

Convection naturelle dans une cavité en forme de parallélogramme.

Amal BOUAFFAD*, Hamou SADAT, Vital LE DEZ

Institut P² D2 / Axe TNR, SIMMEA
Université de Poitiers - Bâtiment B25
2, rue Pierre Brousse - BP 635 - 86022 Poitiers Cedex
*(auteur correspondant : amal.bouaffad@univ-poitiers.fr)

Résumé –

Dans ce travail nous présentons une étude numérique portant sur le problème de la convection naturelle dans une cavité inclinée en forme de parallélogramme par une méthode de type Meshless. La formulation en variables secondaires des équations de Navier-Stokes est utilisée. Nous présentons les nombres de Nusselt et les caractéristiques principales des écoulements dans les deux cas favorable et défavorable correspondant à un angle d'inclinaison positif ou négatif. L'effet de diode thermique est bien mis en évidence. L'influence de l'inclinaison sur cet effet est examiné.

Nomenclature

A	rapport de forme	Ra	nombre de Rayleigh
Nu	nombre de Nusselt	α	angle d'inclinaison
Pr	nombre de Prandtl	ψ	fonction de courant
L	largeur, m	Ω	vorticité
H	hauteur, m	T	température
T_c	Température de la paroi chaude	α_0	diffusivité thermique
T_f	Température de la paroi froide	ν_0	viscosité cinématique
ΔT	différence de température ($T_c - T_f$)	β'	coefficient d'expansion volumique

1. Introduction

En raison des nombreuses applications potentielles, une meilleure compréhension de la convection naturelle dans des cavités non rectangulaires est indispensable. Parmi les géométries remarquables, la cavité inclinée en forme de parallélogramme (Figure 1) présente un intérêt particulier. En effet, l'écoulement et donc les transferts de chaleur dépendent fortement de l'inclinaison de la cavité. On distingue alors deux configurations selon le signe de l'angle ; une configuration ($\alpha > 0$) dans laquelle les échanges sont améliorés et une configuration ($\alpha < 0$) dans laquelle les échanges sont restreints. Une application intéressante de ce phénomène est la possibilité de développer des parois jouant le rôle de diode thermique [1]. Quelques études numériques ont été effectuées en utilisant la méthode des volumes finis ou des éléments finis [2-4]. On propose ici de présenter les résultats obtenus au moyen d'une méthode de type 'meshless' basée sur l'approximation diffuse [5,6]. Les valeurs du nombre de Nusselt sont données pour différentes inclinaisons et pour trois valeurs du nombre de Rayleigh. Les caractéristiques générales de l'écoulement ainsi que l'effet de diode thermique sont présentés et discutés.

