

Caractérisation de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéoépaississant thermodépendant au sein d'une conduite cylindrique.

Nabila LABSI^{1*}, Youb Khaled BENKAHLA¹, Abdelkader BOUTRA¹, Elisabeth BRUNIER²

¹Laboratoire des Phénomènes de Transfert, FGMGP
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
BP. 32 El Alia, 16111 Bab Ezzoouar, Alger, Algérie

²Département de Génie Chimique
Université de Technologie de Compiègne
BP. 20529 - 60205 Compiègne, France

*(auteur correspondant : nabilalabsi@yahoo.fr)

Résumé - Les fluides viscoplastiques sont des fluides caractérisés par une contrainte seuil à partir de laquelle le fluide s'écoule. Le modèle de Herschel-Bulkley est un modèle générale qui décrit le comportement rhéologique d'une large gamme de fluides viscoplastiques, tels que la mayonnaise et le ketchup.

La présente étude traite de l'analyse du comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéoépaississant, pour lequel l'indice d'écoulement dépasse l'unité ($n = 1,5$), au sein d'une conduite cylindrique à section droite circulaire, maintenue à température pariétale uniforme. Cette analyse porte sur l'impact de la prise en compte de la thermodépendance de la consistance du fluide et ce, en considérant un transfert thermique en mode de convection forcée et des nombres de Reynolds et de Prandtl égaux à 20 et 50, respectivement.

La discrétisation des équations générales de conservation (Equations de Continuité, de l'Impulsion et de l'Energie) est effectuée par le biais de la méthode des volumes finis. Le système d'équations algébriques obtenues est résolu en utilisant un code de calcul qui se base sur la méthode ligne par ligne et sur l'algorithme SIMPLER pour traiter le couplage pression-vitesse.

Au vu des résultats obtenus, la prise en compte de la variabilité de la consistance du fluide en fonction de la température entraine des modifications considérables des propriétés hydrodynamique et thermique de l'écoulement, en d'autres termes, l'évolution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement de Fanning. Ces modifications sont caractérisées par des écarts importants par rapport au cas isovisqueux, correspondant à une consistance constante et uniforme, en particulier dans le cas de refroidissement et pour les valeurs absolues élevées du coefficient adimensionnel de température.

Nomenclature

a	coefficient de température, K^{-1}	U	vitesse axiale réduite, $= V_x/V_0$
a^*	coefficient adimensionnel de température, $= a \Delta T$	V	vitesse radiale réduite, $= V_r/V_0$
C_p	chaleur spécifique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	V_0	vitesse moyenne, $m.s^{-1}$
D	diamètre de la conduite, m	x	coordonnée axiale, m
HB	nombre de Herschel-Bulkley, $= \tau_0 D^n / K_0 V_0^n$	X	coordonnée axiale réduite, $= x/D$
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
L	longueur de la conduite, m	Δ	écart entre la valeur du nombre de Nusselt moyen pour un fluide thermodépendant et celle relative au cas isovisqueux, $= \left(\left Nu_{a^*} - Nu_{\mu_p^*(\theta)=1} \right / \left Nu_{\mu_p^*(\theta)=1} \right \right) 100$
m	paramètre de croissance exponentielle, s	ΔT	différence de température, K
M	paramètre réduit de croissance exponentielle, $= m V_0 / D$	$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement
n	indice d'écoulement	$\dot{\gamma}^*$	taux de cisaillement réduit
Nu	nombre adimensionnel de Nusselt, $= (-1/\theta_m) (\partial\theta/\partial R) \Big _{R=0,5}$	η	viscosité effective, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
p^*	pression, Pa	η_{app}	viscosité apparente réduite, $= \eta/K_0$
P^*	pression réduite, $= p^*/\rho V_0^2$	K	consistance du fluide, $Pa.s$
Pr	nombre de Prandtl, $= K_0 C_p V_0^{n-1} / k D^{n-1}$	K_0	consistance à la température de référence, $Pa.s^n$
R	coordonnée radiale, m	K_0^*	consistance plastique réduite, $Pa.s^n$
r_p	rayon de la conduite, m	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
R	coordonnée radiale réduite, $= r/D$	τ	contrainte de cisaillement, Pa
Re	nombre de Reynolds, $= \rho V_0^{n-2} D^n / K_0$	τ_0	contrainte seuil de cisaillement, Pa
T	température, K	θ	température réduite, $= (T - T_p)/(T_0 - T_p)$
T_0	température d'entrée du fluide, K	θ_m	Température moyenne réduite, $= (T_m - T_p)/(T_0 - T_p)$
T_m	température moyenne du fluide, K		
T_p	température de la paroi, K		

