

# Couplage de la convection naturelle laminaire et du rayonnement de gaz dans une cavité cubique différentiellement chauffée remplie d'un mélange air/vapeur d'eau. Effet de la dimension de la cavité.

Yann BILLAUD\*, Didier SAURY, Denis LEMONNIER

Institut Pprime, UPR CNRS 3346, CNRS, ISAE-ENSMA, Université de Poitiers, 1 avenue Clément Ader, BP 40109, F-86961 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France.

\*(Auteur Correspondant : yann.billaud@ensma.fr)

**Résumé** - Une étude numérique d'un écoulement de convection naturelle couplée au rayonnement de surface et de gaz, constitué, dans une cavité différentiellement chauffée remplie d'un mélange d'air et de vapeur d'eau est présentée. L'écoulement et les transferts thermiques sont prédits par la résolution couplée des équations de Navier-Stokes et de l'équation de transfert radiatif (ETR). Les équations de N-S sont résolues à l'aide d'un code 3D volumes finis tandis que l'ETR est résolue à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes (MOD) [1] pour un modèle compact de gaz réel (méthode SLW [2]).

Des simulations d'écoulement, correspondant à un nombre de Rayleigh égal à  $10^6$ , sont réalisées pour différentes configurations en termes de propriétés radiatives des parois et du gaz. Après validation sur des simulations de référence [3], l'effet de la dimension de la cavité est étudié sur les transferts convectif et radiatif. En accord avec des travaux précédents [4], cette étude tridimensionnelle montre que la présence d'un milieu participatif, de composition et de température représentatives de celles rencontrées dans l'habitat, a un effet important sur les champs de température et de vitesses. Le rayonnement modifie de façon importante la circulation globale du fluide ainsi que les transferts thermiques entre les parois isothermes. Les résultats obtenus montrent que la dimension de la cavité accentue ces effets. L'effet d'échelle sur les couches limites thermique et visqueuse, la stratification thermique et les effets tridimensionnels sont également discutés par comparaison avec des cas de référence en convection pure. Les résultats suggèrent que le rayonnement, souvent négligé en raison de la grande épaisseur optique, doit être pris en compte.

[1] W.A. Fiveland, «Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures», ASME J. Heat Transfer, vol. 106, pp. 699-706, 1984.

[2] M. K. Denison et B. W. Webb, «A spectral line based weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary RTE solvers», ASME J. Heat Transfer, vol 115, pp. 1004-12, 1993.

[3] L. Soucasse, P. Rivière et A. Soufiani, «Monte Carlo methods for radiative transfer in quasi-isothermal participating media», Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2012.

[4] I. Adel, D. Saury et D. Lemonnier, «Coupling of turbulent natural convection with radiation in an air-filled differentially-heated cavity at  $Ra = 1.5 \times 10^9$ », Computers & Fluids, vol. 88, pp. 115-25, 2013.

## Nomenclature

$a_j$	coefficient de pondération associé au j-ième gaz gris	$U_{ref}$	vitesse de référence, $m \cdot s^{-1}$
$C_{abs}$	section efficace d'absorption, $m^2 \cdot mol^{-1}$	$\mathbf{u}$	vecteur vitesse, $m \cdot s^{-1}$
$\mathbf{g}$	accélération de la pesanteur, $m \cdot s^{-2}$	$x^*; y^*; z^*$	coordonnées spatiales adimensionnées selon $L$
$G$	rayonnement incident, $W \cdot m^{-2}$	$x_{H_2O}$	fraction molaire de vapeur d'eau
$I$	intensité radiative, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$k_j$	coefficient d'absorption associé au j-ième gaz gris	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
$L$	largeur de la cavité, $m$	$\beta$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$N_g$	nombre de gaz gris	$\Delta T$	différence de température entre les parois chaude et froide, $K$
$Nu^{c,r}$	nombre de Nusselt convectif ou radiatif	$\varepsilon$	émissivité de paroi
$q_r^{inc}$	flux radiatif incident, $W \cdot m^{-2}$	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$
$Ra$	nombre de Rayleigh	$\rho$	masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
$T_{h,c,0}$	température paroi chaude, paroi froide ou moyenne, $K$	$\Omega$	angle solide, $sr$
$T^*$	température adimensionnée		