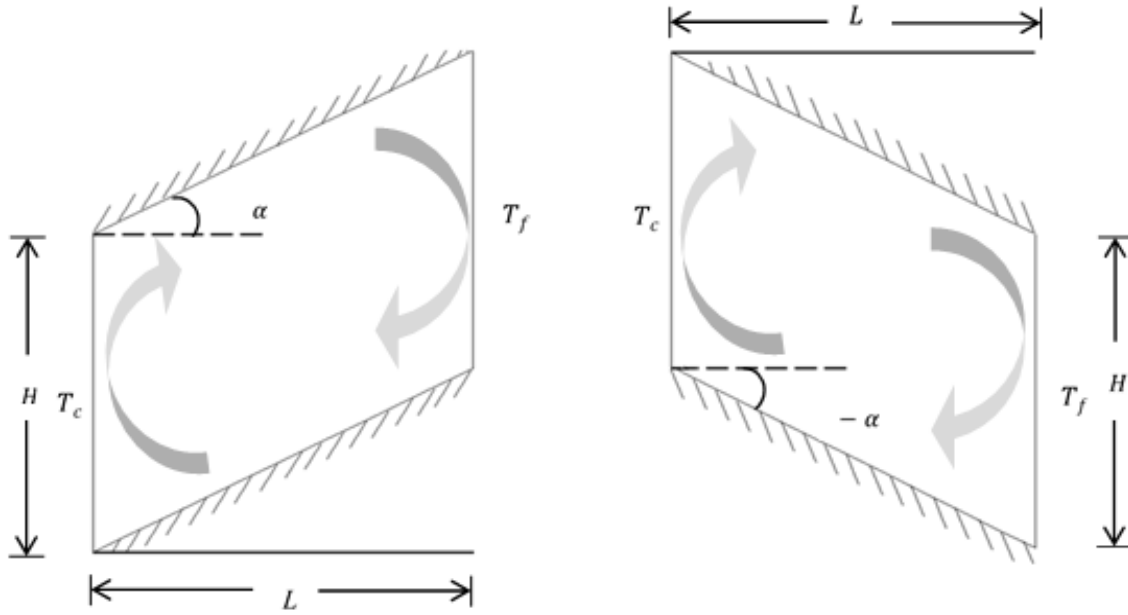


Figure 1 : Cavité inclinée dans la configuration favorable et défavorable

1. Formulation du problème

On considère une cavité bidimensionnelle remplie d'air avec les deux parois verticales maintenues à des températures imposées T_c et T_f tandis que les autres parois inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontale sont considérées comme étant parfaitement adiabatiques (figure 1). L'angle α (négatif ou positif), prendra les valeurs suivantes $\alpha = \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$ et $\pm 60^\circ$.

Les différentes équations adimensionnelles qui régissent le problème s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Pr \nabla^2 \Omega + Ra Pr \left(-\sin \phi \frac{\partial T}{\partial y} + \cos \phi \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (3)$$

Où ψ, Ω et T représentent la fonction de courant, la vorticité et la température respectivement. Pr et Ra désignent les nombres de Prandtl : $Pr = \nu_0 / \alpha_0$ et de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g \beta' \Delta T L^3}{\nu_0 \alpha_0} .$$

Nous ne reprendrons pas ici les détails relatifs à la méthode de collocation utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles précédentes et qui peuvent être trouvés par ailleurs [5-6]. On rappellera simplement qu'étant donné un champ scalaire $\phi(x, y)$ le développement en série de Taylor de ce champ à l'ordre 2 donne l'estimée $\phi_i^*(x_i, y_i)$ au point de calcul M_i par l'expression suivante :

$$\varphi_i^*(x_i, y_i) = \langle p(M_i, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T$$

$\langle p(M_i, M) \rangle$ est le vecteur de la base polynomiale généralisée et $\langle \alpha_M \rangle^T$ le vecteur transposé des variables généralisées de l'approximation :

$$\langle p(M_i, M) \rangle = \langle 1, (x_i - x), (y_i - y), (x_i - x)^2, (x_i - x)(y_i - y), (y_i - y)^2 \rangle$$

et $\langle \alpha_M \rangle^T = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle^T$

Les différents coefficients α_i correspondent donc, à une constante près, aux dérivées successives du champ scalaire au point M_i . On connecte ensuite les variables généralisées aux valeurs connues par minimisation de l'erreur quadratique :

$$I(\alpha_M) = \sum_{j=1}^n \left\{ \omega(M_j, M) \cdot \left[\varphi_j - \langle p(M_j, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T \right]^2 \right\}$$

Où $\omega(M_j, M)$ est une fonction de pondération continue, positive, maximale en M_i et décroissant rapidement quand on s'en éloigne. Afin de garder un caractère local à l'approximation, ω est défini sur un support borné réduit.

Dans cette étude nous avons choisi :

$$\omega(M_j, M) = \exp \left[-3 \ln(10) \cdot \left(\frac{r}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$\omega(M_j, M) = 0 \text{ si } r > \sigma$$

Où $r = |MM_j|$ représente la distance entre les points M et les voisins M_j et où σ est l'ouverture du support de la fonction de pondération. La minimisation de $I(\alpha_M)$ par rapport à $\langle \alpha_M \rangle^T$ conduit alors au système matriciel:

$$[A^M] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{2! \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{2! \partial y^2} \end{array} \right\}^* = \langle B^M \rangle^T$$

Où :

$$[A^M] = \sum_{j=1}^n \omega(M_j, M) \cdot \langle p(M_j, M) \rangle^T \cdot \langle p(M_j, M) \rangle$$

$$\langle B^M \rangle^T = \sum_{j=1}^n \omega(M_j, M) \cdot \langle p(M_j, M) \rangle^T \cdot \varphi_j$$

