

# Lattice Boltzmann Method appliquée à la Simulation Thermique Dynamique du Bâtiment.

Edouard WALTHER\*, Rachid BENNACER, Caroline DESA

Laboratoire de Mécanique & Technologie – ENS Cachan  
61, avenue du Président Wilson – 94230 Cachan  
\*(auteur correspondant : [walther@lmt.ens-cachan.fr](mailto:walther@lmt.ens-cachan.fr))

**Résumé** - Avec l'émergence de bâtiments de plus en plus performants, les infiltrations d'air et d'humidité dans les parois ont un impact grandissant sur les consommations d'énergie et le confort. L'évolution de la réglementation thermique et les objectifs nationaux de réductions des émissions de gaz à effet de serre poussent la filière à utiliser des outils de simulation thermique dynamique de plus en plus perfectionnés. Ceux-ci sont néanmoins peu précis en ce qui concerne les transferts couplés d'humidité et de chaleur dans les parois, ainsi que les mouvements d'air. Notre étude porte donc sur l'utilisation d'une méthode de calcul performante apparue dans la dernière décennie qui permettrait de répondre à ce besoin de précision en simulation thermique : la méthode dite «*Lattice Boltzmann*».

Les méthodes Boltzmann sur gaz réseau ou «*Lattice Boltzmann Method*» (LBM) développées depuis une quinzaine d'années sont en amélioration constante et constituent une variante attractive aux méthodes classiques de résolution numérique des équations de Navier-Stokes (énergie et espèces), notamment pour leurs propriétés de stabilité et de précision numérique. La LBM permet une modélisation plus fine des échanges au sein des parois poreuses et à leur interface avec les ambiances intérieure et extérieure, sans nécessiter l'emploi de schémas implicites, ce qui simplifie considérablement la solvabilité du problème ainsi que la programmation.

De par sa formulation explicite, la LBM a déjà été prouvée hautement parallélisable sur architecture GPU ou GPGPU (Kuznik et al. 2010, Delbosc et al. 2014, Gjermundsen et al. 2010) ce qui permet de simuler un problème 3D monophysique en temps réel sur une station de bureau en utilisant une carte graphique. L'étude en cours porte donc sur le couplage multiphysique entre l'enveloppe du Bâtiment et les ambiances intérieure et extérieure. Les phénomènes à cette échelle seront abordés de façon précise en capturant les phénomènes de condensation, d'évaporation et de transfert d'humidité afin d'évaluer leur impact sur les consommations d'énergie ou la potentielle dégradation des parois du fait de l'humidité.

## Nomenclature

$c$	vitesse microscopique	$\omega$	facteur de relaxation
$D$	dimension caractéristique, $m$	$\tau$	temps entre deux collisions
$f$	fonction de distribution	$\Omega$	opérateur de collision
$h$	coefficient d'échange, $W/m^2/K$	$\varphi$	flux solaire, $W/m^2$
$L$	longueur, $m$	$\rho$	grandeur macroscopique
LU	"Lattice Unit"	<b>Indices et exposants</b>	
$N$	nombre de nœuds	$k$	direction $k$
Re	nombre de Reynolds	<i>LBM</i>	relatif à la LBM
$S$	surface d'échange, $m^2$	T	relatif au champ des températures
$T$	température, $^{\circ}C$	V	relative au champ des vitesses
$u$	vitesse macroscopique	$x$	composante selon $x$
<b>Symboles grecs</b>		$y$	composante selon $y$
$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$		
$\nu$	viscosité, $m^2.s^{-1}$		

## 1. Introduction

Avec l'émergence de bâtiments performants sur le plan des consommations énergétiques, les infiltrations d'air et d'humidité dans les parois ont une importance grandissante [1,2,3]. Les modèles de prédiction couramment utilisés sont cependant peu précis sur le plan des transferts couplés de masse et de chaleur dans l'enveloppe, tout comme ceux décrivant les mouvements d'air. Il s'agit donc de décrire plus finement la physique derrière les phénomènes de transfert dans le bâtiment et ainsi parvenir à une prédiction plus précise de ses consommations d'énergie.