1. Introduction

Le modèle de Herschel-Bulkley rhéoépaississant est un modèle qui décrit le comportement rhéologique d'un fluide viscoplastique de Herschel-Bulkley pour lequel l'indice d'écoulement est supérieur à l'unité. Ce modèle décrit le comportement des coulis de ciment à titre d'exemple. Les fluides obéissant à ce modèle, de même pour les fluides viscoplastiques en général, n'amorcent leur écoulement que si la contrainte qui leur est imposée dépasse un certain seuil appelé *contrainte seuil*.

L'écoulement des fluides obéissant au modèle de Herschel-Bulkley a été étudié par plusieurs chercheurs. En effet, Soares et al. [1] ont analysé le transfert thermique dans la région d'entrée d'un écoulement laminaire axial du fluide de Herschel-Bulkley, en tenant compte de la diffusion axiale. Ils ont noté que l'augmentation du nombre de Herschel-Bulkley et la diminution de l'indice d'écoulement du fluide entraîne l'augmentation des valeurs du nombre de Nusselt. Mao et al. [2] ont entrepris une étude numérique, par le biais de la méthode des éléments finis, sur l'écoulement complètement développé d'un fluide de Herschel-Bulkley au sein de l'espace annulaire de conduites excentriques et concentriques. Les auteurs ont proposé une formulation mathématique plus appropriée pour laquelle, la région cisailée est gouvernée par la conservation de la quantité de mouvement en combinaison avec l'équation constitutive du fluide, alors que la région de bouchon est

contrôlée par la loi de la mécanique du solide élastique. D'autres recherches se sont focalisées sur le caractère thermodépendant des propriétés rhéologiques de ces fluides. Nouar et *al.* [3] ont étudié expérimentalement la convection mixte lors de l'écoulement du Carbopol 940 thermodépendant, obéissant au modèle de Herschel-Bulkley, dans l'espace annulaire d'une conduite concentrique dont le cylindre intérieur en rotation, est adiabatique alors que le cylindre extérieur est porté à un flux pariétal constant. Leur étude leur a permis de déterminer la loi de thermodépendance de la consistance du fluide et de proposer une corrélation reliant le nombre de Nusselt à cette dernière et à la vitesse de rotation du cylindre intérieur, dont l'augmentation favorisait le transfert thermique. Youbi et *al.* [4] ont analysé numériquement le refroidissement avec solidification, lors de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley de consistance thermodépendante, dans l'entrefer d'un espace annulaire. Les auteurs ont trouvé que pour le cas d'une consistance constante, le gradient pariétal de vitesse devient plus abrupt lorsque la contrainte seuil et l'indice d'écoulement augmentent. Ils ont remarqué, en outre, que l'effet de la thermodépendance de la consistance du fluide est moins prononcé lorsque la contrainte seuil augmente.

La présente étude numérique concerne l'effet de la thermodépendance de la consistance d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéoépaississant, sur la structure hydrodynamique et thermique de son écoulement au sein d'une conduite cylindrique maintenue à température pariétale uniforme. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées constantes et uniformes à l'exception de la consistance qui est considérée variable en fonction de la température.

