

Réduction modale d'un système de stockage thermique avec matériau à changement de phase.

Stanislas BROU^{1*}, Frédéric JOLY¹, Alain NEVEU¹

¹Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
40 rue du Pelvoux CE1455 Courcouronnes 91020 Evry Cédex FRANCE
*(auteur correspondant : s.brou@iut.univ-evry.fr)

Résumé - Responsable de 43 % de l'énergie totale consommée et de 25 % des émissions de CO₂, le secteur du bâtiment représente le plus grand gisement d'économie d'énergie en France. Par ailleurs, les politiques de maîtrise de l'énergie mis en œuvre dans ce secteur, encouragent fortement l'utilisation des énergies renouvelables. C'est dans ce cadre que nous développons un simulateur numérique de système de mini/micro-cogénération utilisant des énergies renouvelables (programme de recherche BATIMAC en association avec la société ENS2R). Cet outil d'aide au choix doit être rapide, précis et permettre de dimensionner et d'évaluer les performances du système Batimac.

Le logiciel Simulink, est un outil adapté pour ce type de développement, où le simulateur est vu comme un ensemble de composants couplés. Toutefois la modélisation de ce système fait cohabiter des modèles de composants de types différents (algébriques, nodaux, éléments finis). Malheureusement, les environnements de calcul s'accommodent mal de cette cohabitation, essentiellement avec les modèles maillés de grande taille, dont celui des systèmes de stockages de chaleurs qui sont indispensable pour un fonctionnement optimal du système Batimac. Il peut donc être intéressant d'avoir recours aux méthodes de réduction modale pour garantir des performances en temps de calcul acceptables.

La présentation du système Batimac et la description du simulateur ont fait l'objet d'une précédente communication [1]. Quant à l'utilité de la réduction modale, elle a été démontré dans [2] et [3]. Dans cet article, nous présentons un modèle réduit de système de stockage thermique avec matériau à changement de phase. Après avoir fait l'objet d'une comparaison avec le modèle complet (en volumes ou éléments finis), nous mettons en évidence les écarts de température et les gains en temps de simulation dus à la réduction modale. Enfin, ce modèle sera confronté aux résultats expérimentaux de Lacroix [4] pour validation.

[1] Brou S., Joly F., Gokpi K., Neveu A., Artigue V. Modélisation et simulation d'un système énergétique pour bâtiment autonome en énergie. Conférence IBPSA France-Arras-2014.

[2] Gaume B., Brou S., Joly F., Gokpi K., Neveu A. Réduction modale d'un plancher chauffant. Congrès SFT France-Lyon-2014.

[3] O. Quemener, . Neveu, E. Videcoq , A specific reduction method for the branch modal formulation: Application to a highly non-linear configuration, International Journal of Thermal Sciences,(2006), ISSN 1290-0729

[4] M. Lacroix, Numerical simulation of shell-and-tube latent heat thermal energy storage unit, Solar Energy, 50 (1993), 357-367

1. Introduction

Les systèmes de stockage thermique utilisant des Matériaux à Changement de Phase (noté par la suite MCP) sont appelés à être de plus en plus utilisés dans les systèmes de micro-cogénération utilisant des énergies renouvelables, que ce soit pour contrer le caractère intermittent de l'énergie solaire ou pour assurer l'équilibre offre-demande d'énergie (voir par exemple le projet européen DISTOR ou HTPSTOCK). Il est donc nécessaire de créer des modèles adaptés afin de les intégrer dans des logiciels de simulation thermique dynamiques. Les modèles maillés de grande taille s'adaptant assez mal avec l'environnement Simulink (la notion de matrice creuse n'y existant pas¹), les méthodes de réduction modale sont des alternatives intéressantes permettant de garantir une précision acceptable tout en diminuant le temps de calcul. Nous présentons donc dans cette communication un modèle modal réduit d'un système de stockage à MCP prenant en compte la non homogénéité des conditions aux limites ainsi que la variation temporelle des propriétés thermo-physiques du matériau lors de son changement de phase.

