

# Paramétrisation des variables de contrôle et méthodes de recherche linéaire dans un code d'inversion de l'approximation de diffusion basé sur le L-BFGS

Fabien DUBOT<sup>1,2,\*</sup>, Yann FAVENNEC<sup>2</sup>, Benoit ROUSSEAU<sup>2</sup>, Daniel R. ROUSSE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Chaire de recherche industrielle en technologies de l'énergie et en efficacité énergétique (t3e)  
École de technologie supérieure - 1100, rue Notre-Dame Ouest - Montréal (Qc) Canada, H3C1K3

<sup>2</sup>PRES LUNAM, CNRS, UMR 6607 LTN

Site de la Chantrerie, rue Christian Pauc, 44306, Nantes, Cedex 3, France

\*(auteur correspondant : fabien.dubot@univ-nantes.fr)

**Résumé** - La tomographie optique diffuse est une méthode inverse consistant à reconstruire les distributions spatiales des propriétés radiatives d'un milieu participant à partir de mesures simulées d'intensités lumineuses en frontière avec, pour modèle direct, l'équation de l'approximation de diffusion. Ce problème inverse est résolu par la minimisation d'une fonction de coût effectuée par l'algorithme du L-BFGS. Quatre types de paramétrisation éléments finis sont envisagés pour les cartes d'absorption et de diffusion. De plus, trois méthodes de recherche linéaire sont considérées dans l'optimiseur : les méthodes de la section d'or, de l'interpolation quadratique et une méthode de "recherche inexacte". Des résultats numériques bidimensionnels viennent illustrer cette étude.

## Nomenclature

$S$	densité de photon des sources, $\text{W.m}^{-2}$	$\kappa$	coefficient d'absorption, $\text{m}^{-1}$
$\mathcal{D}$	domaine d'étude	$\sigma$	coefficient de diffusion réduit, $\text{m}^{-1}$
$\partial\mathcal{D}$	frontière du domaine d'étude	$\nu$	fréquence de modulation, Hz
$\mathbf{n}$	normale unitaire sortante	$\varphi$	densité de photon, $\text{W.m}^{-2}$
$\mathbf{x}$	variable d'espace	<i>Indices et exposants</i>	
$c$	célérité de la lumière, $\text{m.s}^{-1}$	$s$	source
<i>Symboles grecs</i>		$d$	détecteur

## 1. Introduction

La modélisation des transferts radiatifs dans un milieu semi-transparent nécessite, entre autres, une connaissance fine des propriétés physiques de ce milieu. Parmi ces données, une attention toute particulière doit être portée à l'estimation des fonctions d'absorption et de diffusion. En effet, ces deux coefficients (souvent fonctions de l'espace) sont directement impliqués dans les équations qui décrivent la physique des transferts : leur connaissance précise constitue donc l'un des ingrédients pour une simulation précise de la physique considérée. Ces propriétés radiatives peuvent être estimées de façon dite directe par une connaissance précise de la géométrie et de la morphologie à échelle micro-métrique (par exemple via la  $\mu$ -tomographie X) et la composition du ou des matériaux constituants [1]. Lorsque certaines de ces données sont manquantes, ou du moins imprécises, il convient d'utiliser des approches alternatives ; l'inversion de données en fait partie. Dans l'étude présentée ici, l'inversion de mesure consiste à "trouver" un jeu de fonctions d'absorption  $\kappa(\mathbf{x})$  et de diffusion réduit  $\sigma(\mathbf{x})$  tel que les prédictions issues de l'intégration des équations aux dérivées partielles soient aussi proches que possible des mesures associées. La minimisation de cet écart (qui est en fait une erreur) constitue le problème