Si la matrice $[A^M]$ n'est pas singulière, le système peut être inversé et les dérivées successives de φ en M sont exprimées en fonction des différentes valeurs φ_j aux nœuds voisins. Les dérivées partielles apparaissant dans les équations à résoudre sont ensuite remplacées par ces approximations en chacun des points de la discrétisation. On obtient finalement des systèmes d'équations linéaires qui sont résolus séquentiellement au moyen d'une méthode BICGSTAB après introduction des conditions aux limites. Les équations (1), (2) et (3) sont résolues dans cet ordre avec comme critère de convergence une erreur relative sur chacune des variables et en chaque point inférieure à 10^{-4} .

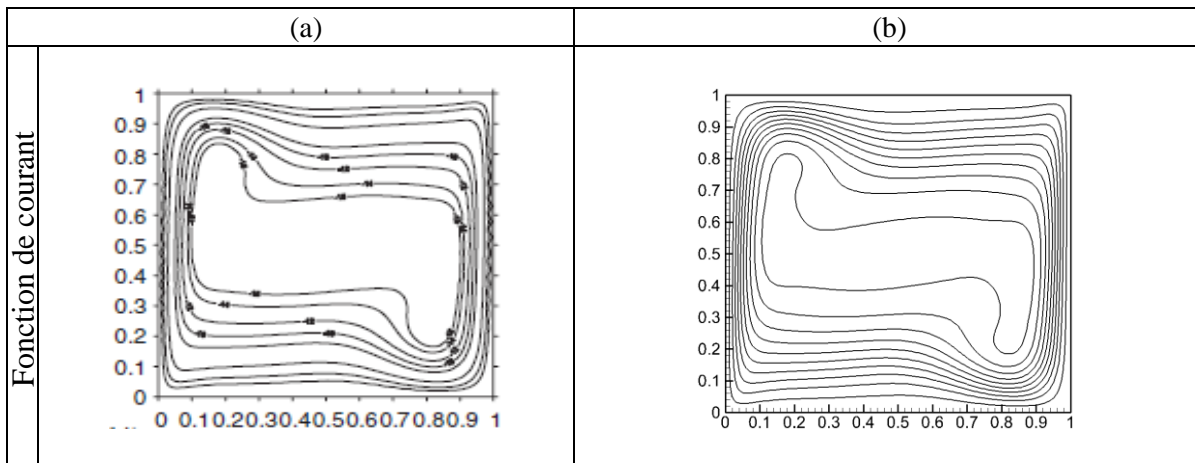
2. Résultats et discussion

Afin de valider notre code de calcul, nous avons d'abord considéré le cas de la cavité carrée différentiellement chauffée. Nous avons regroupé dans le tableau 1, les valeurs du nombre de Nusselt calculé en fonction du nombre de Rayleigh ainsi que les valeurs de référence. Ainsi qu'on peut le voir, l'erreur relative est inférieure à 0.8%. La fonction de courant et les isothermes pour $Ra=10^6$ sont également données sur la figure 2. On constate là aussi un bon accord avec les résultats de référence [8].

Nous avons regroupé sur la figure 3, le nombre de Nusselt en fonction de l'angle d'inclinaison α pour différents nombres de Rayleigh dans le cas d'une cavité en forme de parallélogramme dont le rapport de forme $A=H/L$ est fixé à 1.

Nombre de Rayleigh	Maillage	\overline{Nu}	Référence
$Ra=10^5$	81×81	4.538	4.523[7]
$Ra=10^6$	81×81	8.939	8.928[7]
$Ra=10^7$	121×121	16.767	16.641[8]