On se propose d'utiliser une approche de type particulière de résolution des équations aux dérivées partielles [4] : la *Lattice Boltzmann Method* (appelée LBM dans la suite). Cette technique numérique de mécanique des fluides permet, de par sa formulation explicite, une parallélisation massive des calculs notamment sur des applications orientées vers le Bâtiment [5].

La détermination en temps réel des champs de vitesse, de température ou de concentration, en milieu ouvert ou poreux devient donc possible [6]. L'objet des travaux présentés ici est d'explorer les capacités de résolution de la LBM pour une paroi dynamique.

## 2. Simulation numérique avec la méthode Lattice Boltzmann

Dans cette section, on aborde les fondements de cette technique numérique, puis sa formulation dans le cas des écoulements anisothermes. Le lien entre "monde LBM" et "monde réel" est également examiné, ainsi les aspects de calculabilité spécifiques à cette méthode où taille de maillage et nombre de pas de temps requis pour une durée réelle à simuler sont intrinsèquement liés.

### 2.1. Introduction à la LBM

La méthode Boltzmann sur gaz réseau est une approche mésoscopique des problèmes aux dérivées partielles. L'évolution d'un fluide ou d'un solide est déduite du comportement d'une population de particules qui interagissent avec des règles bien définies de collision et de rebond.

À l'inverse des équations de Navier-Stokes décrivant un comportement macroscopique discrétisé vers le microscopique, il s'agit d'une approche « ascendante », où l'agitation particulière définie par la distribution de Maxwell permet une extrapolation consistante vers le

comportement macroscopique. Ce lien entre les deux échelles macroscopique et mésoscopique est fait via un développement mathématique appelé expansion de Chapman-Enskog [7].

En pratique, pour décrire le comportement monophysique d'un fluide ou d'un solide, *i.e.* un écoulement ou de la diffusion thermique, utiliser la LBM consiste à considérer une population de particules se déplaçant de proche en proche selon les directions cardinales avec un déplacement unitaire sur un maillage lattice du domaine d'étude. Ce mouvement systématique de point en point dans les directions du maillage est aussi appelé « streaming ». Les particules échangent leur énergie par collision à chaque pas de temps. La figure 1 donne un exemple de propagation des distributions pour le modèle  $D_2Q_9$  où « 2 » représente la dimension d'espace et « 9 » le nombre de directions de propagation possible par point de la grille (huit probabilités de déplacement plus la possibilité de rester immobile).

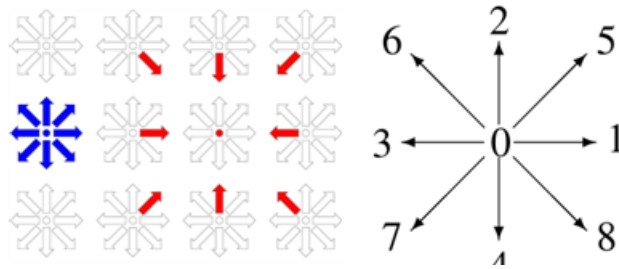


Figure 1: Directions de propagation sur la grille pour le schéma  $D_2Q_9$

L'équation de Boltzmann régissant le mouvement des particules au travers de leur densité de probabilité  $f$  de distribution dans l'espace est telle que la dérivée lagrangienne de  $f$  soit égale à un opérateur de collision  $\Omega$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\nabla f = \Omega(f) \quad (1)$$

Si l'on transpose l'équation continue (1) sous une forme discrète en deux dimensions telle que le schéma  $D_2Q_9$  présenté figure 1, on obtient la forme suivante pour les  $k$  directions de l'espace ( $0 \leq k \leq 9$ ) :

$$\frac{\Delta f_k}{\Delta t} + c_k \frac{\Delta f_k}{\Delta x_k} = \Omega_k \quad (2)$$