d'optimisation. Comme la dimension des paramètres recherchés peut être relativement grande, les algorithmes utilisés reposent nécessairement sur les méthodes de gradient. Parmi elles, les méthodes du BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) et les versions associées à mémoire limitée (L-BFGS) ont déjà fait leur preuve en tomographie optique [2, 3]. Un nombre impressionnant de versions et sous-versions de ces algorithmes est présenté dans la littérature. Par exemple, certaines recherches linéaires peuvent être très efficaces pour un type de problème d'optimisation donné mais peuvent être inadaptées ou peu efficaces ou moins bons qu'un autre pour le problème spécifique de reconstructions de cartes de  $\kappa(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})$ . C'est la raison pour laquelle différents outils de recherche linéaire ont été comparés dans le cadre spécifique de cette étude. Dans le même esprit, différents types de paramétrisation de Lagrange ont été comparés, autant d'un point de vue temps de calcul que de la qualité des résultats. Le modèle adopté pour cette étude est celui approché dit de l'approximation diffuse en bidimensionnel.

## 2. Formulation du problème inverse

Le problème inverse de tomographie optique consiste à retrouver les évolutions spatiales des propriétés radiatives constitutives d'un matériau semi-transparent. Dans le cadre de cet article, le modèle de propagation de la lumière est basé sur l'approximation de diffusion (AD). Ce modèle approché décrit de façon satisfaisante le modèle plus complexe – mais bien plus difficile à résoudre – basé sur l'Équation de Transfert Radiatif (ÉTR), lorsque le matériau considéré est absorbant fortement diffusant, c'est-à-dire lorsque  $0 \ll \kappa \ll \sigma$ , et lorsque la taille du domaine est beaucoup plus grande que la longueur de transport. L'étude détaillée faisant référence sur le passage de l'ÉTR à l'AD a été faite relativement récemment par Arridge [4]. D'autre part, le régime fréquentiel est considéré pour cette étude : d'un côté le régime stationnaire est facile à résoudre mais donne trop peu d'information pour l'inversion et, à l'opposé, le régime temporel donne beaucoup d'information mais est trop coûteux en temps de calcul ; le domaine fréquentiel constitue donc une approche intermédiaire pour laquelle les modèles mathématiques sont faciles à résoudre et les données sont considérées comme suffisantes pour la résolution du problème inverse [4].

Dans le contexte de cette étude, les paramètres suivants sont supposés connus : la géométrie bidimensionnelle  $\mathcal{D}$ , la fréquence de modulation  $\nu$ , les intensités des sources lumineuses  $S$  sur les emplacements  $\partial\mathcal{D}_s$  ainsi que divers paramètres usuels tels que  $\gamma$  et  $A$  impliqués dans les équations suivantes et qui se trouvent aisément dans la littérature.

Le problème dit *direct* se lit de la sorte : « *Connaissant les propriétés d'absorption  $\kappa$  et de diffusion  $\sigma$  spatio-dépendantes dans  $\mathcal{D}$ , déterminer l'intensité lumineuse au niveau des détecteurs  $\partial\mathcal{D}_d$  par la recherche de  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$  satisfaisant :*

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [(2(\kappa + \sigma))^{-1} \nabla \varphi] + \left[ \kappa + \frac{2\pi i \nu}{c} \right] \varphi &= 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \\ \varphi + \frac{A}{2\gamma} (2(\kappa + \sigma))^{-1} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= \frac{S}{\gamma} \mathbb{1}_{[\zeta \in \partial\mathcal{D}_s]} \quad \forall \zeta \in \partial\mathcal{D} \gg \end{aligned} \quad (1)$$

À l'opposé, le problème inverse de tomographie optique se lit ... « *Connaissant l'intensité lumineuse  $\check{\varphi}$  au niveau des détecteurs  $\partial\mathcal{D}_d$ , déterminer "au mieux" les évolutions spatiales des propriétés radiatives  $\kappa$  et  $\sigma$*  ». Bien sûr, la résolution du problème inverse est intimement liée à celle du problème direct basé sur (1). De plus, contrairement au problème direct, ce type de problème inverse est réputé difficile car mal posé au sens de Hadamard [7]. Différentes stratégies de régularisation sont donc potentiellement utilisées : utilisation de terme pénalisant