Tableau 1: Nombre de Nusselt pour une cavité carrée pour $Ra=10^5, 10^6$ et 10^7



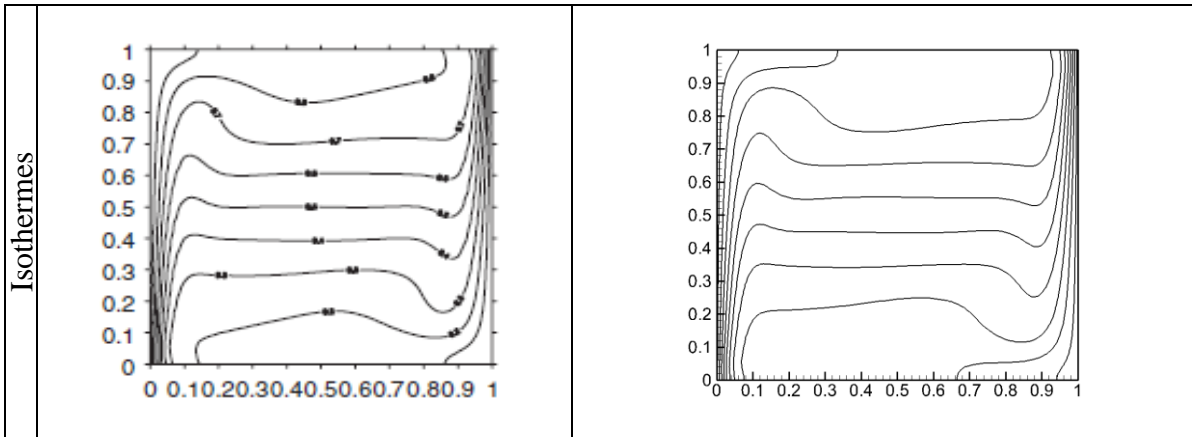


Figure 2: Fonction de *courant* et *champ d'isothermes* dans une cavité carrée pour $Ra = 10^6$ (a) [8], (b) meshless

La figure 3 montre que dans le cas défavorable où l'angle α est négatif, les nombres de Nusselt sont inférieurs à ceux de la cavité carrée ($\alpha=0^\circ$) quel que soit le nombre de Rayleigh. D'autre part, le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation de l'inclinaison. Nous remarquons que l'angle $\alpha=45^\circ$ est un angle critique au-delà duquel la convection diminue nettement.

Dans le cas favorable ($\alpha > 0^\circ$), le nombre de Nusselt est supérieur à celui de la cavité carrée et augmente avec l'inclinaison jusqu'à un angle critique de l'ordre de 15° . Au-delà de cette valeur, le nombre de Nusselt se remet à diminuer et devient même inférieur à celui de la cavité carrée pour un angle supérieur à 30° .

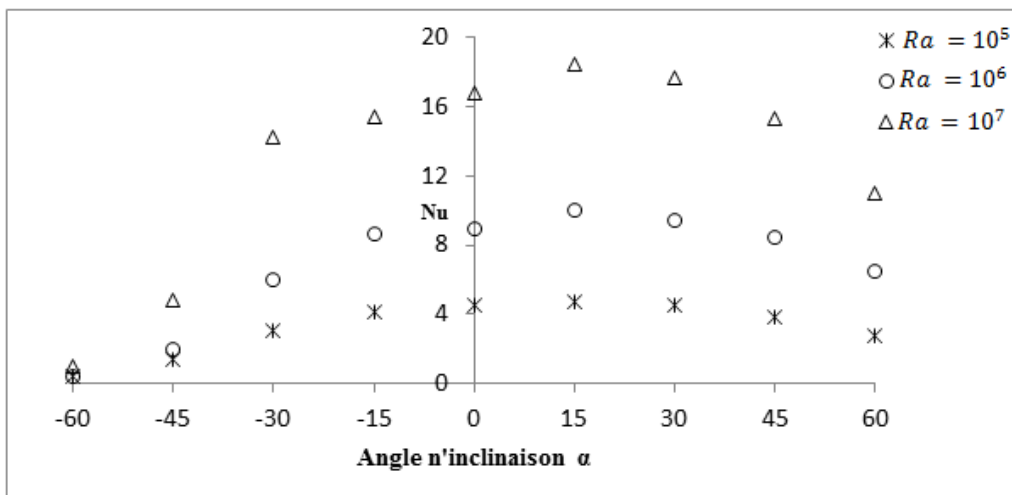


Figure 3 : Variation de nombre de Nusselt en fonction de l'angle d'inclinaison de La cavité en configuration favorable pour $Ra=10^5, 10^6$ et 10^7