2. Problème physique et hypothèses de modélisation

2.1. Description problème physique

Le type de stockage thermique choisi est un cylindre vertical contenant plusieurs unités de stockage de type *pipe model*. Une telle unité est un tube concentrique de longueur L , de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur R_i , contenant un matériau à changement de phase dans la partie annulaire et un fluide caloporteur (noté HTF pour Heat Transfer Fluid) circulant dans le tube intérieur. On ne modélisera dans cette communication qu'une unité de stockage (voir figure 1).

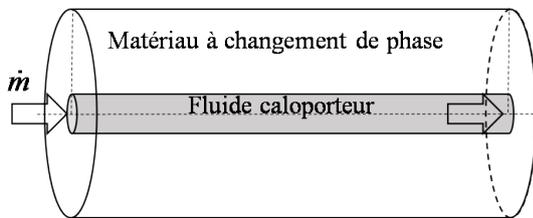


Figure 1 Schéma de l'unité de stockage thermique de type *pipe model*.

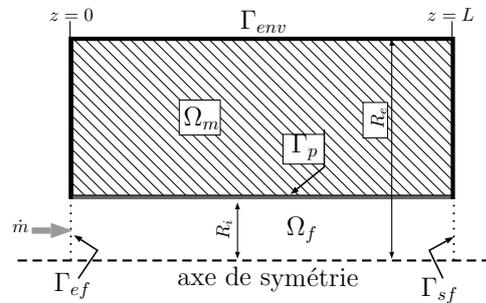


Figure 2 Représentation 2-D axi-symétrique de l'unité de stockage thermique.

2.2. Hypothèses et équations d'évolution

Le problème thermique traité ici est un problème instationnaire avec des conditions limites non homogènes². Pour sa modélisation, nous établissons les hypothèses ci-dessous :

1. Le MCP et le HTF sont isotropes,
2. La résistance de contact entre le MCP et HTF est négligeable,
3. Le coefficient d'échange par convection h_o entre le MCP et HTF est obtenu par :

$$h_o = \frac{k_f Nu}{2 R_i} \quad \text{Où} \quad Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33}$$

1. Une matrice creuse est une matrice contenant beaucoup de zéros. On utilise alors des algorithmes et des structures de données qui prennent en compte la structure peu dense de la matrice

2. Une condition aux limites est dite homogène si elle est de type $k \nabla T \cdot \mathbf{n} + hT = 0$

4. L'effet de la convection naturelle qui intervient pendant le changement de phase du MCP est pris en compte à travers une conductivité thermique équivalente k_{eq} , donnée par [1] :

$$k_{eq} = k_l C r R_a^n \left(\frac{\delta}{R_e - R_i} \right)^m \quad \text{Avec} \quad R_a = \frac{g\beta}{\alpha\nu} (T_{pm} - T_{fus}) (R_e - R_i)^3$$

où T_{fus} est la température de changement de phase et T_{pm} la température moyenne de la frontière entre le matériau à changement de phase et le fluide caloporteur.

5. La conductivité thermique du MCP k_m est fonction de la fraction liquide moyenne f_{lm} :

$$k_m = k_{eq} f_{lm} + k_s (1 - f_{lm})$$

6. Le MCP est modélisé en 2D-axi-symétrique et le HTF en 1D (voir Fig. 2).

En tenant compte de ces hypothèses, l'évolution dynamique de la température dans chacun des domaines peut être déterminée en résolvant les équations suivantes :

$$\forall M \in \Omega_f, \quad R_i \rho_f c_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + v \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) = k_f R_i \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} + 2h_o (T_m|_{\Gamma_p} - T_f) \quad (1)$$

$$\forall M \in \Omega_m, \quad r \rho_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - r \rho_m l_f \frac{\partial f_l}{\partial t} = k_m \left(r \frac{\partial^2 T_m}{\partial r^2} + \frac{\partial T_m}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

Associées aux conditions aux frontières ci-dessous :

$$\forall M \in \Gamma_{ef}, \quad T_f = T_{in} \quad (3)$$

$$\forall M \in \Gamma_{sf}, \quad k_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

$$\forall M \in \Gamma_p, \quad R_i k_m \nabla T_m \cdot \mathbf{n} = h_o R_i (T_f - T_m) \quad (5)$$

$$\forall M \in \Gamma_{env}, \quad k_m \nabla T_m \cdot \mathbf{n} = h_{env} (T_{env} - T_m) \quad (6)$$

