

Stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni au sein d'un film liquide d'extension infinie

Lahcen BAMMOU¹, Serge BLANCHER¹, Yves LE GUER^{1*}, Kamal EL OMARI¹,
Brahim BENHAMOU²

¹Laboratoire SIAME, Fédération IPRA-CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour - 64075 Pau

² Laboratoire LMFE (CNRS-URAC27), Université Cadi Ayyad, Département de Physique,
Faculté des sciences Semlalia, Marrakech 40001, Maroc

*(auteur correspondant : Yves LE GUER)

Résumé - Dans ce travail nous présentons une analyse de stabilité linéaire d'un film liquide horizontal infini s'écoulant dans une direction (x) et chauffé uniformément par le bas. La méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev est employée pour résoudre le système d'équations aux valeurs propres du problème. Cette étude concerne les deux cas limites à $Ma = 0$ (effet de flottabilité pur) et $Ra = 0$ (effet thermocapillaire pur). L'analyse de stabilité a permis de caractériser les paramètres critiques (nombres de Rayleigh critique Ra_c et de Marangoni critiques Ma_c) correspondant à l'apparition de rouleaux longitudinaux ou de rouleaux transversaux ainsi que les nombres d'onde critiques k_x et k_y des perturbations associées aux seuils d'instabilité dans les deux directions perpendiculaires de l'écoulement : longitudinale x et transversale y , en fonction des paramètres de contrôle que sont les nombres de Biot Bi , de Reynolds Re et de Prandtl Pr . Nous montrons comment les effets thermogravitaire et thermocapillaire se combinent pour donner naissance à l'apparition des rouleaux thermoconvectifs. Les résultats sont comparés à ceux obtenus dans le cas du désormais classique écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Les structures spatiales des écoulements sont également présentées.

Nomenclature

Bi	nombre de Biot, $Bi = \frac{hH}{\lambda}$	T	température, K
D	opérateur dérivée, $D = \partial/\partial Z$	T_H	température du fond, K
h	coefficient de transfert, $W/m^2 \cdot C$	T_0	température initiale et ambiante, K
H	hauteur du film, m	U_m	vitesse moyenne, m/s
k_x, k_y	nombres d'onde	$\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$	vecteur vitesse
P	pression, kg/ms^2	<i>Symboles grecs</i>	
Ma	nombre de Marangoni, $Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta TH}{\mu \alpha}$	β	coefficient de dilatation, K^{-1}
Pe	nombre de Péclet, $Pe = \frac{U_m H}{\alpha}$	λ	conductivité thermique, $W/m \cdot C$
Pr	nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	σ	coefficient de tension de surface, N/m
Ra	nombre de Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta(T_H - T_0)H^3}{\nu \alpha}$	θ	température adim. : $(T - T_0)/(T_H - T_0)$
Re	nombre de Reynolds, $Re = \frac{U_m H}{\nu}$	ν	viscosité cinématique, m^2/s
		ζ	pulsation

1. Introduction

Le développement des rouleaux longitudinaux a longtemps été observé dans différentes configurations d'écoulement de fluide. La formation d'allées de nuages dans les couches limites atmosphériques [1] et les tourbillons de Görtler qui apparaissent le long des couches limites concaves [2] sont des manifestations de ce type de rouleaux longitudinaux. L'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) qui conduit à la formation de tels rouleaux a reçu une

