# Etude de l'impact de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique lors de l'écoulement d'un fluide viscoplastique.

# Welid BERABOU<sup>1,2\*</sup>, Youb Khaled BENKAHLA<sup>1</sup>, Nabila LABSI<sup>1</sup>, Seif-Eddine Ouyahia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, FGM & GP B.P. 32 El-Alia Bab Ezzouar 16111 – Alger – Algérie <sup>2</sup>Centre de Recherche Scientifique et Technique en Analyses Physico-Chimiques (UR-ADTE) BP.384 Zone industrielle de Bou-Ismaïl RP, 42004. Tipaza \*(auteur correspondant : berabouwalid@yahoo.fr )

Résumé - Le transfert thermique dans les fluides non-newtoniens purement visqueux se rencontre souvent dans diverses industries (par exemple, de la chimie, de la pétrochimie et de la transformation des aliments). Ces fluides sont généralement traités sous des conditions d'écoulement laminaire en raison de leurs viscosités élevées. La présente étude numérique est effectuée pour prédire l'écoulement laminaire et stationnaire en mode de convection forcée, d'un fluide non-newtonien décrit par le modèle rhéologique de Casson généralisé, modifiée par Papanastasiou. Le fluide circulant entre deux plaques parallèles portées à des températures constantes et uniformes et à travers une conduite cylindrique isotherme. Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, du mouvement et de l'énergie, avec prise en compte de la fonction de dissipation. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées constantes et uniformes. Un code numérique basé sur la méthode des volumes finis a été élaboré pour intégrer le système d'équations non-linéaires régissant l'écoulement. Cette analyse a permis de mettre en évidence l'effet occasionné par la dissipation visqueuse à travers le nombre de Brinkman et la contrainte seuil sur la distribution du champ de température et également sur l'intensité de l'échange thermique entre le fluide et les parois. En tenant compte de la dissipation visqueuse. Les résultats obtenus montrent que l'accroissement de la contrainte seuil provoque une intensification de l'échange thermique, et ce dans les deux configurations considérées. Enfin, la contrainte seuil engendre de forts gradients de vitesse dans la zone cisaillée, située près de la paroi, qui sont à l'origine de l'auto réchauffement du fluide étant donné, la prise en compte de la dissipation visqueuse. En conséquence, pour un nombre de Brinkman donné (Br = 2), la structure du fluide sera très affectée par les valeurs élevées du nombre de Casson.

**Mots clés** : Fluide viscoplastique, Casson généralisé, dissipation visqueuse, température pariétale uniforme, contrainte seuil.

#### Nomenclature

- $C_p$  Chaleur spécifique, J/kg K
- *D* Diamètre de la conduite, *m*
- *k* Conductivité thermique, *W/m K*
- *L* Longueur de la conduite, *m*
- *M* Paramètre dans l'équation
- *n* indice d'écoulement
- $p^*$  Pression, Pa
- $P^*$  Pression adimensionnelle,  $[p^*/\rho U_0^2]$
- r Coordonnée radiale, m
- *R* Coordonnée radiale adimensionnelle
- T Température, K
- $T_0$  Température d'entrée, K
- $T_w$  Température à la paroi, K
- U Vitesse axiale adimensionnelle,  $[u/U_0]$
- *V* Vitesse radiale adimensionnelle  $(\xi = 1), [\nu/U_0]$
- *V* Vitesse longitudinal adimensionnelle  $(\xi = 0), [\nu/U_0]$
- $U_0$  Vitesse débutante, *m/s*
- *x* Coordonnée axiale, *m*
- *X* Coordonnée axiale adimensionnelle
- y Coordonnée longitudinal, m
- Y Coordonnée longitudinal adimensionnelle

Symboles grecs

- $\tau$  Taux de cisaillement, *m* s<sup>-1</sup>
- $\mu_{eff}$  Viscosité effective, kg/m s
- $\mu_{app}$  Viscosité apparente adimensionnelle,

 $\mu_{app} = \mu_{eff} / \mu_p$ 

- $\mu_p$  Viscosité plastique, kg/m s
- $\rho$  Masse volumique,  $kg/m^3$
- $\tau_0$  Contrainte seuil de cisaillement, *Pa*
- $\theta_m$  Température adimensionnelle,
- $\theta_m = (T T_w) / (T_0 T_w)$
- $\xi$  Paramètre de la géométrie (0 ou 1)
- Indices et exposants
- *0* référence
- app apparente
- p plastique
- w paroi