2. Mise en équations du problème physique et modélisation numérique

La forme réduite des équations générales de conservation, à savoir : les équations de continuité, de l'impulsion et de l'énergie, s'écrit dans le cas de l'écoulement, avec transfert thermique en mode de convection forcée, au sein d'une conduite cylindrique à section droite circulaire de longueur L et de diamètre D , comme suit :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RVV)}{\partial R} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\eta_{app} R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\eta_{app} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{Re} \left[\frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{app}) - \eta_{app} \frac{V}{R^2} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{app}) \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial R} (\eta_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(RVU)}{\partial R} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} = & -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\eta_{app} R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\eta_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\eta_{app}) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\eta_{app}) \frac{\partial U}{\partial X} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV\theta)}{\partial R} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} = \frac{1}{Re Pr} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right] \quad (4)$$

Le fluide utilisé est un fluide viscoplastique, obéissant au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley, pour lequel, la loi de régularisation de Papanastasiou est utilisée dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faible vitesse de cisaillement. Cette loi est donnée, sous la forme réduite, par l'expression suivante [5,6] :

$$\tau^* = \eta_{app} \dot{\gamma}^* = \left\{ \dot{\gamma}^{*n-1} + \frac{HB}{\dot{\gamma}^*} \left[1 - \exp(-M \dot{\gamma}^*) \right] \right\} \dot{\gamma}^* \quad (5)$$

$M = mV_0/D$ étant le paramètre de croissance exponentielle, donné sous sa forme réduite.

Dans la présente étude, la consistance du fluide est prise thermodépendante. Sa loi de variation en fonction de la température est donnée par la relation suivante :

$$K^*(\theta) = \exp[-a^*(1-\theta)] \quad (6)$$

a^* étant le coefficient de température adimensionnel, tel que : $a^* = a \Delta T$. Le cas $a^* > 0$ correspond au chauffage pariétal du fluide et le cas $a^* < 0$ représente le refroidissement pariétal.

ΔT représente la différence entre la température de la paroi et celle du fluide à l'entrée, telle que : $\Delta T = T_p - T_0$

$K^*(\theta)$ étant la viscosité plastique adimensionnelle du fluide, telle que : $K^*(\theta) = K(T)/K_0$.

Le fluide est donc isovisqueux si $K^* = 1$.

Les conditions aux limites pour cette configuration, consistent en une vitesse axiale et une température uniformes à l'entrée de la conduite ($U = \theta = 1, V = 0$) et en un écoulement établi hydrodynamiquement et thermiquement à la sortie ($\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$). La condition de non glissement est appliquée à la paroi portée à une température constante et uniforme ($U = V = \theta = 0$).

Les équations générales de conservation (1-4), en considérant les conditions aux limites associées, sont résolues par le biais de la méthode des volumes finis proposée par Patankar [7]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques, qui sont résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER et ce, en adoptant un maillage 250x50 suivant X et R, respectivement.

3. Résultats et discussion

Les résultats concernent l'effet de la thermodépendance de la consistance d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéoépaississant à indice d'écoulement $n = 1,5$, sur les propriétés hydrodynamique et thermique de l'écoulement et ce, pour le cas de chauffage pariétal ($a^* > 0$), de refroidissement pariétal ($a^* < 0$) ainsi que pour le cas isovisqueux ($K^* = 1$). Les simulations sont effectuées pour des valeurs du nombre de Reynolds, de Prandtl et de Herschel-Bulkley égales respectivement à 20 ; 50 et 2.

3.1. Comportement hydrodynamique

L'effet de la thermodépendance de la consistance du fluide, sur le profil de vitesse établi (à la sortie de la conduite, c'est-à-dire en $X = L/D = 1000$), est illustré sur la figure 1.

Que l'on soit dans le cas de chauffage ou de refroidissement, toutes les courbes, pour les différentes valeurs du coefficient adimensionnel de température, présentent une distorsion du profil de vitesse par rapport au cas isovisqueux ($K^* = 1$). En effet, le chauffage (ou le refroidissement) des couches fluides pariétales entraîne la lubrification pariétale (ou le freinage) de ces couches fluides. Par conséquent, une contraction (ou une extension) du profil de vitesse a lieu, pour conserver le débit volumique.

D'un autre côté, nous observons l'augmentation de l'étendue du bouchon, en d'autre terme la zone non cisailée qui est une caractéristique des fluides viscoplastiques, lorsque le coefficient adimensionnel de température passe de +0,3 à +0,9. Ainsi, la vitesse centrale diminue étant donné que le fluide est accéléré au niveau de la paroi suite à l'augmentation, dans ce cas, de la viscosité apparente. L'inverse se produit dans le cas de refroidissement (en passant de $a^* = -0,3$ à $a^* = -0,9$).