## 1. Introduction

Les écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffées ont fait l'objet de nombreuses études numériques en raison de la nature académique de cette configuration qui permet à la fois de traiter des problèmes en ingénierie et d'améliorer notre compréhension des phénomènes impliqués dans la transition vers l'instationnarité. Les premières simulations de ce type d'écoulement ont été réalisées en 2D pour des nombre de Rayleigh faibles [1] à modérés [2]. Les travaux suivants, toujours en 2D, ont permis d'étudier l'influence du milieu participatif en considérant le milieu gris [3], puis réel [4]. Il faut attendre la fin des années 90 pour voir apparaître les premiers résultats en configuration 3D, toujours en considérant dans un premier temps le milieu gris [5] puis réel [6].

L'inventaire non-exhaustif ci-dessus montre qu'aucune étude n'a été faite, à la connaissance des auteurs, concernant l'effet d'échelle lorsque la cavité est remplie d'un milieu participatif. L'objectif du présent travail est d'étudier l'influence de la dimension de la cavité, dans une configuration proche de l'habitat, sur la structure de l'écoulement, sur les transferts thermiques et sur la transition vers l'instationnarité. Le milieu considéré est un mélange air/ $H_2O$  dont le comportement radiatif est traité à l'aide du modèle SLW [7]. Des simulations sont réalisées pour différentes longueurs tout en conservant le nombre de Rayleigh égal à  $10^6$ . Les résultats sont comparés au cas transparent, indépendant de la dimension.

## 2. Modèle mathématique

Les équations de conservation de la masse (1), de la quantité de mouvement (2) et de l'énergie (3) sont résolues à l'aide de Code\_Saturne [8].

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta \mathbf{g}(T - T_0) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T - \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot \mathbf{q}_r \quad (3)$$

L'écoulement est supposé laminaire et stationnaire. Les propriétés physiques, évaluées à  $T_0$  pour de l'air pur, sont considérées constantes à l'exception de la densité pour la force de flottabilité, laquelle est prise en compte selon l'hypothèse de Bousinesq  $\beta \mathbf{g}(T - T_0)$ . Dans le cas d'un gaz parfait le coefficient d'expansion thermique vaut  $\beta = 1/T_0$ . Le terme source radiatif  $-\nabla \cdot \mathbf{q}_r$  dans l'équation (3) est obtenue à partir de  $\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \int_{\lambda} \kappa_{\lambda} [G_{\lambda} - 4\pi I_{b\lambda}] d\lambda$  où  $G_{\lambda} = \int_{4\pi} I_{\lambda} d\Omega$  est l'intégrale sur toutes les directions du rayonnement incident lequel nécessite la résolution de l'équation de transfert radiatif (ETR) en théorie pour chaque longueur d'onde  $\lambda$ .

$$\mu \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial x} + \eta \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial y} + \xi \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial z} = -\kappa_{\lambda} I_{\lambda} + \kappa_{\lambda} I_{b\lambda} \quad (4)$$

$\kappa_{\lambda}$  est le coefficient d'absorption monochromatique local qui varie avec la température. Dans ce travail la fraction molaire de  $H_2O$  est supposée homogène.