Avec  $c_k = \Delta x_k / \Delta t = 1$ , vitesse mésoscopique de lattice unitaire pour toute direction  $k$ ,  $f_k$  la fonction de distribution dans la direction  $k$  et  $\Omega_k$  l'opérateur de collision. Les particules se déplaçant de point en point, le pas de temps est unitaire également. Dans l'approche de Bhatnagar-Gross et Krook [8] (appelée BGK par la suite) l'opérateur de collision est défini comme une relaxation de la fonction de distribution vers l'équilibre :

$$\Omega_k = -\frac{1}{\tau} (f_k - f_k^{eq}) \quad (3)$$

Où  $\tau$  est le temps entre deux collisions des particules et  $f_k^{eq}$  est simplement un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'équation statistique d'agitation particulaire de Boltzmann donnant la probabilité de distribution des particules d'un gaz parfait à l'équilibre et au repos. Cette approximation de la fonction d'équilibre est telle que :

$$f_k^{eq} = w_k \rho \left( 1 + 3\vec{c}_k \vec{u} + \frac{9}{2} (\vec{c}_k \vec{u})^2 - \frac{3}{2} \frac{\vec{u}^2}{c_s^2} \right) \quad (4)$$

Dans l'équation (4)  $\vec{u}$  représente la vitesse macroscopique du fluide (nulle dans le cas de la diffusion dans un solide),  $\rho$  est la densité ou somme des distributions au point considéré. La vitesse  $c_s$  est une pseudo-vitesse du son égale à  $1/\sqrt{3}$  sous les hypothèses du modèle  $D_2Q_9$ . Il est à noter cette vitesse n'a rien de physique, elle représente uniquement un facteur de mise à

l'échelle [9]. La pondération  $w_k$  est un facteur décroissant selon la probabilité des déplacements sur la grille, les plus courts étant les plus probables, et telle que  $\Sigma(w_k) = 1$ .

On définit ensuite le facteur de relaxation  $\omega = \Delta t/\tau$  qui est homogène à une fréquence de collision. Le facteur de relaxation  $\omega$  fait également le lien avec les propriétés de dissipation visqueuse ou thermique du fluide ou du solide considéré dans le « monde LBM » via l'équation suivante provenant de l'expansion de Chapman-Enskog [8] :

$$d = c_s^2 \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

Où  $d$  est la propriété voulue du fluide (respectivement du solide), *e.g.* la viscosité  $\nu$  (respectivement la diffusivité thermique  $\alpha$ ). La relation entre facteur de relaxation et monde réel sera détaillée dans la section 2.3.

Ayant développé ces points, l'équation (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_k(x + \Delta x_k, t + \Delta t) - f_k(x, t) = -\omega \left( f_k(x, t) - f_k^{eq}(x, t) \right) \quad (6)$$

On obtient ainsi une formulation explicite et locale de la probabilité de distribution au temps  $t + \Delta t$  et au point  $x + \Delta x_k$ . Pour obtenir les propriétés macroscopiques du fluide, il suffit de sommer les distributions concernées au point contribué. Pour calcul de la diffusion (grandeurs scalaires du type température, concentration) on effectuera simplement  $\Sigma(f_k) = \rho$ . Pour le vecteur vitesse il faut sommer les contributions concernées; avec les mêmes notations que la figure 1 ceci équivaut à faire les opérations suivantes :

$$u_x = \frac{f_1 + f_5 + f_8 - (f_3 + f_6 + f_7)}{\rho} \quad (7)$$

$$u_y = \frac{f_2 + f_5 + f_6 - (f_4 + f_7 + f_8)}{\rho} \quad (8)$$

Le point critique de la LBM est dans l'application des conditions limites appropriées (vitesse imposée, adhérence, température imposée) qui servent à déterminer les  $f_k$  inconnus aux extrémités devant « rentrer » dans le maillage par streaming. Pour plus de détails sur ce point, se référer à [8, 10].

La séquence algorithmique de la LBM est donc une succession d'étapes répétées jusqu'au nombre de pas de temps requis pour correspondre à la réalité (à ce sujet voir section 2.3) :

- Collision des particules selon l'équation (6).
- « Streaming » ou déplacement de proche en proche dans chaque direction  $k$ .
- Application des conditions limites pour créer les distributions inconnues du streaming.
- Calcul des grandeurs macroscopiques en chaque point du maillage (vitesse, température, concentration).