Où dans l'équation (2), l_f désigne la chaleur latente de fusion et f_l la fraction liquide. Cette dernière est déterminée par :

$$f_l(t + \delta t) = f_l(t) + \frac{c}{l_f} (T_m(t) - T_{fus}) \quad (7)$$

Tel que :

$$f_l = \begin{cases} 0 & \text{si } f_l < 0 \\ 1 & \text{si } f_l > 1 \end{cases} \quad (8)$$

Notons que le fait de multiplier l'équation de la chaleur par le rayon r dans (2) n'est pas anodin. Cette manipulation est nécessaire pour garantir la symétrie des opérateurs lors de leur discrétisation spatiale et donc leur caractère auto-adjoint.

3. Modélisation par la méthode des différences finies

Les Eqs. (1) à (6) sont discrétisées par la méthode des différences finies, puis mises sous forme matricielle pour donner :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_f \dot{T}_f = (\mathbf{K}_f + \mathbf{S}_f) T_f + \mathbf{G}_f T_m + \mathbf{B}_f T_{in} \\ \mathbf{C}_m \dot{T}_m = (\mathbf{K}_m + \mathbf{H}_m) T_m + \mathbf{G}_m T_f + \mathbf{B}_m U_m + \mathbf{L}_m \dot{f} \end{cases} \quad (9)$$

Les matrices C , K , S et G sont respectivement les matrices de capacité, de conductivité, de transport et de couplage entre le HTF et le MCP. Les matrices H et L_m tiennent respectivement compte des échanges par convection et de la chaleur latente et U_m désigne le vecteur de sollicitation.

Le modèle détaillé (MD) est obtenu après discrétisation temporelle du système d'équation (9) (effectuée par un schéma Euler implicite du premier ordre). Sachant que le MCP nécessite un maillage relativement fin, le modèle détaillé est généralement d'ordre N *grand* et les matrices mises en jeu sont tridiagonales par bloc. Ainsi, grâce à la fonction *sparse*³, la résolution de ce problème dans des environnements tels que C++, Fortran ou Matlab est rapide. Cependant, la notion de matrice creuse n'existe pas dans l'environnement Simulink. Il est donc nécessaire de réduire la taille du modèle tout en gardant une précision acceptable.

4. Modélisation par réduction modale

Le principe de la réduction modale est de rechercher la solution sous la forme :

$$T(M, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) V_i(M) \quad (10)$$

où $x_i(t)$ sont les états et $V_i(M)$ les modes (des champs de températures particuliers). Dans la théorie classique, les modes sont déterminés à l'aide d'un problème aux valeurs propres satisfaisant les conditions aux limites. La variation au cours du temps du coefficient de convection, de la conductivité thermique du MCP, ainsi que la non homogénéité en température des conditions aux limites interdisent le recours à une base modale classique (conditions aux limites de type Fourier par exemple). Les modes de branches sont alors un recours pour réduire ce problème.

4.1. Base de branche

Pour un problème de diffusion pure, les modes de la base de branche vérifient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\forall M \in \Omega, r \nabla \cdot (k_0 \nabla V_i) = \lambda_i r \rho_0 c_{p0} V_i \quad (11)$$

$$\forall M \in \Gamma, k_0 r \nabla V_i \cdot \mathbf{n} = -\lambda_i r \zeta V_i \quad (12)$$

où λ_i et V_i sont respectivement la valeur propre et le vecteur propre d'ordre i de la base de branche. La spécificité de ce problème aux valeurs propres est la condition aux limites qui fait intervenir la valeur propre (Eq. (12)), ce qui signifie que cette base modale n'est liée à aucune condition aux limites spécifique. Le paramètre ζ est un coefficient numérique appelé le coefficient de Steklov. Il assure l'homogénéité de l'équation (12). Sa valeur numérique est choisie afin d'équilibrer les intégrales sur la surface et sur le volume. L'introduction de la condition aux limites (Eq. 12) conduit à l'apparition de deux types de modes [3] : Une première famille avec des modes quasi-nuls sur les frontières mais non-nuls dans le cœur du domaine (modes volumiques, figure 4 b) et à l'inverse des modes quasiment nuls dans le volume, mais non-nuls aux frontières (modes de surface, figure 4 a). L'existence des modes de surface permet de reconstruire les températures et les flux de chaleur pour n'importe quel coefficient d'échange h . Cette base est ainsi adaptée à des problèmes de thermiques à paramètres instationnaires et non-linéaire. Des études plus détaillées de ces modes ont été réalisées dans [3] et [4].