L'utilisation d'un modèle de propriétés radiative de gaz de type SLW permet de réduire considérablement le nombre d'ETR à résoudre en considérant le gaz réel comme une somme de  $N_g$  gaz gris (plus un gaz transparent d'indice  $j = 0$ ). Ainsi, le coefficient d'absorption du  $j$ -ième gaz gris vaut  $\kappa_j = \frac{XP}{RT} \times C_{abs,j}$  où la section efficace d'absorption  $C_{abs,j}$  est obtenue comme la moyenne logarithmique des sections efficace d'absorption successives  $C_{abs,j} = \sqrt{\tilde{C}_{abs,j-1} \tilde{C}_{abs,j}}$ . Finalement l'émissivité totale d'une couche de gaz d'épaisseur  $L$  à la température  $T$  vaut  $\varepsilon(T) = \sum_{j=0}^{N_g} a_j(T) [1 - \exp(-\kappa_j L)]$  où les coefficients de pondération  $a_j$  sont calculés comme la différence entre deux valeurs adjacentes de la fonction de distribution  $a_j = F(\tilde{C}_{abs,j}) - F(\tilde{C}_{abs,j-1})$ . La fonction  $F(C_{abs,j}, \bar{\xi})$ , obtenue par intégration numérique, représente la fraction de la fonction de Planck pour laquelle  $C_{abs,\lambda}(\bar{\xi}) < C_{abs}$ . Finalement, l'équation (4) revient à

$$\mu \frac{\partial I_j}{\partial x} + \eta \frac{\partial I_j}{\partial y} + \xi \frac{\partial I_j}{\partial z} = -\kappa_j I_j + a_j \kappa_j \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (5)$$

où  $\mu, \eta, \xi$  sont les cosinus directeur de la direction d'émission  $\mathbf{s}$ . L'intensité radiative totale  $I$  peut être calculée en sommant les intensités correspondant à chacun des gaz gris considérés  $I = \sum_{j=1}^{N_g} I_j$ .

### 3. Méthode numérique

L'ETR est résolue suivant  $M$  directions selon la méthode des ordonnées discrètes (MOD) [9]. Dans cette approche, l'intégrale selon l'ensemble des directions  $\Omega[0,4\pi]$  dans le calcul du rayonnement incident  $G$  est remplacée par une somme pondérée de chacune des  $m \in [1, M]$  directions considérées. Cette méthode, couplée avec l'approche SLW, permet de calculer le terme source radiatif

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \sum_{j=0}^{N_g} \kappa_j \left[ \sum_{m=1}^M w_m I_{j,m} - 4a_j \sigma T^4 \right] \quad (6)$$

où  $w_m$  est le poids associé à la  $m$ -ième direction. La quadrature utilisée étant de type  $S_N$ , le nombre de direction est égal à  $M = N(N + 2)$ . Selon le même principe, le flux radiatif pariétal se calcule comme

$$q_r^{inc} = \sum_{j=0}^{N_g} \kappa_j \left[ \sum_{\substack{m=1 \\ n.s_m < 0}}^M w_m s_m I_{j,m} \right] \quad (7)$$

L'intensité émise par les parois  $I^w$  est alors obtenue par.

$$I^w = \varepsilon_w \frac{\sigma T_w^4}{\pi} + \frac{1 - \varepsilon_w}{\pi} q_r^{inc} \quad (8)$$

Pour résoudre les équations de quantité de mouvement, un schéma du 2<sup>nd</sup> ordre décentré avant est utilisé et un schéma du 2<sup>nd</sup> ordre centré est utilisé pour résoudre l'équation d'énergie. La discrétisation temporelle est assurée par un schéma d'Euler implicite d'ordre 1. Le couplage entre la pression et la vitesse est assuré par un algorithme de type SIMPLEC. Code\_Saturne a été modifié pour prendre en compte les spécificités de notre configuration, *i.e.* la prise en compte de la flottabilité et des transferts radiatifs.

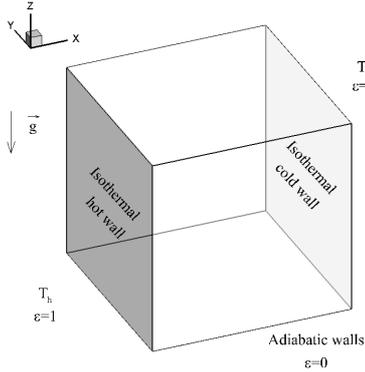


Fig. 1 : Cavity cubique différentiellement chauffée et conditions aux limites.