attention considérable dans la littérature [3]. Ce système résulte de la combinaison de l'instabilité thermogravitaire d'une couche de fluide horizontale chauffée par le bas et d'un écoulement moyen. L'introduction d'une surface libre et donc d'une instabilité thermocapillaire (Rayleigh-Bénard-Marangoni [4, 5]) conduit à un nouveau système appelé Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni (PRBM), qui fait l'objet de la présente étude. Ce système est non seulement d'un grand intérêt pour des applications industrielles telles que le refroidissement par film liquide, mais il peut aussi servir de cadre pour l'étude des couplages de ces instabilités. Diverses analyses de stabilité linéaire et faiblement non linéaire de l'écoulement PRB ont été menées dans les canaux d'extension transversale infinie ou finie [6, 7]. L'apparition d'un écoulement secondaire, sous la forme de rouleaux longitudinaux, se produit à partir d'un certain nombre de Rayleigh critique voisin de $Ra_c = 1708$ [8]. Le nombre de Rayleigh critique Ra_c et le nombre d'onde critique k_y associés aux rouleaux longitudinaux sont indépendants du nombre de Reynolds Re . L'existence de rouleaux thermoconvectifs transversaux stationnaires dont les axes sont perpendiculaires à l'écoulement principal a été démontrée par Luijckx et al. [9]. Pour des nombres de Reynolds plus petits, le nombre de Rayleigh critique correspondant à l'apparition de rouleaux transversaux a été trouvé comme étant une fonction à la fois du rapport de forme du canal et du nombre de Prandtl [10, 6]. Les rouleaux longitudinaux sont convectivement instables quel que soit le nombre de Reynolds Re alors que les rouleaux transversaux présentent d'abord un seuil d'apparition qui correspond à un écoulement convectivement instable pour un certain Ra_c qui dépend de Re et un second seuil qui lui correspond à une transition d'instabilité convective/absolue pour un Ra_c plus élevé [13], [14]. Bien que cette notion d'instabilités convective/absolue ne concerne pas l'analyse de stabilité linéaire temporelle, cette dernière fournit des informations intéressantes et demeure pertinente lorsque les écoulements sont soumis à des excitations permanentes (bruit intrinsèque d'une installation expérimentale par exemple). Quand une surface libre est présente, la variation de tension de surface qui résulte du gradient de température le long de la surface peut aussi induire un mouvement au sein du fluide, appelé écoulement thermocapillaire. Les études de l'effet thermocapillaire ont été la plupart du temps considérées dans les couches minces liquides s'écoulant vers le bas, uniformément [11] ou non [12] (plaque inclinée chauffée). Dans nos précédentes simulations numériques [15], nous avons montré que l'introduction de l'effet thermocapillaire sur la convection mixte change le sens de rotation des rouleaux près des parois latérales du canal et favorise le transfert de chaleur. Dans cet article, nous présentons la première analyse linéaire de stabilité d'un film de liquide infini horizontal circulant dans une direction avec un chauffage uniforme par le bas. Un problème aux valeurs propres est obtenu, celui-ci est résolu numériquement en utilisant la méthode de collocation spectrale Chebychev. Nous fournissons des résultats pour les paramètres critiques sans dimension des instabilités thermoconvectives. Les deux types de rouleaux (longitudinaux et transversaux) sont étudiés pour les cas limites $Ma = 0$ (effet de flottabilité pur - couche liquide épaisse) et $Ra = 0$ (effet thermocapillaire pur - couche liquide mince) et leurs structures spatiales sont données. Une comparaison avec l'écoulement de PRB est donnée pour illustrer l'influence de la surface supérieure libre sur les paramètres critiques ainsi que sur la forme des structures spatiales internes de l'écoulement. Un développement plus complet de ce travail est donné dans l'article de Bammou et al. [16].

2. Modèle physique

Le système d'étude se compose d'un film de liquide horizontal infini de hauteur H circulant dans une direction (voir figure 1). La paroi du fond est maintenue à une température T_H constante et uniforme qui est supérieure à la température initiale du liquide T_0 . La température du gaz en dessus de la couche de liquide est également fixée à T_0 . En supposant un fluide

newtonien incompressible et compte-tenu de l'approximation de Boussinesq, les équations tri-dimensionnelles régissant la conservation de la masse, du mouvement et de l'énergie sont écrites comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{2}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{Ra}{2PrRe^2} \theta \mathbf{z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \frac{2}{PrRe} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

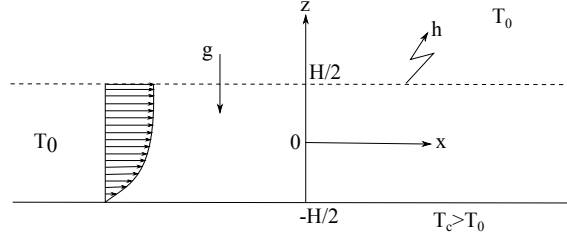


Figure 1 Configuration de l'étude et conditions aux limites.