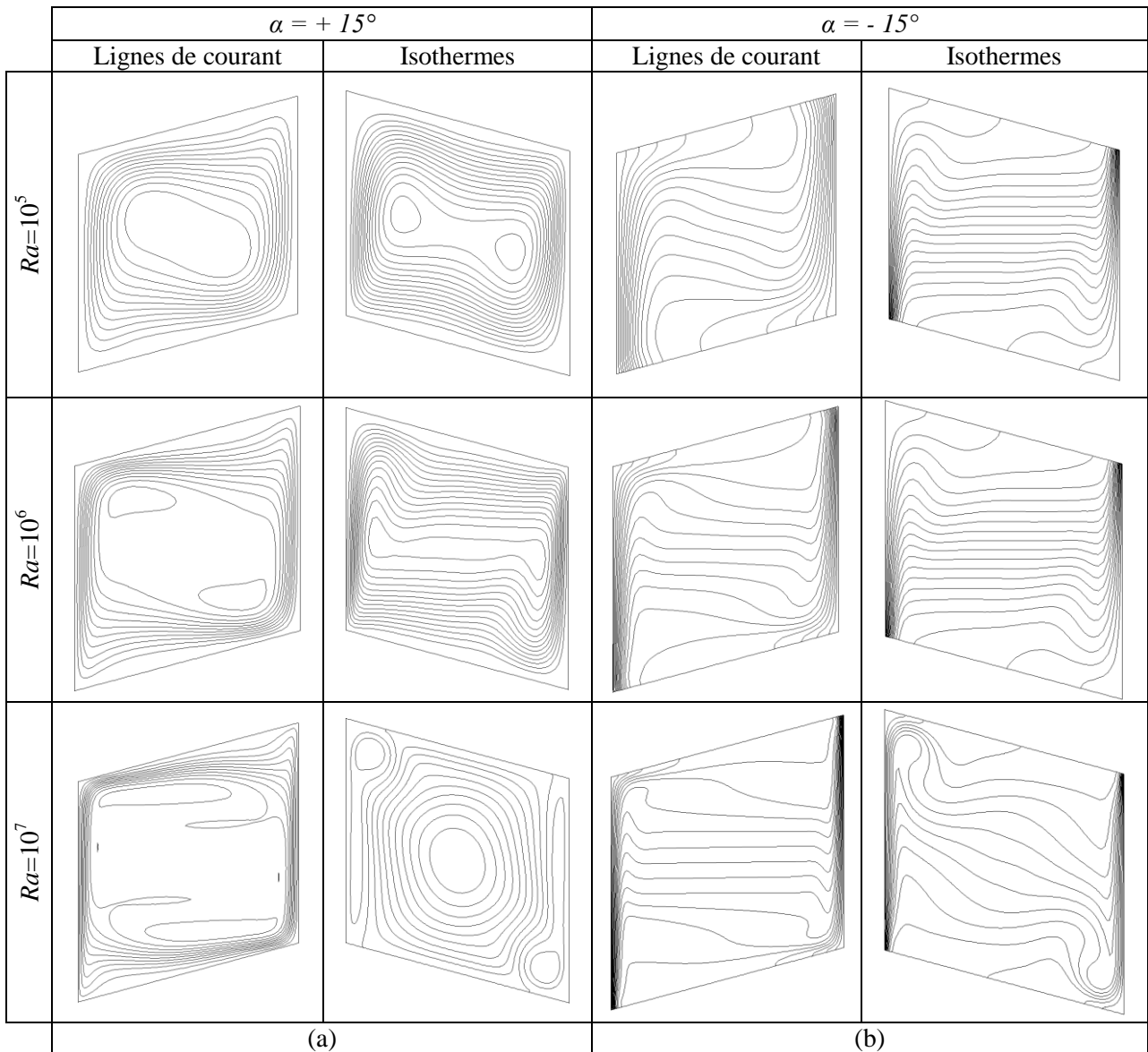


Figure 4: *Champ d'isothermes et de lignes de courant dans une cavité inclinée d'un angle $\alpha = +15^\circ$ et $\alpha = -15^\circ$*