## 2.2. Cas de l'écoulement forcé anisotherme

Pour résoudre un problème couplé température/écoulement avec la méthode LBM-BGK, la démarche consiste à se servir de deux populations de particules  $f$  et  $g$ . La population  $f$ , strictement similaire à celle décrite précédemment, sert à calculer les propriétés de l'écoulement à partir d'un facteur de relaxation  $\omega_V = \omega_V(\nu)$  comme dans l'équation (5).

Pour la population  $g$ , afin de décrire le champ de température dans l'écoulement on prend simplement  $\vec{u} = 0$  et on définit le facteur de relaxation  $\omega_T = \omega_T(\nu, \alpha)$  tel que [11] :

$$\frac{\omega_T}{\omega_V} = \frac{\tau_V}{\tau_T} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (9)$$

La population  $g$  se comporte de manière similaire à la population  $f$  hormis pour les fonctions de distribution à l'équilibre, qui contiennent le terme de couplage :

$$g_k^{eq} = w_k \rho \left( 1 + \frac{\vec{c}_k \vec{u}}{c_s^2} \right) \quad (10)$$

### 2.3. Choix des paramètres de la simulation

Pour un écoulement, il convient de faire correspondre deux quantités sans dimension caractérisant d'une part la diffusivité de quantité de mouvement dans le milieu (sorte de Fourier de l'écoulement) et d'autre part la discrétisation (nombre de Courant). Le nombre de Reynolds s'en trouvera automatiquement équivalent pour les deux "mondes".

Dans un premier temps, on considère le nombre adimensionnel qui caractérise la diffusion de la quantité de mouvement dans le fluide en écoulement, que l'on surnomme "Fourier de l'écoulement". Les discrétisations spatiale et temporelle de la LBM étant par essence unitaires, on obtient l'égalité (12).

$$Fo_{écoulement} = \frac{v_{LBM} \Delta t_{LBM}}{\Delta x_{LBM}^2} = \frac{v \Delta t}{\Delta x^2} \quad (11)$$

$$v_{LBM} = \frac{v \Delta t}{\Delta x^2} \quad (12)$$

Il faut désormais ajuster la vitesse d'écoulement  $u_{LBM}$  afin qu'elle corresponde à la vitesse de l'écoulement réel. On peut voir les choses sous l'angle suivant : les ratios des vitesses réelles et des vitesses discrètes doivent être égaux (équation 13) ou alors que les nombres de Courant des deux "mondes" doivent être égaux (équation 14), ce qui revient à l'équation (15).

$$\frac{u_{LBM}}{\frac{\Delta x_{LBM}}{\Delta t_{LBM}}} = \frac{u}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (13)$$

$$Co = \frac{u_{LBM} \Delta t_{LBM}}{\Delta x_{LBM}} = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (14)$$

$$u_{LBM} = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (15)$$

La méthode nous contraint de surcroît à  $u_{LBM} \ll c_s = 1/\sqrt{3}$  afin de respecter les critères de précision vis-à-vis du nombre de Mach [12].

### 2.4. Relation espace/temps en LBM

Un des désavantages majeurs de la méthode est la dépendance de la discrétisation temporelle vis-à-vis de la taille du maillage, ainsi que la valeur limite admissible pour la vitesse  $u_{LBM}$ . Prenons un cas concret afin d'illustrer ce propos. Soit à résoudre un problème 2D d'écoulement entre deux plaques avec les caractéristiques d'écoulement suivantes :

- $V_x = 0.1 \text{ m/s}$
- $L_y = 0.1 \text{ m}$
- $\frac{L_x}{L_y} = 10$
- $\nu = 14.4 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
- $Re = V_x \times L_y / \nu = 694$

Si on s'impose une taille de maillage  $N_x \times N_y = 640 \times 64$  on peut calculer la finesse de la discrétisation  $\Delta x$  (le maillage étant régulier par définition, on a  $\Delta x = \Delta y = 1$ ). On choisit ensuite le temps de relaxation  $\tau = 0.55$  suffisamment éloigné de la viscosité nulle ( $\tau = 0.5$ ) afin de pouvoir calculer la viscosité  $\nu_{LBM}$  :

