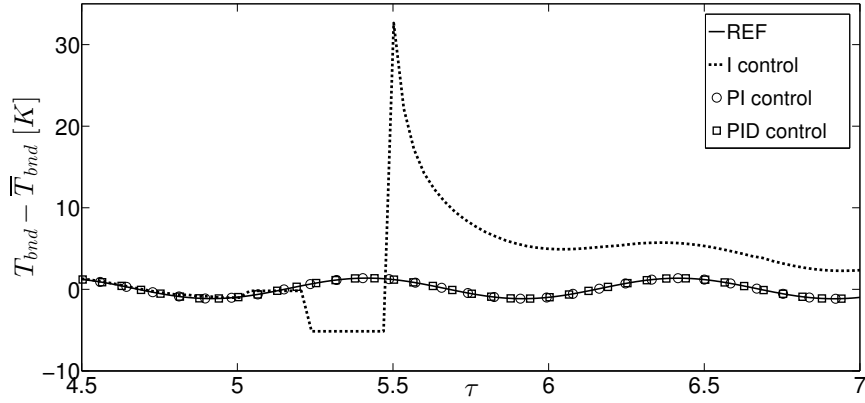


Figure 3: *Comparaison des champs instantanés de fluctuation de température  $T_{bnd} - \bar{T}_{bnd}$  pour plusieurs contrôleurs (I, PI et PID) en fonction du temps  $\tau$  adimensionné par la fréquence des perturbations extérieures. Le résultat de référence est indiqué par la courbe en trait plein continu.*

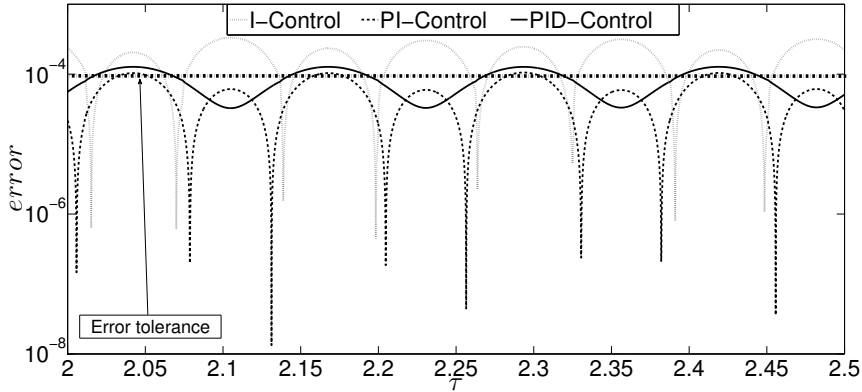


Figure 4: *Comparaison des erreurs relatives instantanées des différentes méthodes de contrôle du pas de temps d'intégration (I, PI et PID) en fonction du temps  $\tau$  adimensionné par la fréquence des perturbations extérieures. Le niveau de tolérance demandé est indiqué par la ligne droite en pointillé.*

Le contrôleur PI arrive à mieux prédire les pas de temps et ne manifeste pas de telles instabilités et arrive à correctement prédire l'évolution temporelle. Néanmoins, le pas de temps peut varier fortement d'une itération de couplage à l'autre, voir figure 4. Sur le cas présenté, il a été trouvé que le rapport maximal entre deux pas de temps de couplage successifs était de 1.82 pour le contrôleur PID et 10 pour le PI, soit un ordre de grandeur de différence.

Le contrôleur PID, comme le PI, résout correctement l'évolution temporelle. Il a un avantage par rapport au PI, avec une meilleure convergence au niveau de l'erreur, voir figure 4, ce qui conduit à de plus faibles fluctuations du pas de temps de couplage. Cette plus grande régularité se traduit donc par des pas de temps plus homogènes, et un léger avantage en nombre d'itérations. En effet, le contrôleur PID effectue environ 5% d'itérations de moins que le PI. Pour toutes ces raisons, le contrôleur PID est retenu pour la suite des travaux.