Les caractéristiques de l'écoulement (lignes de courant et isothermes) dans le cas favorable et défavorable sont présentées sur les figures 4 et 5 pour les angles d'inclinaison $\alpha = \pm 15^\circ$ et $\alpha = \pm 45^\circ$ pour les différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Dans le cas favorable (figures 4a et 5a) on observe le développement sur toute la hauteur de la cavité de deux couches limites le long des parois verticales. Les parois non actives étant inclinées, le fluide est moins freiné et le flux de chaleur est plus important que dans le cas d'une cavité carrée. Cependant, quand l'angle devient trop grand, de la chaleur peut être transférée de la partie inclinée haute de la cavité à la partie inclinée basse, créant ainsi un effet de 'court-circuit'.

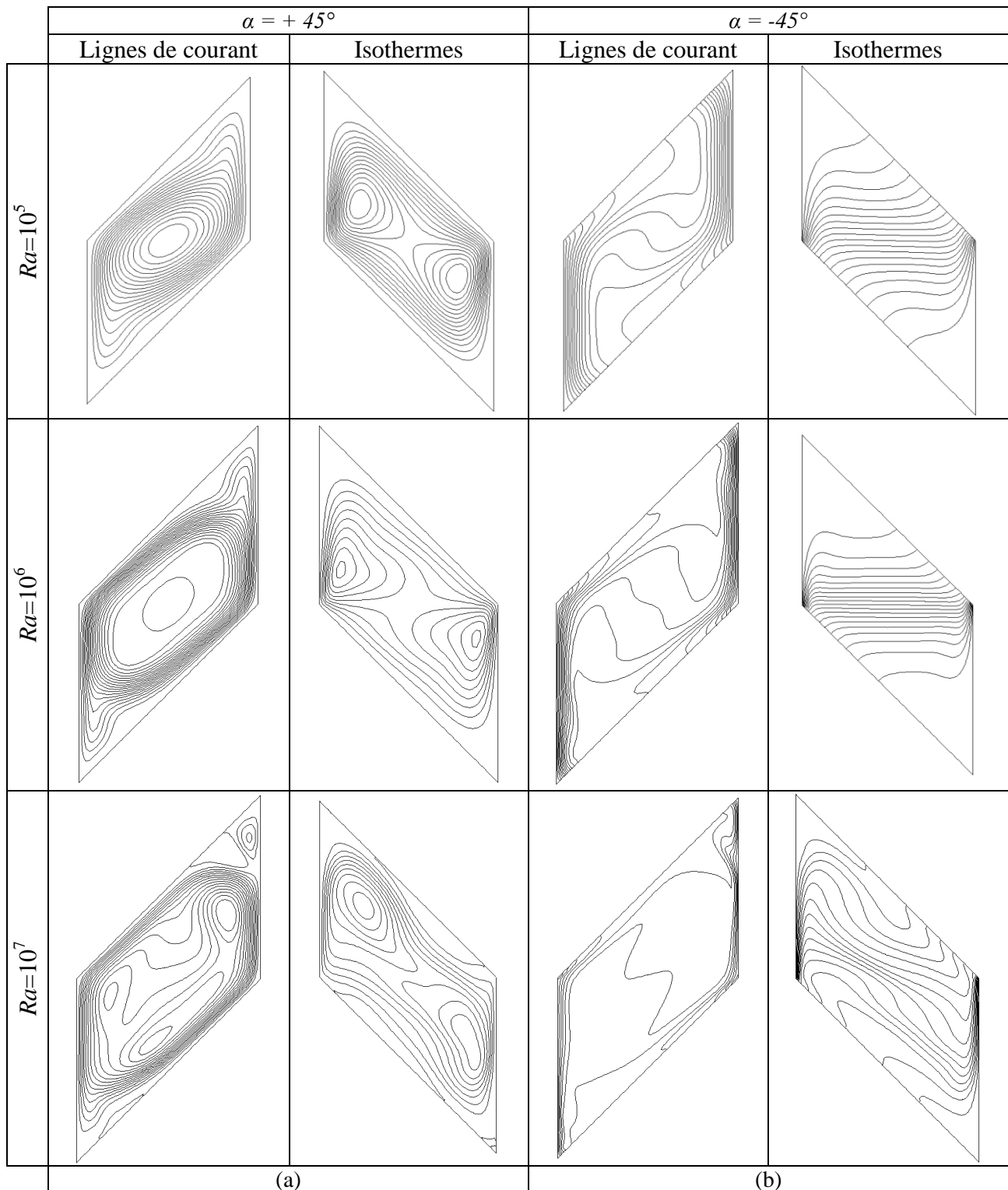


Figure 5: *Champ d'isothermes et de lignes de courant dans une cavité inclinée d'un angle $\alpha = +45^\circ$ et $\alpha = -45^\circ$*

Lorsque l'angle est négatif (Figures 4b et 5b) on peut constater l'existence de deux zones où le fluide est stagnant dans les coins en bas à droite et en haut à gauche. Ceci empêche le

développement des couches limites et freine donc les échanges thermiques sur les parois actives.

α	Ra=10 ⁵	α	Ra=10 ⁶	α	Ra=10 ⁷
$\alpha = \pm 15^\circ$	1.16	$\alpha = \pm 15^\circ$	1.17	$\alpha = \pm 15^\circ$	1.19
$\alpha = \pm 30^\circ$	1.50	$\alpha = \pm 30^\circ$	1.61	$\alpha = \pm 30^\circ$	1.64
$\alpha = \pm 45^\circ$	2.63	$\alpha = \pm 45^\circ$	3.97	$\alpha = \pm 45^\circ$	5.03
$\alpha = \pm 60^\circ$	5.36	$\alpha = \pm 60^\circ$	9.87	$\alpha = \pm 60^\circ$	11.33

Tableau 4 : Rapport des nombres de Nusselt en fonction de l'angle d'inclinaison de la cavité

Dans le tableau 4 enfin, nous présentons le rapport des nombres de Nusselt $D_\alpha = \frac{\overline{Nu}_{+\alpha}}{\overline{Nu}_{-\alpha}}$ des cas favorable et défavorable. On peut noter que l'effet 'diode' augmente avec $|\alpha|$ et avec le nombre de Rayleigh. Il atteint une valeur de ~ 10 à Ra=10⁷.