Nombres adimensionnels

- *Ca* Nombre de Casson,  $[\tau_0 R/\mu_p U_0]$
- Br Nombre de Brinkman,  $[\mu_p U_0^2 / k (T_0 T_w)]$
- *Pr* Nombre de Prandtl,  $[\mu_p C_p/k]$
- $Nu_x$  Nusselt local,  $[-1/\theta_m \cdot \partial \theta / \partial R|_{R=0,5}]$
- *Re* Nombre de Reynolds,  $[\rho U_0 R/\mu_p]$

#### 1. Introduction

Les fluides non newtoniens sont largement utilisés dans divers domaines en pratique de l'ingénierie tels que les procédés chimiques. L'effet de la dissipation visqueuse, d'autre part, peut devenir très important dans diverses configurations d'écoulement. En effet, la dissipation visqueuse affecte fortement les processus de transfert thermique lorsque le fluide utilisé a une conductivité thermique faible et viscosité élevée, ainsi que pour l'écoulement des fluides dans les conduits de petites sections transversales et faible flux de chaleur à la paroi.

Le problème d'écoulement laminaire pleinement développé et en développement thermique, qui est aussi appelé le problème de Graetz classique, a été résolu dans le cas où l'effet de la dissipation visqueuse est négligée. H. C. Brinkman [1] est le premier qui a examiné l'effet de la dissipation visqueuse par la présentation de la distribution de la température dans la région d'entrée pour les fluides newtoniens, dont la paroi est isolée ou bien isotherme. En outre, il a constaté que l'effet du chauffage visqueux était significatif au niveau de la paroi.

A. Barletta [2] a traité l'effet de la dissipation visqueuse sur l'écoulement laminaire et permanent d'un fluide newtonien dans un tube circulaire de longueur infinie. La vitesse est supposée uniforme et la paroi est soumise à une distribution axiale de flux. Il a choisi trois types de fonctions de distribution du flux pour arriver à s'assurer qu'il existe une région asymptotique invariant pour le nombre du Nusselt. A. Barletta et E. Zanchini [3] ont traité, analytiquement et par l'utilisation de la technique de la transformée de Laplace, l'effet de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique en convection forcée de l'écoulement piston d'un fluide newtonien dans une conduite circulaire. Cette dernière est soumise à trois types de flux de chaleur à la paroi à savoir, flux constant, varie linéairement et varie exponentiellement. Ils ont montré que la dissipation visqueuse a pour effet de réduire la valeur du nombre du Nusselt local dans le cas du flux de chaleur uniforme à la paroi, par contre dans les autres cas, l'effet de la dissipation visqueuse est observé uniquement à l'entrée

de la conduite, puis son effet devient négligeable dans la région du régime établi. O. Aydin [4] a examiné dans une partie de travail, le champ hydrodynamique et thermique en mode de convection forcée d'un fluide newtonien dans une conduite. Il a étudié, dans une seconde partie [5], l'effet de la dissipation visqueuse sur le développement du transfert thermique. Il a considéré deux conditions aux limites thermiques différentes: un flux de chaleur constant et une température pariétale constante, afin d'examiner le chauffage et le refroidissement pariétale à travers le nombre de Brinkman. Il a montré que ce dernier joue un rôle significatif dans le nombre de Nusselt en développement dans les cas de chauffage ou de refroidissement et provoque aussi une augmentation de température dans la direction axiale qui ne se produit pas lorsque la dissipation visqueuse est négligée.

Les extensions du problème de Graetz sont basées sur la considération du régime transitoire, la conduction axiale du fluide et l'effet de la dissipation visqueuse. La considération des fluides non newtoniens est l'extension la plus importante. En outre, l'écoulement de ces fluides, à travers les conduites circulaires ou entre plaques parallèles, a une grande importance dans la pratique, éventuellement dans les processus industriels tels que la stérilisation de la nourriture, produits cosmétiques, plastiques, peintures.....

L'effet de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique en convection forcée d'un fluide de Bingham en écoulement dans une conduite circulaire en considérant différentes conditions thermiques a été étudié par Vradis et *al*. [6], Min et *al*. [7] et Khatyr et *al*. [8]. Le profil de température et le nombre de Nusselt ont été déterminés dans la région thermiquement développée.

Une étude analytique sur l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley a été réalisée par J.N.N. Quaresma et E.N. Macêdo [9]. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, ces auteurs ont analysé l'influence de la contrainte seuil et l'indice de consistance sur la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement à travers une conduite cylindrique et entre deux plaques planes semi-infinies.