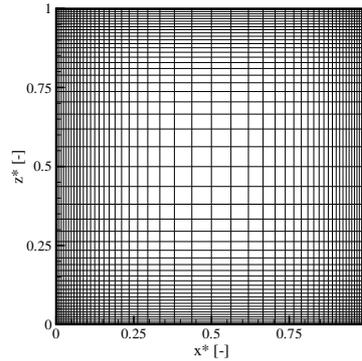


Fig. 2 : Maillage en cosinus hyperbolique dans le plan y.

La procédure de calcul qui assure le couplage entre l'écoulement et les transferts thermiques est résumée ci-dessous :

- 1) Initialisation des champs de vitesse, température et intensité radiative ;
- 2) Résolution de l'ETR pour le champ de température donné et pour chaque gaz gris (5);
- 3) Calcul du champ de terme source (6) et des flux pariétaux (7) ;
- 4) Calcul des champs de vitesse et de température par résolution du système d'équations couplées (1)-(3) ;
- 5) Calcul du résidu  $R = \max \frac{|\phi_B^n - \phi_B^{n-1}|}{\phi_{ref}}$  où  $\phi$  fait référence aux quantités  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ou  $T$  tandis que  $\phi_{ref}$  se rapporte à  $U_{ref} = \alpha \sqrt{Ra} / L_z$  ou  $T_0 = (T_c + T_h) / 2$ .
- 6) Si  $R \geq 10^{-4}$  on recommence à l'étape 2), sinon on considère que l'état stationnaire est atteint.

## 4. Validation

Non montré ici, la précision des résultats numériques a été vérifiée en menant une analyse de sensibilité sur plusieurs paramètres numériques :

- i) L'ordre de la quadrature  $S_N$  pour résoudre l'ETR selon la DOM. La comparaison avec des résultats de référence [6] a montré que la quadrature  $S_8$ , soit  $M = 80$  directions était, pour notre configuration, le meilleur compromis précision/temps de calcul ;
- ii) Le nombre de gaz gris nécessaires pour modéliser le comportement du gaz réel à l'aide du modèle SLW. La comparaison avec des résultats de référence [10] a montré que  $N_g = 8$  gaz gris s'avère, dans cette configuration et pour cette composition, être le meilleur compromis ;
- iii) La distribution des points du maillage et le nombre de cellules. Plusieurs essais ont permis d'identifier la distribution de points selon les 3 directions dont la densité suit la loi  $d = \cosh(6t - 3)$  avec  $t \in [0; 1]$ . La convergence en maillage a montré que les résultats ne varient quasiment plus au-delà de  $91^3$  points. Ce maillage, commun aux calculs fluide et radiatif est utilisé par la suite (Fig. 2).

Pour finir cette étape de validation, la procédure de couplage est éprouvée par comparaison avec [6] dans une configuration proche de la présente étude. Il s'agit d'une cavité cubique différentiellement chauffée de  $L = 1m$  remplie d'un mélange air/ $H_2O$  de fraction molaire  $x_{H_2O} = 0.02$ . Une différence de température  $\Delta T = 0.011 K$ , centrée autour de la température moyenne  $T_0 = 300 K$ , est imposée entre les parois isothermes dans le but d'imposer un écoulement correspondant à  $Ra = g\beta\Delta TL^3/\nu\alpha = 10^6$ . Le milieu est à la pression atmosphérique et les parois adiabatiques sont réfléchissantes diffuses, *i.e.*  $\varepsilon_w = 0$ . Le cas A correspond à un problème purement convectif dans la mesure où le milieu est totalement transparent. Le cas B prend en compte la capacité du milieu à absorber et à émettre le rayonnement infra-rouge. La comparaison entre les résultats de référence (Ref.) et ceux obtenus dans le cadre de la présente étude (P.E.) montre un excellent accord, que ce soit en termes de profils de vitesse verticale (Fig. 3) ou de température (Fig. 4).