de type Tikhonov, réduction de l'espace de contrôle et utilisation des gradients de Sobolev, suivant [2]. Notons que seules les deux dernières techniques de régularisations énoncées seront employées dans cet article. Dans la suite, on suppose que l'on cherche  $\kappa \in \Lambda$  et  $\sigma \in \Lambda$ , avec  $\Lambda \subset L_2(\partial\mathcal{D})$ . La fonction de coût  $j : \Lambda^2 \mapsto ]0, \infty[$  est définie par :

$$j(\kappa, \sigma) := \mathcal{J}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{\partial\mathcal{D}_d} \left( \frac{\varphi - \check{\varphi}}{|\check{\varphi}|} \right)^2 (k) \, d\mathbf{x} \quad (2)$$

où l'indice  $k$  désigne la source utilisée et, par extension,  $(\cdot)(k)$  désigne l'évaluation de  $(\cdot)$  relatif au test  $k$ . Le jeu de propriétés  $(\kappa, \sigma)$  est supposé retrouvé lorsque

$$j(\kappa, \sigma) \approx \varepsilon^2 \quad (3)$$

où  $\varepsilon^2$  est la variance de l'erreur de mesure intégrée et sommée. Dans la pratique, la condition (3) n'est jamais atteinte pour les difficiles problèmes de tomographie ; le problème s'écrit plutôt :

$$\min_{(\kappa, \sigma) \in \Lambda^2} j(\kappa, \sigma) \quad (4)$$

### 3. Optimiseur

La résolution du problème inverse est effectuée par la minimisation de la fonction de coût par l'algorithme d'optimisation du L-BFGS [5]. Comme il a été montré dans [3], cet optimiseur, associé à une méthode de recherche linéaire inexacte, est particulièrement efficace pour la résolution du problème de tomographie optique. Notamment, contrairement aux algorithmes d'inversion basés sur l'inversion de matrices tel l'algorithme de Gauss-Newton, l'algorithme du L-BFGS ne nécessite pas l'utilisation de méthodes de régularisation de type pénalisation de Tikhonov dont la détermination du paramètre de régularisation peut-être difficile à évaluer. Le principe des méthodes à direction de descente, l'algorithme du BFGS et sa routine de mise à jour de la direction suivant [6], sont brièvement rappelés ci-dessous. Puis, quelques méthodes de recherche linéaire qui seront testées numériquement par la suite sont exposées.

#### 3.1. L-BFGS

De manière générale les algorithmes d'optimisation à direction de descente nécessitent, d'une part, le calcul d'une direction de descente à chaque itération et, d'autre part, la détermination d'un pas de descente. Par définition,  $d \in \Lambda^2$  est une direction de descente de  $j$  en  $(\kappa, \sigma) \in \Lambda^2$  si

$$j'(\kappa, \sigma) \cdot d < 0$$

Ainsi, en appliquant la définition de la dérivée, il vient que si  $d$  est une direction de descente :

$$j((\kappa, \sigma) + \alpha d) < j(\kappa, \sigma) \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \text{ suffisamment petit.} \quad (5)$$

On observe alors que  $j$  décroît strictement dans la direction  $d$  et que la taille du déplacement le long de  $d$  est donnée par  $\alpha d$ . La direction de descente à l'itération  $m$  est définie par :

$$d_m = -H_m^{-1} g_m \quad (6)$$

où  $g_m$  est le gradient de la fonctionnelle à minimiser et  $H_m$  est une matrice définie positive. Par défaut (et dans cette étude) la matrice  $H_m^{-1}$  est initialisée à la matrice identité  $I_d$ . Sa formule de mise à jour est quant à elle donnée par :

$$H_{m+1}^{-1} = H_m^{-1} + \frac{s_m s_m^\top}{y_m^\top s_m} \left[ \frac{y_m^\top H_m^{-1} y_m}{y_m^\top s_m} + I_d \right] - \frac{1}{y_m^\top s_m} [s_m y_m^\top H_m^{-1} + H_m^{-1} y_m s_m^\top] \quad (7)$$

où  $s_m = (\kappa_{m+1}, \sigma_{m+1}) - (\kappa_m, \sigma_m)$  et  $y_m = g_{m+1} - g_m$ . Suivant [6], la matrice  $H_m^{-1}$  n'est jamais calculée explicitement dans l'algorithme dans un souci d'efficacité. Seuls les vecteurs  $s_m$  et  $y_m$  sont stockés au fur et à mesure des itérations et permettent à eux seuls la mise à jour de la direction (éq. (6)).