Pour un système ouvert, le problème de branche s'écrit :

$$\forall M \in \Omega, \nabla \cdot (k_0 \nabla V_i) - \rho_0 c_{p0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla V_i = \lambda_i r \rho_0 c_{p0} V_i, \quad (13)$$

3. Dans Matlab, la fonction *sparse* génère des matrices creuses en ne stockant que les termes non nuls

associée aux conditions aux limites :

$$\forall M \in \Gamma_{ef}, \quad k_0 \nabla V_i \cdot \mathbf{n} - \rho_0 c_{p0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} V_i = -\lambda_i \zeta V_i \quad (14)$$

$$\forall M \in \Gamma_{sf}, \quad k_0 \nabla V_i \cdot \mathbf{n} = -\lambda_i \zeta V_i \quad (15)$$

Cependant, nous ne calculerons pas cette base pour le HTF. En effet, une étude analytique montre que les modes sont de la forme :

$$V_i(z) = f_i(z) e^{\frac{\rho c v}{2k}(z-L)} \quad (16)$$

où $f_i(z)$ est une fonction sinusoïdale ou sinusoïdale hyperbolique. Vu les valeurs de $\rho_0 c_{p0}$ de l'eau (4.18×10^6) le terme en exponentielle écrase le terme $f(z)$. Il n'est alors pas pertinent de calculer la base modale correspondant au problème physique. Cependant, comme les modes de branche forment une base pour l'espace $H^1(\Omega)$, il est possible de décomposer le champ de température du fluide sur une base calculée avec une vitesse nulle. Nous prendrons donc une base sans transport. La visualisation des premiers modes de branche en une dimension (voir figure 3) est révélatrice de l'intérêt des modes de branche. En effet, il s'agit d'un mode plat et d'un mode quasi linéaire. Ces deux modes permettent d'approcher n'importe quelle solution stationnaire. Ainsi, il n'est plus nécessaire de traiter à part la partie non homogène des conditions aux limites comme dans la théorie classique de Fourier. La discrétisation spatiale des

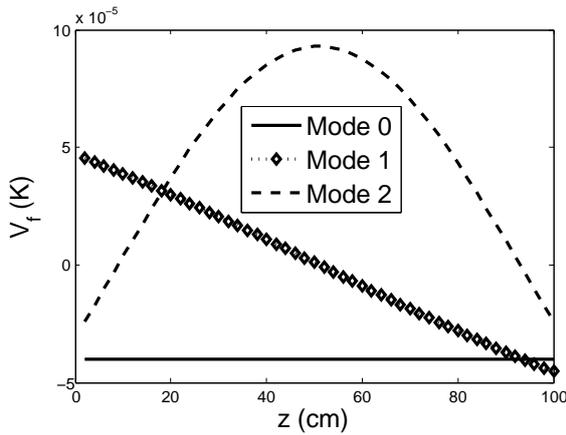


Figure 3 Modes 1D dans le domaine Ω_f .

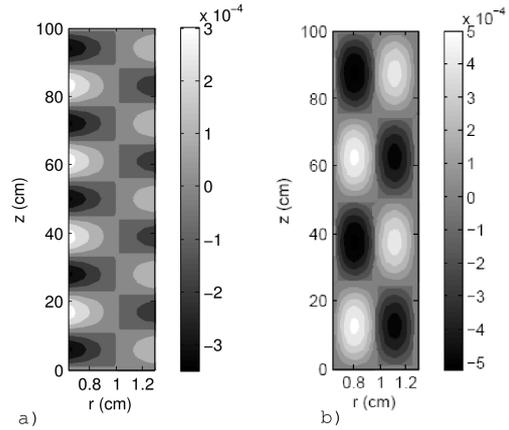


Figure 4 Modes surfacique (a) et volumique (b) dans le domaine Ω_m .