3. Conclusion

Dans ce travail une analyse du transfert de chaleur par convection naturelle dans une géométrie bidimensionnelle en forme de parallélogramme a été présentée. La variation de nombre de Nusselt en fonction de l'angle d'inclinaison de la cavité traitée et de nombre de Rayleigh a été examinée. Les caractéristiques de l'écoulement dans les cas favorable et défavorable ont permis d'expliquer l'effet de diode thermique qui a été quantifié.

Références

- [1] J.M.Garcia de Maria, A.Baïri, Empirical correlations at high Ra for steady-state free convection in 2D air-filled parallelogrammic enclosures with isothermal discrete heat sources, International Journal of Heat and Mass Transfer, 3831–3838, 2010.
- [2] A.Baïri, Transient natural convection in parallelogrammic enclosures with isothermal hot wall. Experimental and numerical study applied to on-board electronics, Applied Thermal Engineering , 1115–1125, 2010.
- [3] N.Seki , S.Fukusako,A.Yamaguchi.An experimental study of free convective heat transfer in a parallelogrammic enclosure, Journal of Heat Transfer, Vol.105, August 1983.
- [4] J.M.Hyun and B.S.Choi. Transient natural convection in a parallelogram-shaped enclosure, Journal of Heat Transfer, Vol.11, June 1990.
- [5] H.Sadat and S.Couturier, Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals 37: 4. 455 – 467, June 2000.
- [6] C. Prax, H. Sadat, Application of the diffuse approximation for solving fluid flow and heat transfer problems, International Journal Heat Mass Transfer, Vol.39, No.1, pp.214–218, 1996.
- [7] G. De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.3, pp.249–264, 1983
- [8] D. C. Lo, D. L.Young, C. C. Tsai, High resolution of 2D natural convection in a cavity by the DQ method, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.203, pp.219–236, 2007