Notons qu'au début de l'optimisation l'algorithme du BFGS se comporte comme celui de la plus grande pente ( $H_0^{-1} = I_d$ ). En revanche, au fur et à mesure des itérations et grâce à la formule de mise à jour (éq. (6)), l'algorithme du BFGS est conçu pour tendre vers celui de Newton ( $H_m^{-1} \approx [\nabla^2 j]^{-1}$ ).

### 3.2. Méthodes de recherche linéaire

Les méthodes de recherche linéaire, qui ont pour but la détermination du pas de descente  $\alpha$  (éq. (5)), consistent en la résolution du problème de minimisation unidimensionnel suivant :

$$\alpha^* \approx \arg \min_{\alpha > 0} f(\alpha) \quad (8)$$

où  $f(\alpha) = j((\kappa, \sigma) + \alpha d)$ . Ces méthodes tentent de répondre à un double objectif : d'une part, le pas doit faire décroître  $j$  suffisamment et, d'autre part, il ne doit pas être trop petit sous peine de convergence des itérés vers un point non stationnaire. Or ces deux objectifs sont souvent contradictoires car l'éq. (5) est généralement satisfaite pour des  $\alpha > 0$  arbitrairement petit.

Trois méthodes de recherche linéaire sont expérimentées dans l'optimiseur : (i) la méthode de la section d'or, (ii) la méthode de l'interpolation quadratique et (iii) une méthode de recherche inexacte due à Fletcher [11].

#### 3.2.1. Méthodes de réduction d'intervalle

Les méthodes de la section d'or et de l'interpolation quadratique sont toutes les deux des méthodes de réduction d'intervalle. Supposant  $\alpha^* \in [\alpha_L, \alpha_U]$ , leur principe repose sur une réduction répétée de cet intervalle initial, à l'aide d'évaluations de la fonction de coût en différents points prédéterminés par la méthode choisie et les bornes de cet intervalle et ce, jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle soit plus petite qu'une taille prédéfinie.

Pour la méthode de la section d'or, le rapport des longueurs entre deux intervalles successifs est donné par le nombre d'or,  $\Xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Pour la méthode de l'interpolation quadratique, une approximation d'ordre deux de la fonction  $f$  est considérée. Il s'en suit que le point P minimisant cette fonction quadratique peut-être calculé analytiquement dans l'intervalle initial. L'intervalle suivant est alors déterminé judicieusement à l'aide des évaluations de la fonction  $f$  aux bornes de l'intervalle et au point P.

L'implémentation de ces deux méthodes a été réalisée à partir des algorithmes 4.2 et 4.3 donnés dans [10]. L'intervalle initial retenu pour les illustrations numériques est  $[0, 2]$  tandis que la recherche linéaire s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle devient plus petite que 0.1.

#### 3.2.2. Méthodes inexactes

La philosophie des méthodes de recherche linéaire inexactes est différente dans le sens où, au lieu de résoudre l'éq. (8), le pas  $\alpha$  est accepté dès que certaines conditions sont remplies. On a alors tout un intervalle où le pas est acceptable, ce qui rend la recherche linéaire plus aisée. De nos jours, les conditions à remplir par le pas considérées sont généralement les conditions

de Wolfe, données par :

$$f(\alpha) \leq f(0) + c_1 \alpha f'(0) \quad (9)$$

$$f'(\alpha) \geq c_2 f'(0) \quad (10)$$

où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  vérifient  $0 < c_1 < c_2 < 1$ . La première de ces conditions, aussi appelée condition d'Armijo, permet d'éviter que le pas  $\alpha$  retenu soit trop grand. La seconde quant à elle permet d'éviter que le pas  $\alpha$  retenu soit trop petit. Notons que plus  $c_2$  est petit, plus la recherche linéaire sera précise mais plus l'effort de calcul sera important.