équations (11), (12), (13) et (15) permet d'écrire le problème aux valeurs propres sous la forme matricielle standard :

$$\mathbf{K}_{f,m}^0 V_i = -\lambda_i (\mathbf{C}_{f,m}^0 + \mathbf{C}_b)$$

où les matrices $\mathbf{K}_{f,m}^0$ et $\mathbf{C}_{f,m}^0$ sont les matrices de conductivité et de capacité pour des propriétés thermophysiques moyennes et \mathbf{C}_b la matrices contenant la condition aux limites de Steklov. Ce problème aux valeurs propres est résolu grâce à la suite de sous-routine Arpack. Des modes de branche sont ainsi calculés pour chacun des domaines (Ω_f et Ω_m). La disposition en colonne de ces modes dans un tableau permet d'obtenir les bases de Branche \mathbf{P}_f et \mathbf{P}_m , respectivement pour le HTF et le MCP.

4.2. Réduction de la base de Branche par la méthode de l'amalgame modal

Dans la méthode d'amalgame [5], les modes les plus influents sont gardés (ils sont appelés modes majeurs), et les modes restants (dits mineurs) leur sont ajoutés, pondérés par un facteur.

Il en résulte de nouveaux modes \tilde{V}_i , dit amalgamés, qui sont donc une combinaison linéaire de modes de la base de branche originale \mathbf{P} selon :

$$\tilde{V}_i = \sum_{p=0}^{N_i} \alpha_{i,p} V_{i,p}. \quad (17)$$

La détermination des facteurs $\alpha_{i,p}$ est effectuée en minimisant l'écart d'énergie entre un modèle de référence et le modèle réduit. La décomposition modale de la température s'écrit alors :

$$\tilde{T}(M, t) = \sum_{i=0}^{\tilde{N}} x_i(t) \tilde{V}_i(M). \quad (18)$$

La procédure d'amalgame nécessite des états (x_i) de référence. Ces états sont obtenus à partir d'une simulation du modèle détaillé représentative des différentes sollicitations.

4.3. Modèle réduit

La technique de l'amalgame permet d'obtenir les bases de Branche réduites $\tilde{\mathbf{P}}_f$ et $\tilde{\mathbf{P}}_m$. A partir du système d'équation (9), le modèle d'état réduit s'obtient en deux étapes :

1. D'abord, le champ de température est décomposé dans l'espace modal :
2. Puis chacune des équations est projetée sur sa base de Branche respective.

$$\begin{cases} {}^t\tilde{\mathbf{P}}_f \mathbf{C}_f \tilde{\mathbf{P}}_f \dot{X}_f = & {}^t\tilde{\mathbf{P}}_f \left[(\mathbf{K}_f + \mathbf{S}_f) \tilde{\mathbf{P}}_f X_f + \mathbf{G}_f \tilde{\mathbf{P}}_m X_m + \mathbf{B}_f U_f \right] \\ {}^t\tilde{\mathbf{P}}_m \mathbf{C}_m \tilde{\mathbf{P}}_m \dot{X}_m = & {}^t\tilde{\mathbf{P}}_m \left[(\mathbf{K}_m + \mathbf{H}_m) \tilde{\mathbf{P}}_m X_m + \mathbf{G}_m \tilde{\mathbf{P}}_f X_f + \mathbf{B}_m U_m + \mathbf{L}_m \dot{f} \right] \end{cases} \quad (19)$$

Par rapport au modèle détaillé (9), le modèle réduit (19) est d'ordre $\tilde{N} \ll N$ mais les matrices sont pleines. Notons par ailleurs qu'une des limites de ce modèle vient de l'équation (8). En effet, la nécessité de connaître la valeur de la fraction liquide dans tout le domaine impose de revenir dans l'espace physique à chaque itération temporelle, au prix d'une multiplication matrice vecteur. Cette opération dégrade automatiquement les performances du modèle réduit en terme de temps de calcul.