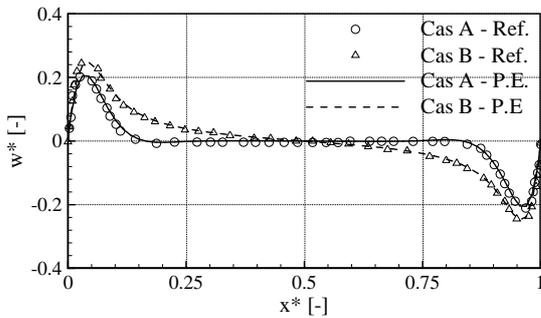


Fig. 3 : Profils de vitesse verticale ( $x^*, \bar{y}^*, 0.5$ ) à  $Ra = 10^6$ .

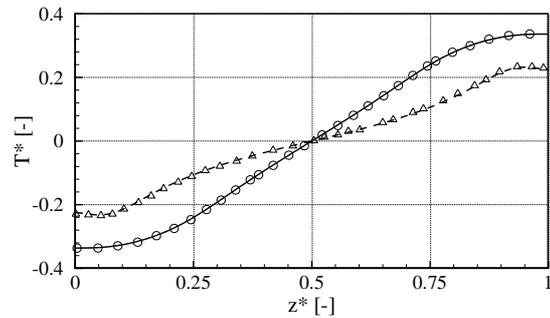


Fig. 4 : Profils de température ( $x^*, \bar{y}^*, 0.5$ ) à  $Ra = 10^6$ .

Cette phase de validation est complétée par une comparaison avec des résultats relatifs aux transferts thermiques. Le Nusselt convectif,  $Nu^c = \frac{L}{\Delta T} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x^*=0,1} dy^* dz^*$ , est très bien prédit dans la mesure où l'erreur commise est de l'ordre de 2% dans le cas B. La comparaison en terme de Nusselt radiatif,  $Nu^r = \frac{L}{\lambda \Delta T} \int_0^1 \int_0^1 |q_r^{net}|_{x^*=0,1} dy^* dz^*$  avec  $q_r^{net} = \sigma T_w^4 - q_r^{inc}$ , est très satisfaisante (<1%). La stratification,  $S = L/\Delta T L_y \int_{y^*=0}^1 \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{x^*=z=0,5} dy^*$ , est également très bien prédite, de même que la température de la paroi supérieure de la cavité  $\theta_{top}$ . La comparaison des temps de calcul  $t_{CPU}$  nécessaires pour atteindre l'état stationnaire dans l'étude

de référence (IBM-Power6 cadencés à 4,7 GHz) et dans la présente étude (AMD-290 cadencé à 2.8 GHz) ramenés à un unique processeur ( $t_{CPU} \times N_{proc}$ ) montre un gain de 62.5% dans le cas A et 99.8% dans le cas B.

	A			B		
	Ref. [6]	P.E.	écart rel.	Ref. [6]	P.E.	écart rel.
$Nu^c$	8,64	8,65	<1%	7,55	7,42	2%
$Nu^r$	-	125,6	-	120,6	121,3	<1%
$S$	0,91	0,92	<1%	0,36	0,35	2%
$\theta_{top}$	0,323	0,324	<1%	0,207	0,206	<1%
$N_{proc}$	4	1		94	1	
$t_{CPU}$	20h	30h		170h	25h	

Tableau 1 : Nombre de Nusselt convectif et radiatif, paramètre de stratification et température moyenne de la paroi supérieure pour  $Ra = 10^6$ . Nombre de processeurs et temps de calcul.

Le modèle ainsi paramétré et validé, est utilisé pour étudier l'influence de la dimension de la cavité sur l'écoulement et les transferts thermiques entre les parois isothermes de la cavité.