- $\Delta x = 10/640 = 0.015625$  [m]
- $\nu_{LBM} = c_s^2(\tau - 0.5) = \frac{1}{3} \times (0.55 - 0.5) = 0.016667$  [LU<sup>2</sup>/TU]

Il est alors possible de déterminer la valeur réelle d'un pas de temps LBM grâce à l'équivalence nécessaire de l'équation (12) entre LBM et écoulement réel :

$$\Delta t = \Delta x^2 \times \frac{\nu_{LBM}}{\nu} = 0.015625^2 \times \frac{0.016667}{14.4 \times 10^{-6}} = 0.2826$$
 [s]

Imaginons que l'on souhaite connaître le profil des vitesses en sortie des plaques au bout de  $t = 100$  [s]. Le nombre de pas de temps requis pour simuler cette durée est donc  $t_{LBM} = 100/0.2826 = 354$ . On remarque que doubler la finesse du maillage revient à quadrupler le nombre de pas de temps requis.

Il faut désormais ajuster la vitesse d'écoulement  $u_{LBM}$  afin qu'elle corresponde à la vitesse de l'écoulement réel d'après l'équation (15) :

$$u_{LBM} = 0.1 \times \frac{0.2826}{0.015625} = 1.80$$
 [LU/TU]

Il faut alors de vérifier que la valeur de vitesse  $u_{LBM}$  respecte la condition de précision du schéma préconisée par [12]. En l'occurrence on obtient une valeur trop élevée et il convient de répéter la séquence en changeant le temps de relaxation et/ou la discrétisation.

### 3. Application à une paroi dynamique

On se propose d'utiliser la méthode décrite précédemment afin d'étudier un écoulement forcé dans une paroi dynamique composée d'un simple vitrage placé devant un mur.

#### 3.1. Présentation du problème

La configuration est celle d'un écoulement forcé anisotherme entre deux plaques avec un facteur de forme de 40, comme indiqué sur la figure 2. À partir des données de température et de flux solaire incident sur un plan vertical orienté plein Sud en date du 15 mars à Strasbourg [13], on simule la température de sortie de l'air pour une vitesse d'entrée fixée de 0,1 m/s et une température d'entrée égale à celle de l'air ambiant. On impose une vitesse nulle sur les parois haute et basse ainsi qu'une température équivalente fonction du flux solaire incident, de la température et du coefficient local d'échange, telle que :

$$T_{eq} = T_{air} + \frac{\varphi}{h} \tag{16}$$

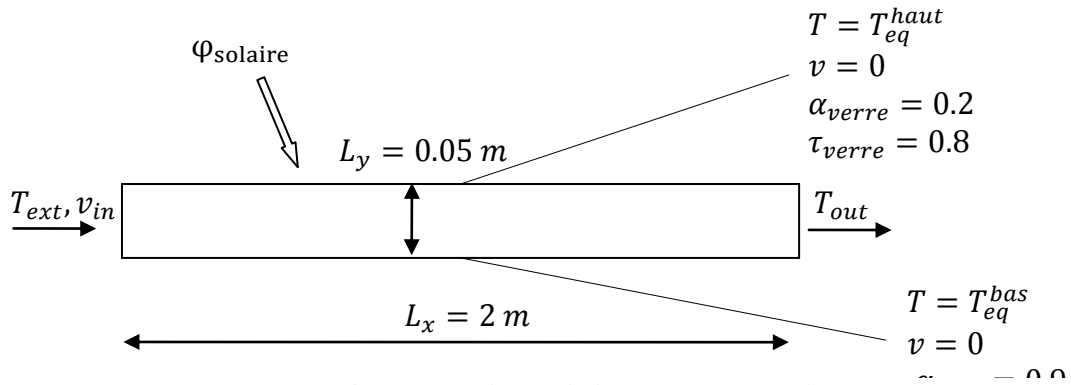


Figure 2 : Schéma de la géométrie simulée

Le flux incident sur les parois est pondéré par les coefficients d'absorption et de transmission respectifs du verre et du mur :

$$\varphi_{haut} = \alpha_{verre} \cdot \varphi_{solaire} \quad (17)$$

$$\varphi_{bas} = \tau_{verre} \cdot \varphi_{solaire} \times \alpha_{mur} \quad (18)$$