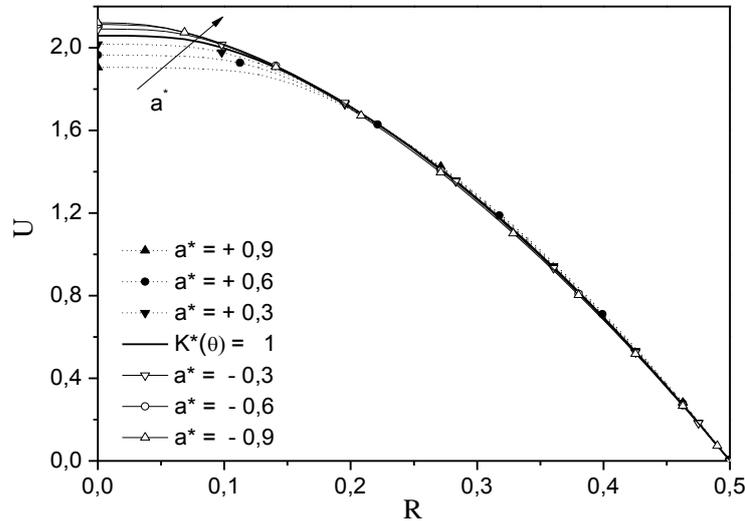


Figure 1 : Profil de vitesse établi pour différentes valeurs du coefficient adimensionnel de température. $Re = 20$; $Pr = 50$; $HB = 2$; $X = 1000$.

De même pour l'effet de la thermodépendance de la consistance du fluide sur l'évolution axiale de la vitesse centrale, illustrée à travers la figure 2, nous observons, une croissance des courbes relatives au cas de chauffage jusqu'à la zone correspondant à l'écoulement hydrodynamique complètement développé où la vitesse centrale atteint une valeur asymptotique.

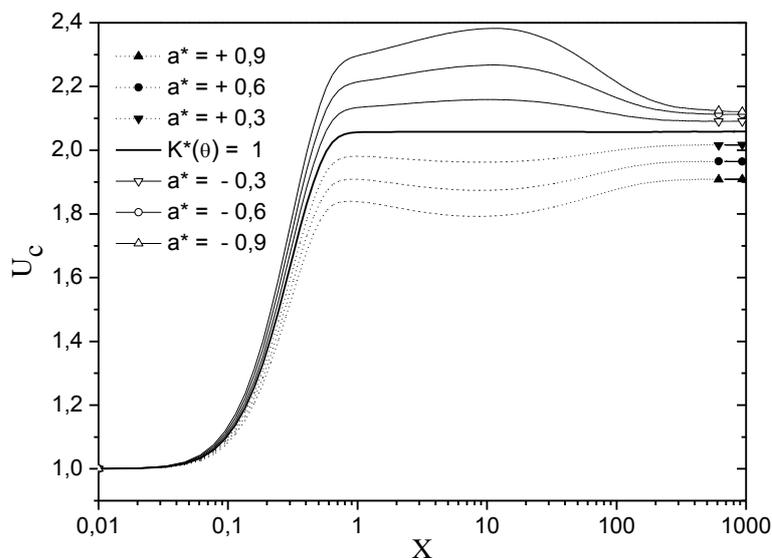


Figure 2 : Evolution axiale de la vitesse centrale pour différentes valeurs du coefficient adimensionnel de température. $Pr = 50$; $Re = 20$; $HB = 2$.

Le même comportement est observée dans le cas de refroidissement sauf que dans ce cas, la vitesse centrale atteint un maximum puis décroît jusqu'à la valeur asymptotique correspondant à l'écoulement hydrodynamique complètement établi. Le maximum atteint

pour les valeurs du coefficient adimensionnel de température égales à $-0,9$; $-0,6$ et $-0,3$ est de $0,91$; $0,83$ et $0,69$, respectivement. Un comportement similaire a été observé par Métivier et Nouar [8] dans leur étude traitant de l'écoulement d'un fluide obéissant au modèle de Herschel-Bulkley dans un canal plan horizontal.