## 5. Résultats

Des simulations à  $Ra = 10^6$  et pour des propriétés thermophysiques de l'air représentatives de l'habitat ( $T_0 = 293,15K$ ,  $\rho = 1,205 kg.m^{-3}$ ,  $\mu = 1,82329 \times 10^{-5} Pa.s$ ,  $Cp = 1005 J.kg^{-1}.K^{-1}$  et  $k = 0,0257 W.m^{-1}.K^{-1}$ ) sont réalisées. L'humidité relative de l'air est fixée à 50% ce qui conduit à une fraction molaire de vapeur d'eau de  $x_{H_2O} = 0,0115$ .

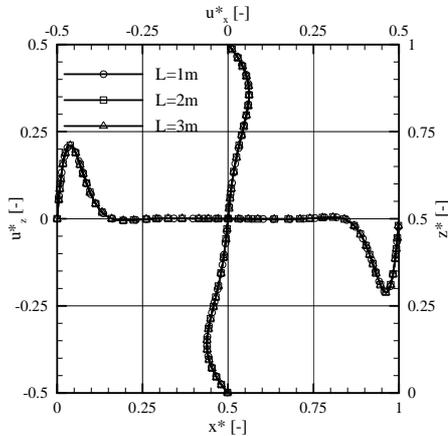


Fig. 5 : Profils de vitesse verticale ( $x^*$ ;  $\bar{y}^*$ ; 0,5) et horizontale (0,5; 0,5;  $z^*$ ) à  $Ra = 10^6$  dans le cas A.

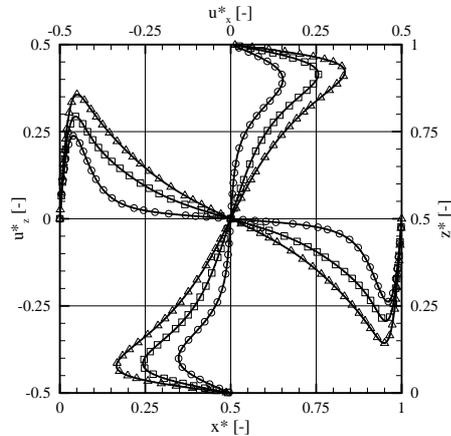


Fig. 6 : Profils de vitesse verticale ( $x^*$ ;  $\bar{y}^*$ ; 0,5) et horizontale (0,5; 0,5;  $z^*$ ) à  $Ra = 10^6$  dans le cas B.

La Fig. 5 montrent les profils de vitesse verticale et horizontale respectivement à  $z^* = 0,5$  et  $x^* = 0,5$  dans le plan médian ( $y^* = 0,5$ ) dans le cas où le milieu est transparent (cas A). Dans ce cas le changement d'échelle ne modifie pas l'écoulement. Lorsque le milieu est participatif (Fig. 6), l'augmentation de la dimension de la cavité se traduit par une augmentation significative de l'écoulement caractérisée par une augmentation des vitesses verticale et horizontale, un épaississement des couches limites dynamiques et une mise en mouvement progressive du fluide au centre de la cavité. On passe ainsi graduellement d'un régime de couche limite à un régime de cœur tournant.