La recherche linéaire inexacte considérée dans ce papier est due à Fletcher [11]. Son implémentation couplée au BFGS à été décrite dans l'algorithme 7.3 de [10]. C'est cette dernière qui sera numériquement testée dans la suite.

#### 4. Gradient de la fonction de coût

La méthode utilisée pour le calcul des composantes du gradient de la fonction de coût est bien entendu basée sur l'état adjoint puisque cette méthode allie rapidité et efficacité. Une démonstration complète pourra être trouvée dans [3]. Cette démonstration est basée sur la construction du lagrangien suivant [8]. On y montre que lorsque le problème dit adjoint qui consiste à chercher  $\varphi^* : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}$  est solution de :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot ((2(\kappa + \sigma))^{-1} \nabla \varphi^*) + (\kappa - \frac{2\pi i \nu}{c_1}) \varphi^* &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \\ \frac{2\gamma}{A} \varphi^* + (2(\kappa + \sigma))^{-1} \nabla \varphi^* \cdot \mathbf{n} &= -\frac{1}{|\check{\varphi}|^2} (\varphi - \check{\varphi}) \mathbb{1}_{[\zeta \in \partial \mathcal{D}_d]}(\zeta) & \forall \zeta \in \partial \mathcal{D} \end{aligned} \quad (11)$$

et si le produit scalaire complexe  $L_2(\mathcal{D})$  est utilisé lors de l'extraction du gradient, alors les composantes du gradient de la fonction de coût s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa j} &= \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} (\varphi \bar{\varphi}^* - 2 \times (2(\kappa + \sigma))^{-2} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}^*) \\ \nabla_{\sigma j} &= \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} (-2 \times (2(\kappa + \sigma))^{-2} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}^*) \end{aligned} \quad (12)$$

### 5. Résultats numériques

#### 5.1. Présentation du test

La reconstruction simultanée des cartes d'absorption et de diffusion réduit est effectuée sur un domaine bidimensionnel carré  $\mathcal{D}$  de côté 6 cm,  $\mathcal{D} = [-3, 3]^2$ . Les distributions spatiales des propriétés cibles, dont les valeurs sont représentatives de celles de tissus humains où la tomographie optique y est appliquée pour la détection de tumeurs, sont définies par :

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) &= 0.06 \text{ cm}^{-1}, & \sigma(\mathbf{x}) &= 10 \text{ cm}^{-1}, & \mathbf{x} &\in \mathcal{D}_1, & \mathcal{D}_1 &= [-1.8, -0.6]^2 \text{ cm}^2 \\ \kappa(\mathbf{x}) &= 0.1 \text{ cm}^{-1}, & \sigma(\mathbf{x}) &= 30 \text{ cm}^{-1}, & \mathbf{x} &\in \mathcal{D}_2, & \mathcal{D}_2 &= [0.6, 1.8]^2 \text{ cm}^2 \\ \kappa(\mathbf{x}) &= 0.08 \text{ cm}^{-1}, & \sigma(\mathbf{x}) &= 20 \text{ cm}^{-1}, & \mathbf{x} &\in \mathcal{D} \setminus (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \end{aligned}$$