3.2. Comportement thermique

La figure 3 illustre l'influence de la thermodépendance de la consistance du fluide sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt et par conséquent, sur l'intensité du transfert thermique entre la paroi de la conduite et le fluide.

Les courbes relatives au cas de chauffage et de refroidissement montrent que l'augmentation du coefficient adimensionnel de température entraîne l'augmentation du nombre de Nusselt et par conséquent, à l'amélioration du transfert thermique. Ceci est dû à la diminution de la consistance des couches fluides pariétales et donc, de leur viscosité apparente, suite à l'augmentation du coefficient adimensionnel de température. Ceci entraîne l'augmentation de la vitesse du fluide au niveau de la paroi, ce qui procure un meilleur échange thermique entre cette dernière et le fluide.

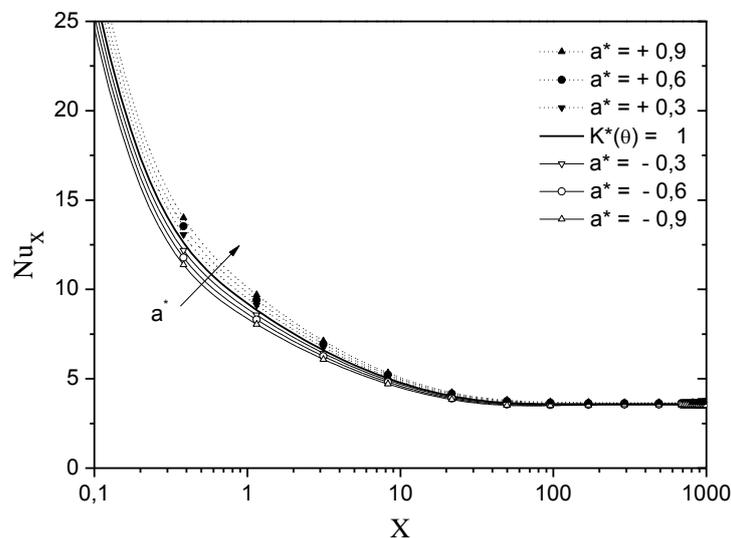


Figure 3 : Evolution axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du coefficient adimensionnel de température. $Pr = 50$; $Re = 20$; $HB = 2$.

Notons également que l'effet de la thermodépendance de la viscosité du fluide sur le transfert thermique (nombre de Nusselt) est plus important à l'entrée de la conduite que dans la région où l'écoulement thermique est complètement développé.

En effet, la figure 4 montre que le gradient de température est plus affecté par la thermodépendance de la consistance du fluide dans la région d'entrée ($X = 1$) que dans la zone établie dans laquelle la température du fluide atteint celle de la paroi ($X = 1000$) où l'effet n'est pas visible.

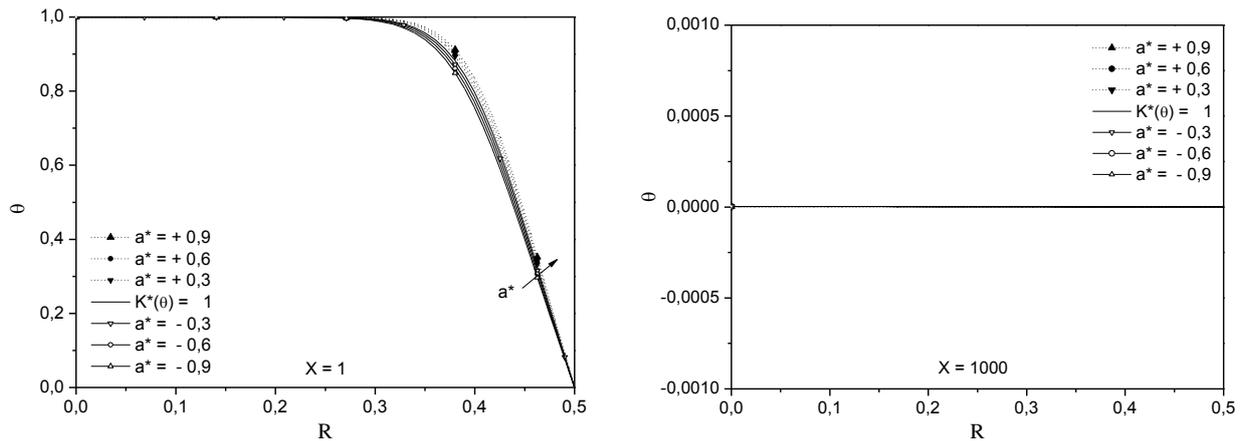


Figure 4 : Profil de température dans les zones non établie et établie pour différentes valeurs du coefficient adimensionnel de température. $Re = 20$; $Pr = 50$; $HB = 2$.