Dans ces équations, le canal de mi-hauteur $H/2$, la vitesse d'écoulement moyenne U_m , la pression dynamique ρU_m^2 et le ratio $H/2U_m$ sont utilisés comme quantités de référence pour la longueur, la vitesse, la pression et le temps, respectivement. La température adimensionnée θ est définie par $\theta = (T - T_0)/(T_H - T_0)$. A la paroi inférieure, la vitesse fluide $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ satisfait la condition d'adhérence et la paroi est supposée être isotherme ($\theta = 1$). Dans l'hypothèse d'un film de hauteur constante, une condition à la limite de la contrainte de cisaillement est imposée sur la surface libre plane, elle est déduite de l'équilibre entre les forces de tension de surface et les contraintes visqueuses dans le fluide ($\frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X}$, $\frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y}$ and $V_z = 0$) où Ma et Pe sont respectivement les nombres de Marangoni et de Péclet. Le coefficient de tension de surface est supposé être une fonction linéaire de la température : $\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial T}(T - T_0)$. Sur la surface libre, nous utilisons une condition de convection thermique : $\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\frac{Bi}{2}\theta$, où Bi est le nombre de Biot. Pour effectuer une analyse de stabilité linéaire du problème, nous décomposons \mathbf{V} , P et θ en deux parties : l'état de base ($\bar{\mathbf{V}}$, \bar{P} , $\bar{\theta}$) et la perturbation (\mathbf{V}' , P' , θ'). En l'absence de limites latérales, l'état d'équilibre de base (conductif) sans dimension est décrit par un profil de température linéaire et un demi-profil de Poiseuille pour la vitesse :

$$\bar{\theta}(Z) = \frac{2 + Bi}{2(Bi + 1)} - \frac{Bi}{2(Bi + 1)} Z \quad (4)$$

$$\bar{V}_x(Z) = -\frac{3}{8}(Z^2 - 2Z - 3) \quad (5)$$

Nous supposons des perturbations infinitésimales en trois dimensions sous la forme de modes normaux :

$$(V'_x, V'_y, V'_z, P', \theta') = (\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z, \hat{P}, \hat{\theta}) e^{i(k_x X + k_y Y - \zeta t)} \quad (6)$$

où k_x et k_y sont les nombres d'onde de la perturbation dans les directions x et y et ζ est la pulsation complexe. Une analyse de stabilité linéaire des équations (1), (2) et (3) conduit aux deux équations différentielles suivantes pour l'amplitude des modes normaux de la composante verticale de la vitesse \hat{V}_z , et la perturbation de température $\hat{\theta}$:

$$\frac{2}{Re}(D^2 - k^2)^2 \hat{V}_z = i[(k_x \bar{V} - \zeta)(D^2 - k^2) - k_x D^2 \bar{V}] \hat{V}_z + \frac{Ra}{2PrRe^2} k^2 \hat{\theta} \quad (7)$$

$$-i\zeta\hat{\theta} + ik_x\bar{V}\hat{\theta} + \hat{V}_z D\bar{\theta} = \frac{2}{PrRe}(D^2 - k^2)\hat{\theta} \quad (8)$$

avec les conditions aux limites :

$$\hat{V}_z = 0, \quad D\hat{V}_z = 0, \quad \hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = -1 \quad (9)$$

$$\hat{V}_z = 0, \quad D^2\hat{V}_z + k^2\frac{Ma}{Pe}\hat{\theta} = 0, \quad D\hat{\theta} + \frac{Bi}{2}\hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = 1 \quad (10)$$

L'équation(7) est une équation différentielle linéaire ordinaire (ODE) du quatrième ordre qui se réduit à l'équation d'Orr-Sommerfeld classique quand $Ra = 0$ [17], et l'équation (8) est une ODE linéaire du second ordre pour la perturbation de l'équation de l'énergie. Ces deux équations ainsi que les conditions aux limites (9) et (10) décrivent un problème aux valeurs propres dans lequel ζ est la valeur propre. Ces équations permettent d'établir la relation de dispersion :

$$\mathcal{D}(k_x, k_y, \zeta, Ra, Ma, Bi, Re, Pr) = 0 \quad (11)$$

Cette relation de dispersion est obtenue numériquement par discrétisation du problème aux valeurs propres en utilisant la méthode de collocation spectrale Chebyshev [18, 19]. Pour déterminer les seuils critiques d'instabilité, les valeurs propres du système (7 - 10) sont rangées dans l'ordre des parties imaginaires de ζ décroissantes. Lorsque l'on fait varier les paramètres de l'étude, l'état de base est instable quand la partie imaginaire de ζ devient positive.