### 3.2. Résultats

La figure 3 montre un exemple de résultat calculé sur carte graphique Nvidia Quadro pour une vitesse d'entrée de 0,1 m/s et un maillage de 128×5120 nœuds.

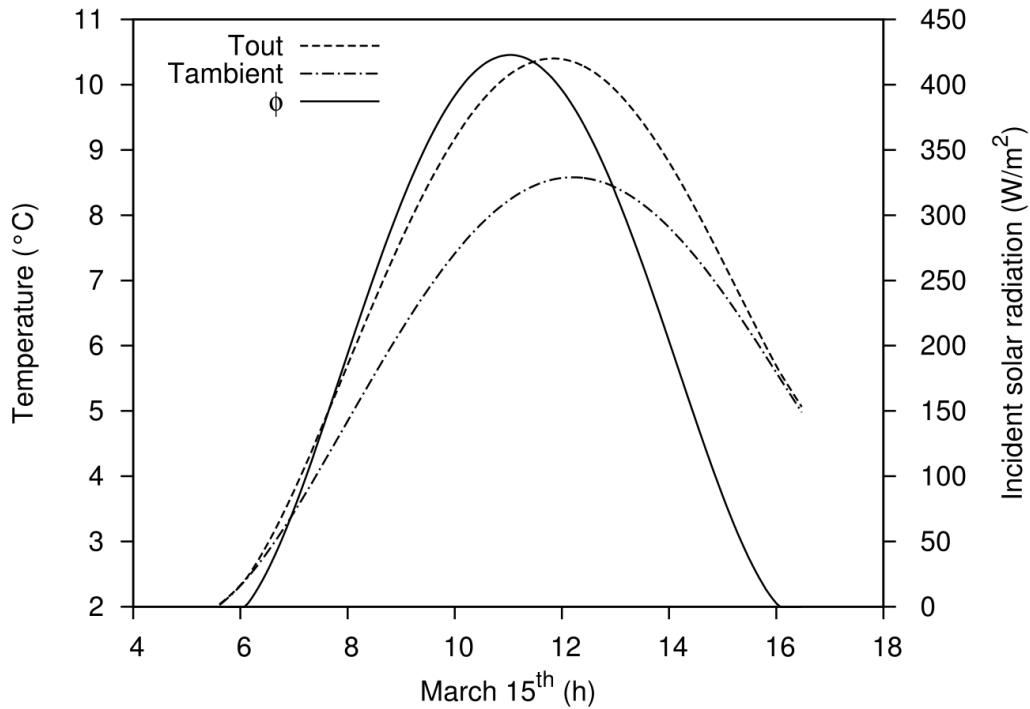


Figure 3 : Résultats de simulation pour  $v=0,1$  m/s, maillage de taille 128×5120

Une étude de la puissance récupérable en fonction du débit montre la quantité d'énergie récupérable par l'air, comme indiqué figure 4.