5. Validation du modèle détaillé

Afin de s'assurer que le modèle détaillé approche correctement la réalité, nous le confrontons aux résultats expérimentaux de Lacroix [6]. Dans cette expérimentation, l'auteur utilise une unité de stockage de dimension ($1 \times 0.0123 \times 0.00635$) en mètre où le MCP est du n-octadecane (voir tableau 1 pour les propriétés thermophysiques) et le HTF est de l'eau. La figure 5 com-

matériau	$\lambda_{s/l} (W.m^{-1}.K^{-1})$	$\rho (kg.m^{-3})$	$c_p (J.kg^{-1}.K^{-1})$	$T_{fus} (K)$	$l_f (kJ.kg^{-1})$
n-octadecane	0.358/0.148	771	2222	300.7	243.5

Tableau 1 Propriétés thermophysiques du MCP

pare l'évolution de la température du MCP aux points 1 ($z = 0.95 m, r = 0.001 m$) et 2 ($z = 0.51 m, r = 0.002 m$) entre le modèle détaillé et les résultats expérimentaux de Lacroix. Le maillage du modèle détaillé est de 51×21 noeuds dans les directions axiale et radiale respectivement, le pas de temps étant de 5 s. L'accord entre les deux modèles est très bon, que ce soit au niveau du régime permanent ou lors du changement de phase. Cette confrontation valide les choix effectués pour modéliser le problème.

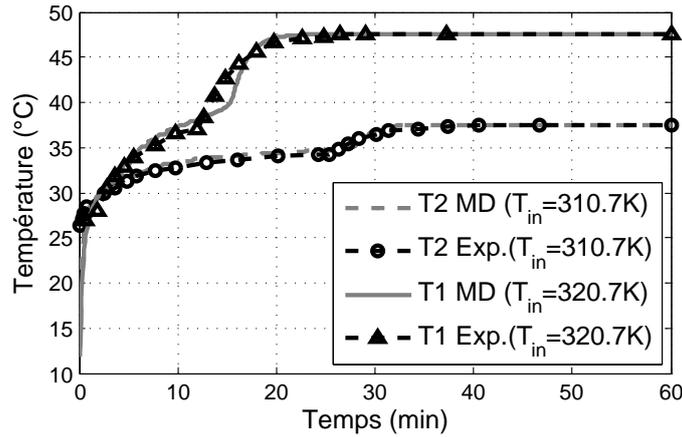


Figure 5 Évolution temporelle de la température : validation MD par rapport à [6].

6. Analyse des simulations avec le modèle réduit

6.1. Confrontation modèle réduit (MR) et modèle détaillé (MD)

Nous présentons dans cette partie les résultats en terme de précision et de temps de calcul pour des modèles réduits d'ordre différents. L'écart en tout point et à chaque instant entre le modèle réduit et détaillé est calculé selon :

$$\varepsilon(M, t) = \text{abs}(T_{MD}(M, t) - T_{MR}(M, t))$$

Une synthèse des résultats est donnée par le tableau 2. Les trois premières lignes de ce tableau indiquent la proportion des écarts observés dans trois gammes de température. Ainsi, on remarque que bien que l'écart maximum observé entre le modèle détaillé et le modèle réduit d'ordre (4+11) est de $2,76^\circ\text{C}$, $\varepsilon(M, t)$ est à 99,7% inférieur à $0,2^\circ\text{C}$, ce qui montre la très bonne concordance entre les deux modèles et l'efficacité en terme de précision du modèle réduit. Cette concordance est soulignée par l'écart moyen entre les deux modèles qui est de $0,014^\circ\text{C}$. Le gain en temps de calcul est lui aussi appréciable, puisque le temps de simulation du modèle réduit est 66 fois plus court que celui du modèle détaillé. Sans surprise, en augmentant l'ordre du modèle, les performances en terme de précision augmentent (avec 4+26 modes, l'écart moyen est de 5.10^{-3}°C), mais le gain en temps de calcul diminue. Notons tout de même que ce dernier est de 59 avec un modèle réduit d'ordre (4+26).