La convection forcée lors de l'écoulement laminaire d'un fluide en loi de puissance à travers une conduite cylindrique et entre deux plans parallèles en tenant compte la dissipation visqueuse est étudiée par plusieurs auteurs. R. M. Cotta et M. N. Ozisik [10] ont présenté une étude théorique de ce problème. Ce dernier est traité par la technique des fonctions propres en négligeant la conduction axiale du fluide et la dissipation visqueuse. Ils ont montré l'évolution du nombre de Nusselt et la distribution de la température du mélange. O. Jambal et *al.* [11] ont traité numériquement par un schéma aux différences finies, le transfert thermique des fluides non-newtonien de l'écoulement laminaire et permanent dans une conduite circulaire et entre plaques parallèles. La paroi est soumise à une température constante, la conduction axiale du fluide, ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse sont prises en considération. Ils ont montré graphiquement l'effet de cette dernière à travers le nombre de Brinkman sur le nombre de Nusselt dans les deux configurations considérées pour différents fluides.

Dans le présent travail, nous traitons par voie numérique une variété de problèmes physiques en relation avec les fluides viscoplastiques. Nous considérons l'écoulement au sein de deux géométries différentes, à savoir, l'écoulement dans l'entrefer délimité par deux plaques planes et l'écoulement au sein d'une conduite cylindrique présentant une symétrie de révolution. L'objectif de cette étude est essentiellement l'analyse de l'influence simultanée de la dissipation visqueuse et de la contrainte seuil des fluides viscoplastiques sur la structure thermique de l'écoulement à travers l'évaluation des échanges thermiques pariétaux. Une comparaison entre trois types de fluide à caractère viscoplastique est présentée. Il s'agit des fluides de Bingham, de Heinz et de Casson.

#### 2. Modélisation du problème physique

Nous considérerons la convection forcée, lors de l'écoulement stationnaire et bidimensionnel, d'un fluide incompressible en régime laminaire. Cet écoulement est représenté par un ensemble d'équations aux dérivées partielles, à savoir les équations de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Afin de présenter un seul système d'équations valables pour nos deux géométrie (géométries plane et cylindrique), un paramètre, noté  $\xi$  est introduit dans les équations. Selon la valeur attribuée à ce paramètre (0 ou 1) correspond à la première ou la seconde géométrie (les deux plaques planes ou la conduite cylindrique respectivement). L'écriture adimensionnelle des équations se présente comme suit :

Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial R} + \xi \frac{V}{R} = 0 \tag{1}$$

Equations de la quantité de mouvement (suivant X et R)

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 2 \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{1}{R^{\xi}} \frac{\partial}{\partial R} \left( \mu_{app} R^{\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) \right]$$
(2)

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) + \frac{1}{R^{\xi}} \frac{\partial}{\partial R} \left( 2 \,\mu_{app} R^{\xi} \frac{\partial V}{\partial R} \right) - 2 \,\mu_{app} \,\xi \frac{V}{R^2} \right] (3)$$

Equation de l'énergie

$$U\frac{\partial\theta}{\partial X} + V\frac{\partial\theta}{\partial R} = \frac{1}{Pr\,Re} \left[ \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R^{\xi}} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^{\xi} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \right] + \frac{Br}{Pr\,Re} \mu_{app} \dot{\gamma}^{*2} \tag{4}$$

Où  $\mu_{app}\dot{\gamma}^{*2}$  est le terme de la dissipation visqueuse et  $\dot{\gamma}^{*2}$ , représente le second invariant du tenseur des taux de déformation, défini par l'équation suivante :

$$\dot{\gamma}^* = \left[ 2\left( \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 + \xi \left(\frac{V}{R}\right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 \right]^{1/2}$$
(5)

L'approche de Papanastasiou est utilisée pour définir la viscosité apparente du fluide de Casson généralisé, afin d'éviter les instabilités numériques dues à la discontinuité de la loi rhéologique du fluide. Cette viscosité est donnée par l'expression suivante :

$$\mu_{app} = \left[ I + \left( \frac{Ca}{\dot{\gamma}^*} \right)^{l/n} \left[ I - exp \left( - \left( M \, \dot{\gamma}^* \right)^{l/n} \right) \right] \right]^n \tag{6}$$

Où,  $M = (m U_0)/D$  est le paramètre de croissance exponentielle réduit.

La figure 1 illustre le domaine physique de l'écoulement. Celui-ci présente un axe de symétrie le divisant en deux parties. Le domaine de calcul peut être ainsi réduit à l'un des sous-domaines.



Figure 1 : Domaine physique de l'écoulement.

Dans ce travail, on a considéré pour chaque configuration étudiée, des conditions aux limites spécifiques et représentatives du problème physique (Figure 1).

Une condition de non glissement et une température constante et uniforme sont considérées au niveau des parois solides, une vitesse et une température constantes et uniformes sont supposées à l'entrée et des profils de vitesse et de température établis sont considérées à la sortie.