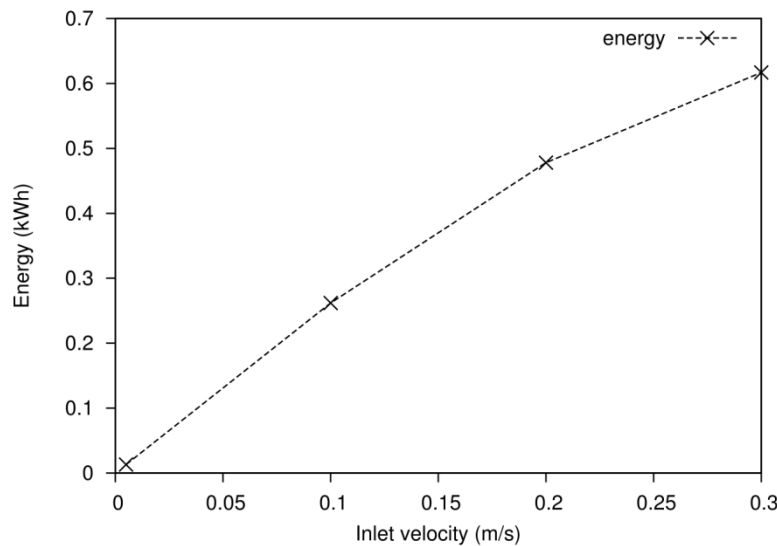


Figure 4: *Energie récupérée en fonction de la vitesse*

#### 4. Conclusion

Ce travail confirme la faisabilité d'une simulation d'écoulement anisotherme grâce à la LBM. La formulation explicite de la méthode et son implémentation relativement simple sur carte graphique lui confèrent un attrait certain pour ce type de problèmes.

Les résultats montrent l'utilité d'une telle paroi pour le préchauffage de l'air extérieur. Pour affiner les prédictions il faut néanmoins traiter le thème de l'inertie du mur formant la surface de captage, ce qui est actuellement en cours dans une étude complémentaire à ce travail. On pourra aussi tester si l'utilisation d'un double vitrage se révèle intéressante dans ce cas.

La LBM permet également la simulation des systèmes de type "mur Trombe" avec convection naturelle grâce à un couplage simple en introduisant le nombre de Rayleigh dans le calcul des fonctions d'équilibre comme dans [14].

#### Références

- [1] C.P. Hedlin, Heat flow through a roof insulation having moisture contents between 0 and 1% by volume, in summer, *National Research Council Canada, reprinted from Ashrae Transactions, Part 2* (1988) 1579-1594.
- [2] M. Jirickowa, R. Cerny, Effect of hydrophilic admixtures on moisture and heat transport and storage parameters of mineral wool”, *Construction and Building Materials*, vol. 20 (2006) 425–434.
- [3] H.M. Künzeli, T. Tanaka, Simulation der instationären Temperatur- und Feuchteverhältnisse in Bauteilen mit Hilfe des Modells WUFI, *WUFI-Software online dokumentation* (2003) Fraunhofer Institut.
- [4] A.A. Mohamad Lattice Boltzmann Method, Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes, Springer, (2012).
- [5] F. Kuznik, C. Obrecht, G. Rusaouen, J.-J. Roux, LBM based flow simulation using GPU computing processor, Computers & Mathematics with Applications, *International Conferences on Mesoscopic Methods in Engineering and Science*, Volume 59, Issue 7, Mesoscopic Methods in Engineering and Science, (April 2010), 2380-2392.



- [6] A.A. Mohamad, M. El Ganaoui, R. Bennacer, Double dispersion, natural convection in an open end cavity simulation via Lattice Boltzmann Method, *Int. J. Thermal Sciences*, 49 (10), 2008, 1944-1953.
- [7] C. Cercignani, Theory and application of the Boltzmann equation, Scottish Academic Press, Edinburgh and London (1976).
- [8] D. A. Wolf-Gladrow, Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction, Springer (2005).
- [9] R.R. Nourgaliev, T.N. Dinh, T.G. Theofanous, and D. Joseph. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications. *Int. J. Multiphase Flow* (2003), 29:117–169.
- [10] D.P. Ziegler, *Journal of Statistical Physics* (1993), 71;1171-7.
- [11] A. A. Mohamad, M. El Ganaoui, R. Bennacer, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open ended cavity, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 48, Issue 10, (October 2009), 1870–1875.
- [12] X. He, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation, *Journal of Statistical Physics*, Volume 88, 3/4, 1997.
- [13] Données disponibles sur <http://re.jrc.ec.europa.eu/pvgis/apps4/pvest.php>
- [14] M. A. Taher et al. Numerical Study of Lid-Driven Square Cavity with Heat Generation Using LBM, *American Journal of Fluid Dynamics* (2013), 3(2), 40-47.