Concernant l'acquisition des données synthétiques, 4 sources et 8 détecteurs carrés sont disposés autour du domaine  $\mathcal{D}$ , chacun d'une taille de 1,2 cm. Leur répartition, identique sur chaque côté du domaine, est donnée par :  $x$  (ou  $y$ )  $\in [-0.6, 0.6]$  cm pour les sources et  $x$  (ou  $y$ )  $\in [-2.4, -1.2] \cup [1.2, 2.4]$  cm pour les détecteurs. L'espace d'approximation des variables d'état et adjointe consiste en une paramétrisation éléments finis de type Lagrange P4

basée sur un maillage régulier du domaine  $\mathcal{D}$  composé de 60 segments par côté. Signalons que cet espace d'approximation doit être suffisamment fourni afin de pouvoir reproduire les mesures expérimentales, mais ne doit pas trop l'être pour ne pas alourdir la résolution du problème inverse. Un maillage différent a été utilisé pour la création des données synthétiques (plus fin : composé de 65 segments par côté) dans le but d'éviter le "crime inverse" [9]. De plus, un bruit blanc gaussien de 30 dB a été appliqué aux mesures pseudo-expérimentales aux noeuds des détecteurs afin de simuler "au mieux" des données réelles.

Notons enfin que le choix d'une paramétrisation P4 comme espace d'approximation des données synthétiques et des variables d'état et adjointe s'appuie sur le fait qu'une comparaison entre les espaces d'approximation éléments finis P0, P1, P2 et P3 pour les variables de contrôle est effectuée ci-dessous. Ainsi, pour ne pas favoriser une reconstruction plutôt qu'une autre par corrélation entre espaces d'approximation, celui des données synthétiques et des variables d'état et adjointe a dû être choisi différent des éléments finis P0, P1, P2 et P3, et s'est donc porté sur l'élément fini P4.

## 5.2. Comparaison des paramétrisations éléments finis

La comparaison entre les différents espaces d'approximation est faite à temps CPU fixé à 15 min et pour un maillage donné. La méthode de recherche linéaire utilisée est celle de Fletcher avec les paramètres  $\rho_F = 0.1$ ,  $\sigma_F = 0.7$  comme recommandé dans [10]. Les figures 1 et 2 ainsi que le tableau 1 montrent que l'espace élément fini P1 est celui qui fournit les meilleurs résultats, confirmant les résultats de [2].

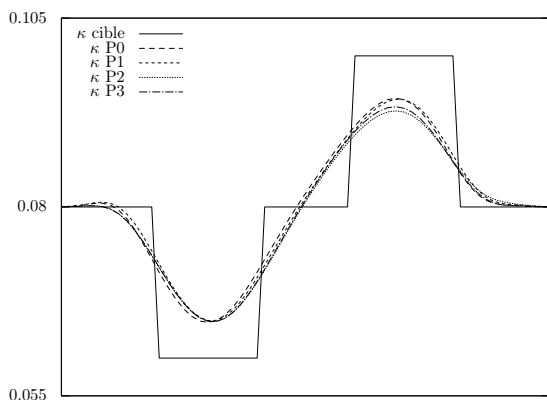


Figure 1 Coupes 1d de  $\kappa$ .

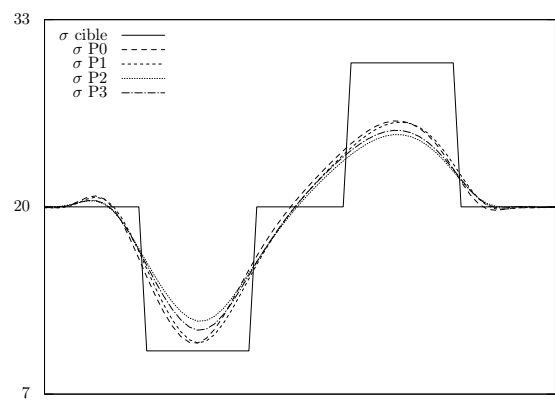


Figure 2 Coupes 1d de  $\sigma$ .

	Erreur initiale	P0	P1	P2	P3
$\epsilon_{1,\kappa}$	0.071	0.045	0.044	0.053	0.048
$\epsilon_{1,\sigma}$	0.141	0.092	0.087	0.093	0.091

Tableau 1 Erreurs  $L^2(\mathcal{D})$  entre les reconstructions finales et les propriétés cibles.