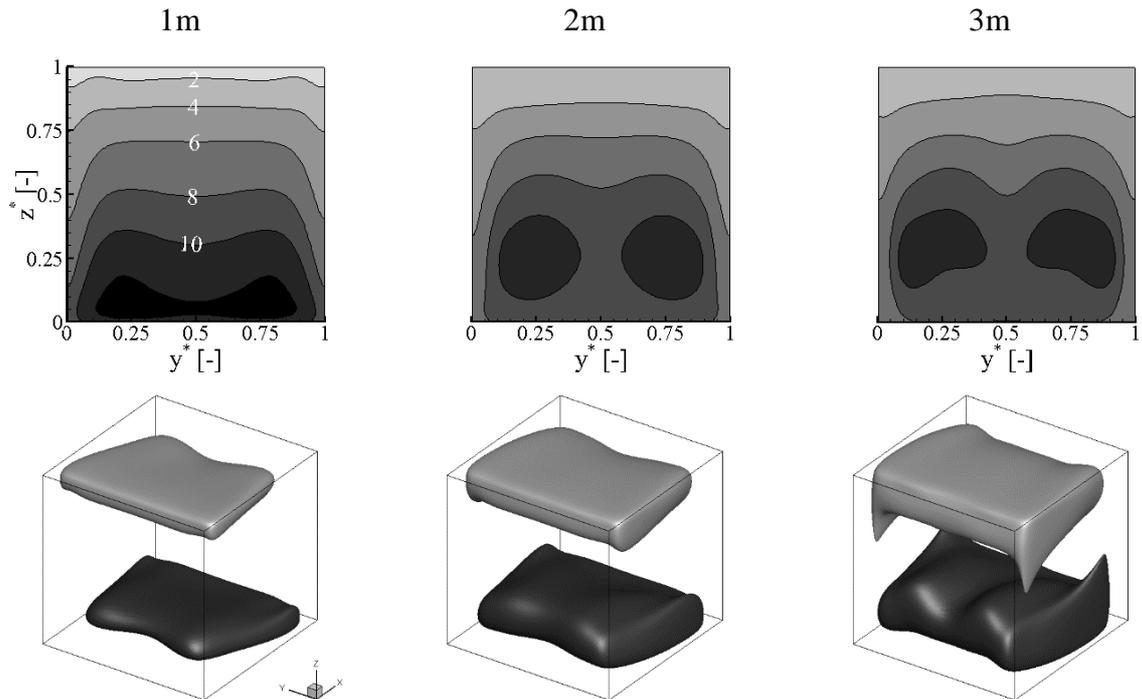


Fig. 7 : En haut, cartographie des Nusselt convectif sur la paroi chaude ( $x^* = 0$ ). En bas, iso-surfaces des vitesses horizontales  $u^* = -0,1$  (foncé) et  $u^* = 0,1$  (clair) pour différentes dimensions de cavité remplie d'un mélange air/ $H_2O$  et  $Ra = 10^6$ .

L'écoulement étant affecté, les transferts thermiques le sont également et notamment le transfert convectif. Comme on peut le voir sur la Fig. 7 la modification de la structure du jet horizontal situé au niveau de la paroi inférieure entraîne une modification significative de la cartographie du Nusselt convectif sur la paroi chaude ( $x^* = 0$ ). Pour  $L=1m$ , le jet est relativement plat et proche de la paroi. L'impact sur la paroi chaude a lieu en partie basse et quasiment sur toute sa largeur. Au fur et à mesure que  $L$  augmente, le jet s'épaissit, se décroche de la paroi et se divise en deux selon la largeur suggérant une augmentation croissante des effets 3D.

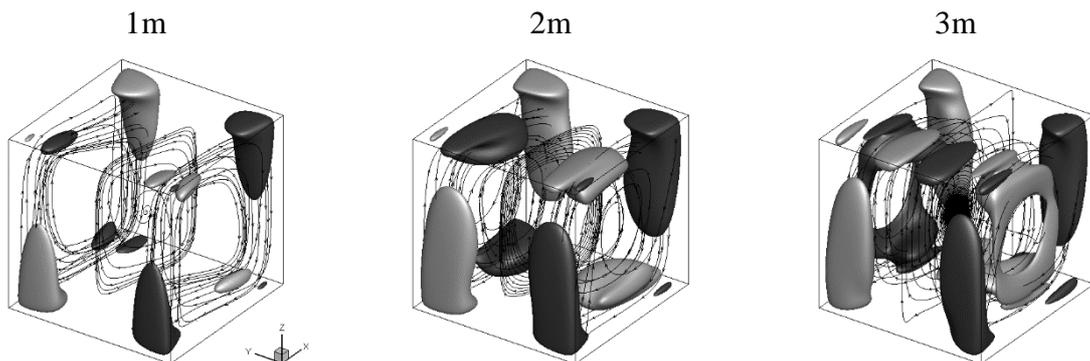


Fig. 8 : Iso-surfaces des vitesses latérales  $v^* = -0,02$  (foncé) et  $v^* = 0,02$  (clair) pour différentes dimensions de cavité remplie d'un mélange air/ $H_2O$  et pour  $Ra = 10^6$ .