3. Résultats et discussion

Dans cette situation d'écoulement, deux mécanismes sont responsables de l'apparition de comportements thermoconvectifs : la flottabilité et la thermocapillarité. Dans cette étude, nous nous concentrons sur les instabilités convectives thermiques se développant sous forme de rouleaux longitudinaux ($k_x = 0, k_y \neq 0, \text{Réelle}(\zeta) = 0$) et de rouleaux transversaux ($k_x \neq 0, k_y = 0, \text{Réelle}(\zeta) \neq 0$). Les figures 2 et 3montrent l'évolution des paramètres critiques (Ra_c et Ma_c respectivement) pour le développement de rouleaux longitudinaux et transversaux en fonction du nombre de Biot Bi dans les cas limites de convection naturelle pure et de convection thermocapillaire pure. Dans ces deux cas, l'écoulement est toujours stable à $B = 0$ en raison de l'état de base de la température $\bar{\theta}(Z) = 1$ constante, ce qui correspond au cas d'une surface libre agissant comme une surface isolante. Dans le cas de la convection naturelle seule (figure 2), quand le nombre de Biot augmente, le nombre de Rayleigh critique diminue d'abord fortement, puis augmente lentement vers une valeur asymptotique ($Ra_c = 1097$ pour les rouleaux longitudinaux et $Ra_c = 1135$ pour les rouleaux transversaux). Ce comportement peut être expliqué par la condition de limite thermique à la surface libre qui affecte les perturbations de température. En effet, pour de petites valeurs de Bi , ces perturbations sont très sensibles au transfert de chaleur à la surface libre. Par contre, pour les grandes valeurs du nombre de Biot Bi , la surface libre peut être considérée comme étant à une température constante imposée ce qui fait que le nombre de Rayleigh critique approche cette valeur asymptotique. On observe également que les rouleaux longitudinaux induits par l'effet de la flottabilité seront toujours les plus instables parce que le nombre de Rayleigh critique associé à ces rouleaux est toujours plus petit que celui obtenu pour les rouleaux transversaux. Ce résultat a également été trouvé pour l'écoulement de PRB dans les canaux d'extension latérale infinie [3]. Dans le cas de la convection thermocapillaire pure (figure 3), le nombre de Marangoni critique diminue fortement jusqu'à ce que le nombre de Biot atteigne une valeur d'environ $Bi = 1,5$, après quoi le nombre de Marangoni critique augmente alors linéairement avec Bi . Ce comportement se produit parce que pour de faibles valeurs de Bi (mais $Bi \neq 0$), la température de surface libre n'est pas

homogène, ce qui favorise des gradients horizontaux de température, et induit alors des instabilités thermocapillaires. Toutefois, pour de grandes valeurs de Bi , la température de la surface libre tend à s'homogénéiser, ce qui permet de réduire les gradients de température horizontaux et donc les instabilités thermocapillaires. Lorsque les instabilités sont induites par des effets thermocapillaires purs, le nombre critique de Marangoni est à peu près identique pour les deux types d'instabilités pour les petits nombres de Reynolds, tandis que les rouleaux longitudinaux apparaissent pour des nombres de Reynolds plus grands.

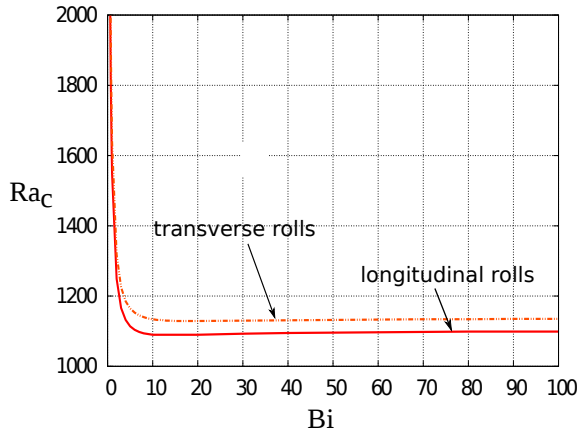


Figure 2 Nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot : effet de flottabilité pur ($Ma = 0$, $Re = 15$, $Pr = 7$).