## Conclusion

Un nouveau modèle d'interface pour les simulations couplées fluide-solide a été mis en place. Son utilisation transforme la condition limite d'interface en un troisième code de résolution qui intègre une équation différentielle ordinaire. Des formules explicites d'Adams-Bashforth sont ici

retenues pour l'intégration temporelle. Un contrôle d'erreur basé sur les contrôleurs PID a été implanté afin de déterminer automatiquement la fréquence de couplage à l'interface. Le code a été validé sur des configurations 1D représentatives des interactions couches limites/paroi, où l'adaptation en temps réelle de la fréquence de couplage a bien été constatée.

L'approche présentée permet de réaliser des simulations couplées pour la thermique fluide-solide tout en conservant l'énergie. Elle permet également de réaliser un contrôle automatique de la fréquence de couplage ce qui constitue une première dans ce domaine et constitue une avancée importante. Elle est en cours d'application sur des configurations plus complexes, en 3 dimensions, où la combustion est également prise en compte.

## Références

- [1] F. Duchaine, A. Corpron, L. Pons, V. Moureau, F. Nicoud, T. Poinso, Development and assessment of a coupled strategy for conjugate heat transfer with Large Eddy Simulation : Application to a cooled turbine blade, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 30-6 (2009), 1129-1141.
- [2] S. Jauré, F. Duchaine, G. Staffelbach, L. Gicquel, Massively parallel conjugate heat transfer methods relying on large eddy simulation applied to an aeronautical combustor, *Computational Science and Discovery*, 6-1 (2013), Article 015008.
- [3] F. Duchaine, N. Maheu, V. Moureau, G. Balarac, S. Moreau, Large-Eddy Simulation and Conjugate Heat Transfer Around a Low-Mach Turbine Blade, *J. Turbomach.*, 136-5 (2013).
- [4] R. Gonçalves dos Santos, M. Lecanu, S. Ducruix, O. Gicquel, E. Iacona, D. Veynante, Coupled large eddy simulations of turbulent combustion and radiative heat transfer, 2008. *Combust. Flame.*, 152-3 (2008), 387-400.
- [5] G. Lecocq, D. Poitou, I. Hernandez, F. Duchaine, E. Riber, B. Cuenot, A Methodology for Soot Prediction Including Thermal Radiation in Complex Industrial Burners, *Flow Turbul. Combust.*, 92-4 (2014), 947-970.
- [6] D. Poitou, J. Amaya, M. El Hafi, B. Cuénot, Analysis of the interaction between turbulent combustion and thermal radiation using unsteady coupled LES/DOM simulations, *Combust. Flame.*, 159-4 (2012), 1605-1618.
- [7] M. Shahi, J. Kok, J. Casado, A. Pozarlik, Study of unsteady heat transfer as a key parameter to characterize limit cycle of high amplitude pressure oscillations, *In Proceedings of ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*, (2014), no. GT2014-26311.
- [8] L. He, M. Oldfield, Unsteady conjugate heat transfer modelling, *J. Turbomach.*, 133-3 (2011), Article 031022.
- [9] I. Tiselj, J. Oder, L. Cizelj, Double-sided cooling of heated slab : Conjugate heat transfer DNS, "5". *Int. J. Heat. Mass. Tran.*, 66-0 (2013), 781-790.
- [10] M. B. Giles, Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 25-4 (1997), 421-436.
- [11] E. Hairer, S. N. G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer series in computational mathematics, (2008)
- [12] K. Gustafsson, M. Lundh, G. Söderlind, A PI Step-size Control for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, *BIT*, 28-2 (1988), 270-287.
- [13] G. Söderlind, Digital Filters in Adaptive Time-stepping, *ACM Trans. Math. Softw.*, 29-1 (2003), 1-26.
- [14] P. M. Burrage, R. Herdiana, K. Burrage, Adaptive step-size based on control theory for stochastic differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 170-2 (2004), 317-336.

## Remerciements

Ce travail est été réalisé grâce au soutien de la chaire commune à l'Air Liquide, Centrale-Supélec et au CNRS sur l'oxycombustion et les transferts de chaleur pour l'énergie et l'environnement et par le projet OXYTEC (ANR-12-CHIN-0001) de l'Agence nationale française de la Recherche.