La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de conservation, citées précédemment en tenant compte de l'expression de la viscosité apparente (6), est celle des volumes finis proposée par Patankar [12]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques, résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER. Un schéma en loi de puissance (*power Law*) est adopté pour tous les termes des équations de transport. Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme de  $250 \times 50$  avec un raffinement plus important au niveau de la zone d'entrée.

## 3. Validation du code de calcul et résultats

Pour valider notre code de calcul, nous avons comparé nos résultats avec ceux de Min et *al.* [7] ainsi que Quaresma et *al.* [9] correspondant aux cas limites de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite et entre deux plans parallèles, respectivement. La comparaison illustrée à travers le Tableau 1 montre un bon accord entre nos résultats et ceux des auteurs [7,9], étant donné que l'écart relatif maximal entre les résultats ne dépasse pas 0,4% pour tous les cas.

Ecoulement plan					Ecoulement axisymétrique			
Ca	0	5	10	20	Ca	0	1,99	5,65
$\mathrm{Nu}_{\infty}^{(\star)}$	7,5400	7,8754	8,0936	8,3702	$\mathrm{Nu}_{\infty}^{(\star)}$	3,6565	3,9367	4,2700
$Nu_{\infty}^{(\ref{abs})}$	7,5407	7,8833	8,1150	8,4018	$\operatorname{Nu}_{\infty}^{(\otimes)}$	3,6522	3,9380	4,2500
Ecart (%)	0,0093	0,1002	0,2637	0,3761	Ecart (%)	0,0093	0,0932	0,1002

Tableau 1 : Nusselt établi pour différentes valeurs du nombre de Casson.
(★) Présente étude, (�) Quaresma et al. [9], (◊) Min et al. [7].

De même, dans le cas de la prise en compte de la fonction de dissipation, le tableau 2 présente une comparaison entre les valeurs de la température moyenne dans la région établie (notée  $\theta_{mx}$ ) issues de la présente étude avec celles relatives à l'étude entreprise par Min et *al*. [7] et ce, pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. Nous notons là, également, que l'écart relatif maximal entre les deux études suscitées, ne dépasse pas 1%.

Br	0	0,1	1	2
$\theta_{m^{\infty}}{}^{(\star)}$	0	0,116	1,158	2,315
$\theta_{m^\infty}{}^{(\diamondsuit)}$	0	0,117	1,170	2,336
Ecart (%)	0	0,855	1,025	0,899

Tableau 2 : Température de mélange dans la zone établie pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. (★) Présente étude, (�) Min et al. [7].

La figure 2 illustre l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt local de l'écoulement plan (Figure 1 (a)) et de l'écoulement axisymétrique (Figure 1 (b)) d'un fluide de Casson pour lequel l'indice d'écoulement est égal à 2 et ce, pour différentes valeurs du nombre de Casson (Ca = 0 ; 2 et 10). Cette figure montre, en l'absence de la dissipation visqueuse (Br = 0), que l'augmentation de la contrainte seuil (nombre de Casson) entraine une légère amélioration du transfert thermique dans la zone d'entrée, qui s'intensifie au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans la conduite. Notons que chaque valeur du nombre de Casson lui correspond une valeur asymptotique du nombre de Nusselt, qui est d'autant plus élevée que la valeur du nombre de Casson est grande, la plus faible valeur étant celle correspondant à Ca = 0 (cas du fluide newtonien).



Figure 2 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Casson. Re = 25 ; Pr = 30 ; n = 2.
(a) : Géométrie plane (b) : Géométrie cylindrique.

Notons enfin que le fait de tenir compte de la fonction de dissipation (Br = 2) pour les deux géométries, rend compte d'une augmentation très significative de transfert thermique pour les deux configurations, en comparaison avec le cas où la dissipation visqueuse n'est pas prise en compte.

La figure 3 illustre les profils de température, pour différents nombres de Casson avec et sans prise en compte de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie et ce pour les deux configurations : l'écoulement entre deux plans parallèles (Figure 3-a) et l'écoulement à l'intérieur d'une conduite cylindrique (Figure 3-b).



Figure 3 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Casson. Re = 25 ; Pr = 30 ; n = 2.
(a) : Géométrie plane (b) : Géométrie cylindrique.

Lorsque la fonction de dissipation n'est pas prise en compte, le fluide se réchauffe depuis la paroi et la chaleur se propage progressivement vers le centre de l'écoulement (X = 10), jusqu'à ce que toute la masse fluide se met à la même température que celle de la paroi (X = 500).