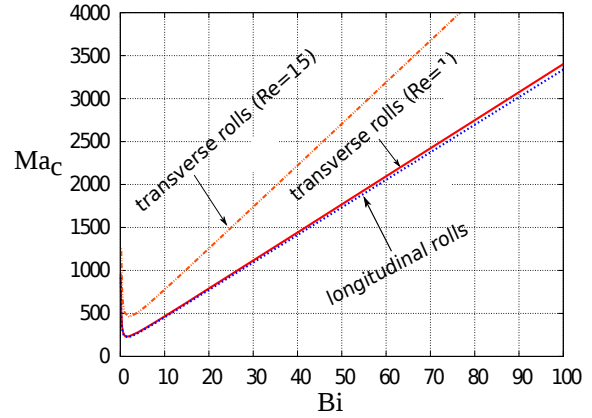


Figure 3 Nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Biot : effet thermocapillaire pur ($Ra = 0$, $Re = 1$ et 15 , $Pr = 7$).

La figure 4 montre l'effet du nombre de Biot sur le nombre d'onde critique k_y^c des rouleaux longitudinaux dans le cas de la flottabilité pure et dans le cas de l'effet thermocapillaire pur. Nous observons que k_y^c augmente progressivement avec Bi pour atteindre une valeur presque constante de $k_y^c = 1,34$ dans le cas de l'effet de flottabilité pure et $k_y^c = 1,50$ dans le cas de l'effet thermocapillaire pur. Ainsi, pour un grand nombre de Biot, lorsque les forces thermocapillaires sont faibles, des rouleaux longitudinaux plus nombreux sont créés par rapport au cas où seules les forces de flottabilité sont considérées.

En comparant ces résultats avec l'écoulement de PRB (voir le tableau 1), nous notons que la surface supérieure rigide stabilise le flux et retarde l'apparition de rouleaux longitudinaux en augmentant Ra_c . La présence d'une paroi supérieure augmente également le nombre d'onde critique ($k_y^c(PRB) > k_y^c$), ce qui signifie qu'il y a plus de rouleaux de convection dans le cas de l'écoulement de PRB qu'avec une surface libre. En ce qui concerne l'écoulement de

	free-surface flow ($Bi = 100$ and $Ma = 0$)	PRB flow
Ra_c	1097,0	1707,8
k_y^c	1,34	1,56

Tableau 1 Comparaison du nombre de Rayleigh critique Ra_c et du nombre d'onde critique k_y^c pour l'apparition des rouleaux longitudinaux pour l'écoulement à surface libre avec ceux obtenus à partir des résultats numériques pour un écoulement de PRB.

PRB [20], les valeurs critiques (Ra_c et Ma_c) pour les rouleaux longitudinaux stationnaires sont indépendants des nombres de Reynolds et de Prandtl. Cependant, les valeurs critiques pour

l'apparition des rouleaux transversaux sont dépendantes des nombres de Reynolds et de Prandtl. Il ressort de la figure 3 que l'écoulement à surface libre est toujours plus stable que l'écoulement de PRB pour un petit nombre de Biot indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds Re . Cependant, pour un nombre de Biot modéré ($Bi < 20$), l'écoulement à surface libre est moins stable par rapport à l'écoulement PRB à faible Re , mais devient plus stable par rapport à l'écoulement PRB pour les grands nombres de Reynolds. Dans le cas d'un grand nombre de Biot, l'écoulement à surface libre est toujours instable par rapport à l'écoulement de PRB indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds Re .

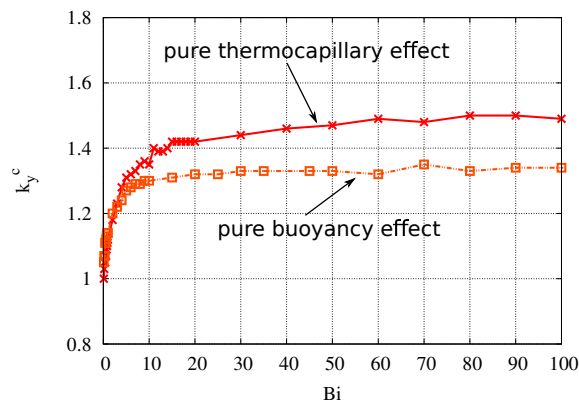


Figure 4 Nombres d'onde critiques en fonction du nombre de Biot ($Re = 15$, $Pr = 7$)

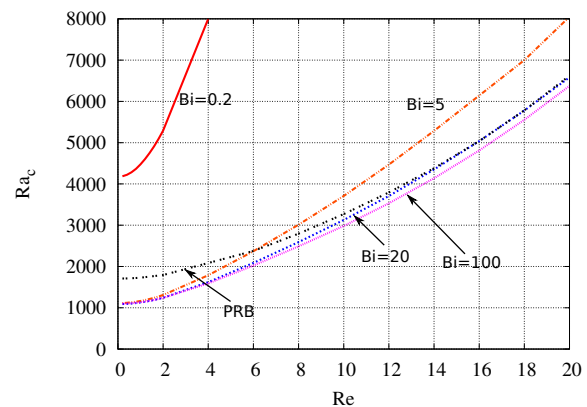


Figure 5 Nombres de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds $Pr = 7$.