## 5.3. Comparaison des méthodes de recherche linéaire

La comparaison entre les différentes méthodes de recherche linéaire est faite à temps CPU fixé à 20 min et pour une paramétrisation P1 donnée. Les paramètres intervenant dans les

méthodes de la section d'or (GOL) et de l'interpolation quadratique (QUA) sont ceux donnés précédemment. Concernant la recherche linéaire de Fletcher, 3 jeux de paramètres sont testés : la version "précise" (PRE) avec  $\rho_F = 0.01$  et  $\sigma_F = 0.07$ , la version "imprécise" (IMP) avec  $\rho_F = 0.5$  et  $\sigma_F = 0.99$ , et une version "intermédiaire" (INT) avec  $\rho_F = 0.1$  et  $\sigma_F = 0.7$ .

Les figures 3 et 4 ainsi que le tableau 2 montrent que (i) la méthode de la section d'or fournit les moins bons résultats – ceci peut être justifié par le faible nombre d'itérations dans le temps imparti ; (ii) les trois versions de Fletcher fournissent des résultats équivalents – le faible nombre d'itérations effectué dans la version (PRE) est compensé par la grande précision demandée ; (iii) la méthode d'interpolation quadratique est celle qui fournit les meilleures reconstructions. Une reconstruction utilisant les meilleures données (paramétrisation P1 couplée à la méthode quadratique de recherche linéaire) est présentée dans les figures 5 et 6. On peut remarquer que les deux inclusions sont relativement bien retrouvées comparativement à ce que l'on peut retrouver dans la littérature. On observe de plus que ces reconstructions, obtenues après un temps CPU fixé à 30 min, sont très proches de celles présentées dans les figures 3 et 4, illustrant en quelque sorte la convergence de la méthode au bout de 20 min.

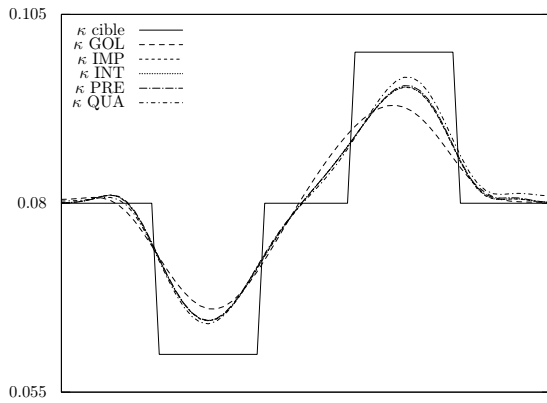


Figure 3 Coupes 1d de  $\kappa$ .

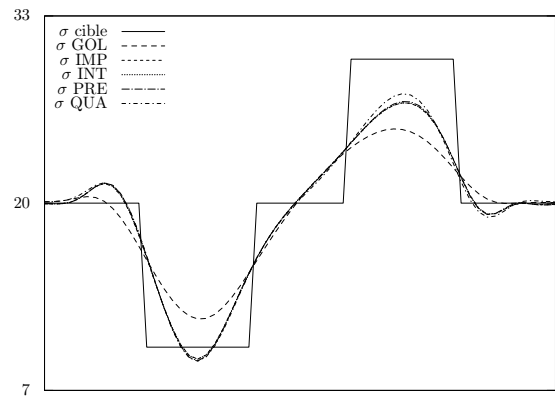


Figure 4 Coupes 1d de  $\sigma$ .

	$e_{1,\kappa}$	$e_{1,\sigma}$	Itérations dans BFGS
Erreur initiale	0,0709	0,141	
IMP	0.0419	0.082	71
INT	0.0418	0.082	71
PRE	0.0419	0.082	38
GOL	0.0470	0.092	24
QUA	0.0412	0.078	68

Tableau 2 Erreurs  $L^2(\mathcal{D})$  entre les reconstructions finales et les propriétés cibles.