Lorsque la fonction de dissipation est prise en compte et pour des valeurs positives du nombre de Brinkman, le fluide subit un refroidissement pariétal, depuis son entrée dans la géométrie, étant donné sa température supérieure à celle de la paroi. D'autre part, le frottement interne et celui contre la paroi font augmenter la température de la masse fluide, en particulier, au voisinage de la paroi (dans le cas X = 10) où le cisaillement est très important et ce, pour les deux configurations. Plus en aval (X = 500), la masse fluide de la région centrale de la conduite se met à une température uniforme, largement supérieure à 1, seule la région pariétale subit encore l'influence de la paroi. En outre, en augmentant le nombre de Casson, la température réduite du fluide augmente.



Figure 4 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement. Re = 25 ; Pr = 30 ; Ca = 2.
(a) : Géométrie plane (b) : Géométrie cylindrique.

La figure 4 illustre l'évolution axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement du fluide, à savoir : 0,5 ; 1 et 2 et en présence et en l'absence de la dissipation visqueuse et ce, pour les deux configurations.

Nous constatons, pour les deux configurations, que l'augmentation de l'indice d'écoulement entraine une amélioration du transfert thermique lorsque la dissipation visqueuse est prise en compte (Br = 2). Cette intensification de l'échange thermique est plus significative au niveau

de la zone intermédiaire de la géométrie. En revanche, il n'y a presque pas d'effet lorsque la dissipation visqueuse est négligée.

### 4. Conclusion

Dans ce présent travail, l'effort est concentré sur l'analyse numérique de l'impact de la dissipation visqueuse sur la structure thermique de l'écoulement d'un fluide viscoplastique de Casson généralisé entre deux plaques planes isothermes et à travers une conduite circulaire isotherme.

Les résultats obtenus montrent que l'accroissement de la contrainte seuil provoque une faible intensification de l'échange thermique, et ce dans les deux configurations considérées. D'autre parte, la contrainte seuil engendre de forts gradients de vitesse dans la zone cisaillée située près de la paroi qui sont à l'origine de l'auto réchauffement du fluide tout en tenant compte de la dissipation visqueuse. En conséquence, la structure du fluide sera très affectée par les valeurs élevées du nombre de Casson. Enfin, l'effet d'indice d'écoulement sur l'intensité d'échange thermique montre que le fluide de Casson (n = 2) présente les meilleures performances thermiques.

#### Références

- [1] H. C, Brinkman, Heat effects in capillary flow I, Appl Sci Res, A2 (1951): 120-124
- [2] A. Barletta, On forced convection in a circular duct with slug flow and viscous dissipation, *Int, Comm, Heat and Mass Transfer*, 23-1 (1996), 69-78,
- [3] A. Barletta, E, Zanchini, Forced convection in the thermal entrance region of a circular duct with slug flow and viscous dissipation, *Int, J, Heat Mass Transfer*, 40-5 (1997), 1181-1190,
- [4] O. Aydin, Effects of viscous dissipation on the heat transfer in a forced pipe flow, Part 1: Both hydrodynamically and thermally fully developed flow, *Energy Conversion and Management*, 46 (2005), 757-769,
- [5] O. Aydin, Effects of viscous dissipation on the heat transfer in a forced pipe flow, Part 2: Thermally developing flow, *Energy Conversion and Management*, 46 (2005), 757-769,
- [6] G. C, Vradis, J, Dougher, S, Kumar, Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic, *Int, J, Heat Mass Transfer*, 36-3 (1993), 543-552,
- [7] T. Min, J. Y. Yoo, H. G. Choi, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II, Numerical approach-Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int, J, Heat Mass Transfer*, 40 (1997b), 3689-3701,
- [8] R. Khatyr, D. Ouldhadda,, A. Il-Idrissi, Viscous dissipation effects on the asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts, *Int, J, Heat Mass Transfer*, 46 (2003), 589-598,
- [9] J. N. N. Quaresma, E, N, Macêdo, Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts, *Braz, J, Chem, Eng*, 15-1 (1998), Sao Paulo, Mars,
- [10] R. M. Cotta, M. N. Ozisik, Laminar forced convection of power-law non-newtonian fluids inside ducts, WäRme–Und Stoffü Bertragung, 20 (1986), 211-218,
- [11] O. Jambal, T, Shigechi, G, Davaa, S, Momoki, Effect of viscous dissipation and axial heat conduction on heat transfer for non-newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature, Part I parallel plates and circular ducts, *Int, Comm, Heat Mass Transfer*, 32 (2005), 1165-1173,
- [12] S. V, Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Ed, McGraw, New York (1980),