Dans le but de quantifier la sous-estimation du transfert thermique lorsque la variabilité de la viscosité du fluide en fonction de la température est négligée, nous présentons le tableau suivant qui regroupe les écarts entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen, intégré sur la circonférence de la conduite tout le long de celle-ci, lorsque la thermodépendance est prise en compte et lorsqu'elle est négligée. Le tableau montre que l'écart est plus important pour les valeurs élevées du coefficient adimensionnel de température dans le cas de chauffage, à savoir : $a^* = +1,5$ et $a^* = +1,8$; il atteint 10%. Par contre, dans le cas de refroidissement, la thermodépendance de la consistance du fluide n'a presque pas d'effet sur le transfert thermique.

$ a^* $	Δ (%)	
	Cas de chauffage ($a^* > 0$)	Cas de refroidissement ($a^* < 0$)
0,3	4,23	4,23
0,6	4,23	1,17
0,9	4,23	1,17
1,2	4,23	1,17
1,5	10,02	1,17
1,8	10,02	1,17

Tableau : Déviation du nombre de Nusselt moyen du cas isovisqueux pour le cas de chauffage et de refroidissement. $Pr = 50$; $Re = 20$; $HB = 2$.

4. Conclusion

La présente étude s'est focalisée sur l'effet de la prise en compte de la thermodépendance de la consistance d'un fluide de Herschel-Bulkley rhéoépaississant sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de son écoulement. Ce dernier est laminaire et stationnaire et a lieu au sein d'une conduite cylindrique à section droite circulaire maintenue à température pariétale uniforme et siège d'un transfert thermique en mode de convection forcée. Les équations générales de conservation ont été résolues numériquement par la méthode ligne par ligne et ce, après les avoir discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis.

Les résultats obtenus montrent que la variabilité de la consistance du fluide a un effet sur le comportement hydrodynamique et thermique et ce, en raison du couplage entre les équations du mouvement et l'équation de l'énergie. L'étude révèle une sous-estimation du transfert thermique pouvant atteindre 10% si la thermodépendance de la viscosité du fluide n'est pas prise en compte dans les calculs.

Références

- [1] E. J. Soares, M. F. Naccache, P. R. Souza Mendes, Heat transfer to viscoplastic materials flowing axially through concentric annuli, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24 (2003), 762-773.
- [2] Z. Mao, C. Yang, V. C. Kelessidis, Modeling and Numerical Simulation of Yield Viscoplastic Fluid Flow in Concentric and Eccentric Annuli, *Chinese J. Chem. Eng.*, 20-1 (2012), 191-202.
- [3] C. Nouar, C. Desaubry, H. Zenaïdi, Numerical and experimental investigation of thermal convection for a thermodependent Herschel-Bulkley fluid in an annular duct with rotating inner cylinder, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17-6 (1998), 875-900.
- [4] Z. Youbi, B. Benaouda-Zouaoui, C. Nouar, Study of cooling with solidification of a laminar thermodependent Herschel-Bulkley fluid flow in a convectively cooled annular duct, *Acta Mechanica*, 151 (2001), 15-29.
- [5] T. Min, H. G. Choi, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe II. Numerical approach hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997), 3689-3701.
- [6] T. C. Papanastasiou, Flow of materials with yield, *J. Rheol.*, 31 (1987), 385-404.
- [7] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, *Hemisphere Publishing Co.*, New York (1980).
- [8] C. Métivier, C. Nouar, Linear stability of the Rayleigh-Bénard Poiseuille flow for thermodependent viscoplastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 163 (2009), 1-8.