Ecart de température en °C	Nombre de modes dans $(\Omega_f + \Omega_m)$					
	4+11	4+21	4+26	4+51	4+101	4+201
≤ 0.2	99.7%	99.92%	99.97%	99.99%	100%	100%
$]0.2 - 0.5]$	0.28%	0.07%	0.02%	0.01%	0%	0%
> 0.5	0.02%	$<0.01\%$	$<0.01\%$	0%	0%	0%
Maximum	2.76	1.44	1.01	0.42	0.179	0.034
Moyen	0.014	7.10^{-3}	5.10^{-3}	2.10^{-3}	8.10^{-4}	2.10^{-4}
Gain de temps CPU	$\times 66$	$\times 60$	$\times 59$	$\times 41$	$\times 38$	$\times 24$

Tableau 2 Synthèse des résultats de comparaison entre MR et MD.

6.2. Impact sur le simulateur numérique

Comme nous l'avons souligné au début de cette communication, la finalité de ce travail est de pouvoir intégrer un modèle du composant stockage thermique avec MCP dans un simulateur

de comportement énergétique, développé dans l'environnement Simulink. Dans le tableau 3, nous présentons les résultats en terme de performance de temps de calcul entre MD et MR (d'ordre 30) dans l'environnement Simulink. Comme on pouvait s'y attendre l'implémentation

Durée de Simulation	Temps CPU en minutes			Gain de temps MR/MD
	Sans	Avec Unité de stockage		
		Modèle détaillé	Modèle réduit	
21 jours	0.52	26.3	1.75	×21
90 jours	2.24	108.16	5.17	×36
365 jours	9.11	453.66	21.47	×36

Tableau 3 Synthèse des résultats de simulation sous Simulink.

du modèle de l'unité de stockage thermique allonge la durée des simulations (d'un facteur 48 avec MD et 3 avec MR). Toutefois, le gain de temps dû au modèle réduit est ici appréciable car il permet par exemple une simulation 36 fois plus rapide. De plus, les données du tableau 3 montrent que pour une simulation de 365 jours, il faut environ 7 heures et demi pour une simulation avec le modèle détaillé, là où le temps d'attente avec le modèle réduit est seulement d'environ 20 minutes ; soit la différence entre *une petite journée de travail* et *une grosse pause café*.

7. Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté un modèle modal réduit d'un système de stockage à changement de phase. Afin d'être représentatif des différents phénomènes physiques, le modèle est complexe, avec notamment une variation au cours du temps des paramètres thermo-physiques (coefficient d'échange, conductivité thermique). Par ailleurs, le couplage entre le fluide caloporteur et le MCP impose une non homogénéité en température sur la condition aux limites. Le modèle modal proposé est construit sur des modes de branches amalgamés. La condition aux limites de Steklov permet à la base de branche d'être adaptée à ce genre de problème, et les phénomènes mentionnés ci-dessus ont pu être correctement pris en compte dans le modèle réduit. Une étude de sensibilité a montré qu'avec 4 modes dans le fluide et 26 modes dans le MCP, le modèle réduit donne des résultats sensiblement identiques au modèle détaillé. L'intégration de ce modèle réduit dans l'environnement Simulink diminue le temps de calcul d'un facteur 30 environ, ce qui ouvre la voie à des études paramétriques.

Références

- [1] Hamid El Qarnia, *Numerical analysis of a coupled solar collector latent heat storage unit using various phase change materials for heating the water*, Energy Conversion and Management 50 (2009), pages. 247-254.
- [2] O. Quéméner, A. Neveu, and E. Videcoq, *A Specific Reduction Method for Branch Modal Formulation : Application to Highly Non Linear Configuration*, Int. J. Thermal Sci. 46 (2006), pp. 890-907.
- [3] A. Neveu, K.E. Khoury, and B. Flament, *Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : Décomposition sur les modes de branches*, Int. J. Thermal Sci. 38 (1999), pp. 289-304.
- [4] F. Joly, O. Quéméner, and A. Neveu, *Modal Reduction of an Advection-Diffusion Model using a Branch Basis*, Num. Heat. Transfer B 53 (2008), pp. 466-485.
- [5] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu, *The generalized amalgam method for modal reduction*, Int. J. Heat and Mass Transfer 55, (2012), pp. 1197-1207.
- [6] M. Lacroix, *Numerical simulation of a shell-and-tube latent heat thermal energy storage unit*, Solar Energy, 50(1993), 357-367