Ces effets 3D sont illustrés par la Fig. 8. Lorsque  $L = 1m$ , les iso-surfaces correspondant à  $|v^*| = 0,02$ , situées principalement dans les coins supérieures de la paroi froide et inférieures de la paroi chaude, sont relativement peu importantes. Les lignes de courant étant assez peu déviées de leurs trajectoires, l'écoulement est relativement 2D. Au fur et à mesure que la dimension de la cavité augmente, ces iso-surfaces se développent, l'écoulement transverse s'intensifie, les trajectoires sont de plus en plus déviées. Lorsque  $L = 3m$  l'écoulement au

centre de la cavité est maximum et des iso-surfaces de la vitesse latérale apparaissent au niveau des parois adiabatiques latérales et horizontales. A en juger par les lignes de courant, la structure de l'écoulement est bien plus complexe qu'auparavant.

## 6. Conclusion

Le travail présenté traite du couplage de l'écoulement de convection naturelle laminaire et du rayonnement en cavité cubique différentiellement chauffée. Les résultats de simulations à  $Ra = 10^6$  pour un milieu constitué d'un mélange air-vapeur d'eau dans des conditions représentatives de l'habitat ont montré l'influence de la dimension de la cavité sur l'écoulement et sur le transfert convectif entre les parois isothermes. Le rayonnement, bien que souvent négligé dans ce type de problème, a un effet d'autant plus important que le milieu est grand. Il apparaît donc que ce type d'écoulement couplé peut difficilement être traité de manière adimensionnée dans la mesure où le rayonnement est fortement dépendant de l'échelle.

## Références

- [1] G. De Vahl Davis et I. P. Jones, «Natural convection in a square cavity: A comparison exercise,» *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, pp. 227-48, 1983.
- [2] P. Le Quéré, «Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number,» *Computers & Fluids*, vol. 20, pp. 29-41, 1991.
- [3] A. Yücel, S. Acharya et M. Williams, «Natural Convection and Radiation in a Square Enclosure,» *Num. Heat Transfer, Part A*, vol. 15, pp. 261-78, 1989.
- [4] I. Adel, D. Saury et D. Lemonnier, «Coupling of turbulent natural convection with radiation in an air-filled differentially-heated cavity at  $Ra = 1.5 \times 10^9$ ,» *Computers & Fluids*, vol. 88, pp. 115-25, 2013.
- [5] G. Colomer, C. Costa, R. Consul et A. Oliva, «Three-dimensional numerical simulation of convection,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 257-69, 2004.
- [6] L. Soucasse, P. Rivière, S. Xin, P. Le Quéré et A. Soufiani, «Numerical Study Of Coupled Molecular Gas Radiation And Natural. Convection In A Differentially Heated Cubical Cavity.,» *Computational Thermal Sciences*, vol. 4, pp. 335-50, 2012.
- [7] M. K. Denison et B. W. Webb, «A spectral line based weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary RTE solvers,» *ASME J. Heat Transfer*, vol. 115, pp. 1004-12, 1993.
- [8] The EDF group, «Code\_Saturne : a Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows - Industrial Applications,» *International Journal on Finite Volumes*, vol. 1, 2004.
- [9] W. A. Fiveland, «Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures,» *ASME J. Heat Transfer*, vol. 106, pp. 699-706, 1984.
- [10] F. Liu, «Numerical solutions of three-dimensional non-grey gas radiative transfer using the statistical narrow-band model 1999,» *J. Heat Transfer*, vol. 121, pp. 200-3, 1999.