## 6. Conclusion

Les résultats numériques présentés ont montré que la paramétrisation P1 et la méthode de recherche linéaire de l'interpolation quadratique ont donné les meilleurs résultats. Il convient cependant de rester prudent notamment pour la méthode de l'interpolation quadratique qui nécessite l'utilisation d'un intervalle initial. A priori, ces conclusions demeurent valables pour l'ÉTR et/ou pour des géométries tridimensionnelles.

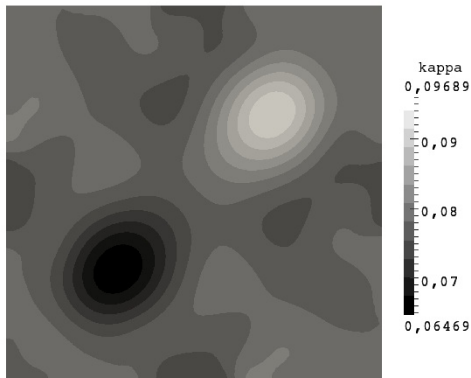


Figure 5 Reconstruction  $\kappa$  après 30 min. Paramétrisation P1 et méthode de l'interpolation quadratique.

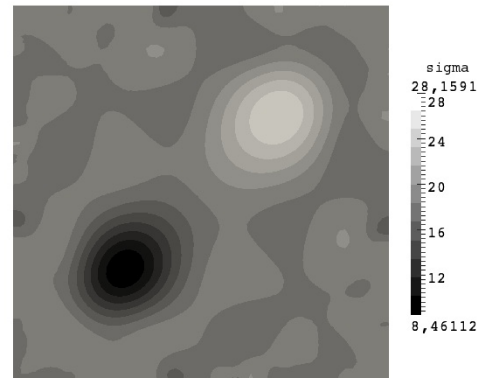


Figure 6 Reconstruction  $\sigma$  après 30 min. Paramétrisation P1 et méthode de l'interpolation quadratique.

## Références

- [1] B. Rousseau, D. de Sousa Meneses, P. Echegut, M. Di Michiel, J.F. Thovert, Prediction of the thermal radiative properties of an X-ray  $\mu$ -tomographed porous silica glass, *Applied optics*, 46 (2007) 4266–4276.
- [2] O. Balima, Y. Favennec, D.R. Rouse, Optical tomography reconstruction algorithm with the finite element method : An optimal approach with regularization tools, *Journal of Computational Physics*, 251 (2013) 461–479.
- [3] F. Dubot, Y. Favennec, B. Rousseau, D.R. Rouse, Regularization opportunities for the Gauss-Newton and BFGS algorithms : application to the diffuse optical tomography problem, *International Journal of Thermal Sciences*, (soumis).
- [4] S. Arridge, Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems*, 15 (1999) R41–R93.
- [5] D.C. Liu, J. Nocedal, On the limited memory BFGS method for large scale optimization, *Mathematical Programming : Series A and B*, 45 (1989) 503–528.
- [6] J. Nocedal, Updating quasi-Newton matrices with limited storage, *Mathematics of computation*, 35 (1980) 773–782.
- [7] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique, *Princeton University Bulletin*, 13 (1902) 49–52.
- [8] Y. Favennec, P. Le Masson, Y. Jarny, *Optimization methods for non linear estimation or function estimation*, Proceeding of Eurotherm Seminar 94 : METTI 5 Advanced Spring School “Thermal Measurements and Inverse Techniques”, chap. 7, Roscoff, France, (2011).
- [9] D. Colton, R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer (1998).
- [10] A. Antoniou, W.S. Lu, *Practical Optimization, algorithms and engineering applications*, Springer (2007).
- [11] R. Fletcher, *Practical methods of optimization, vol. 1, unconstrained optimization*, British Library Cataloguing in Publication Data (1980).

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier les partenaires de la chaire de recherche industrielle en Technologies de l'Énergie et en Efficacité Énergétique (t3e) de l'École de Technologie Supérieure (ÉTS) pour le financement de cette recherche. Les auteurs tiennent à remercier également les développeurs de l'environnement FreeFem++ qui a été utilisé tout au long de cette étude.