La figure 6(a) et la figure 6(b) montrent l'évolution du nombre d'onde critique pour les rouleaux transversaux k_x^c en fonction de Re et Pr , respectivement, pour les cas de flottabilité pure et d'effet thermocapillaire pur. Dans le cas du seul effet thermocapillaire, la longueur d'onde des rouleaux transversaux diminue lorsque Re et Pr augmente. C'est le cas inverse qui se produit dans le cas où seule la flottabilité est considérée, la longueur d'onde des rouleaux croît en même temps que Re et Pr . Ainsi les deux effets, flottabilité et thermocapillarité agiront de façon contraire pour la sélection de la longueur d'onde des rouleaux transversaux.

Les structures d'écoulement pour les rouleaux longitudinaux et transversaux de l'écoulement à surface libre par rapport à l'écoulement correspondant pour une surface supérieure rigide (PRB) sont représentées sur la figure 7(a) et la figure 7(b), respectivement. Comme on peut le remarquer, dans le cas de PRB, les rouleaux sont centrés à $Z = 0$ et ont des diamètres proches de la hauteur du canal alors que dans le cas d'un écoulement à surface libre, les centres des rouleaux sont décalés vers le haut. Les rouleaux transversaux dans le cas d'un écoulement à surface libre sont eux légèrement déformés et ne sont plus symétriques par rapport à l'axe z . Ces effets sont directement liés aux forces thermocapillaires exercées à la surface du liquide.

4. Conclusions

Pour résumer, nous avons effectué la première analyse de la stabilité d'un film liquide horizontal infini qui s'écoule dans une direction avec un chauffage uniforme par le bas. Nous avons obtenu les paramètres critiques (Ra_c , Ma_c , k_y^c et k_x^c) d'apparition des rouleaux longitudinaux et transversaux et leurs variations en fonction des autres paramètres de contrôle (Bi , Re , Pr). Une comparaison avec l'écoulement de PRB révèle que la surface libre supérieure déstabilise l'écoulement dans le cas de rouleaux longitudinaux et peut stabiliser ou déstabiliser

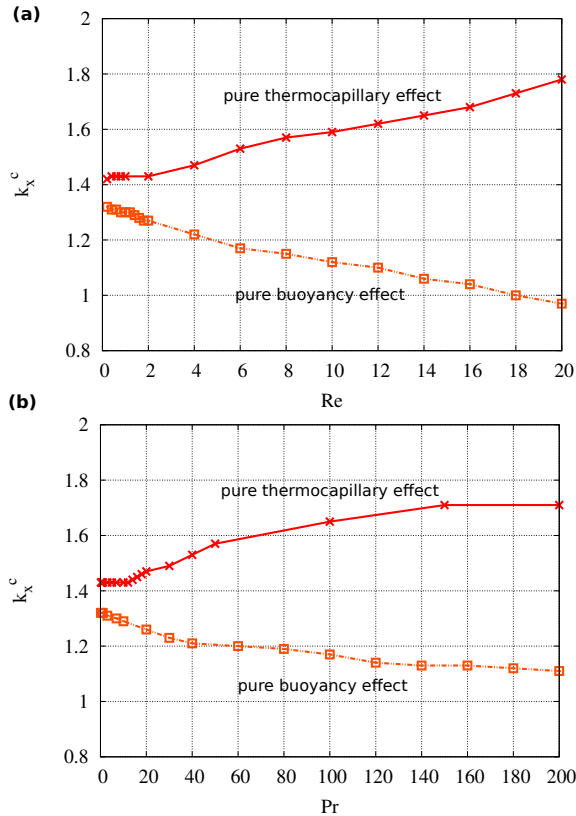


Figure 6 Nombres d'onde critique des rouleaux transversaux en fonction : (a) du nombre de Reynolds Re ($P = 7$ et $Bi = 20$) et (b) du nombre du Prandtl Pr ($Re = 1$ et $Bi = 20$).

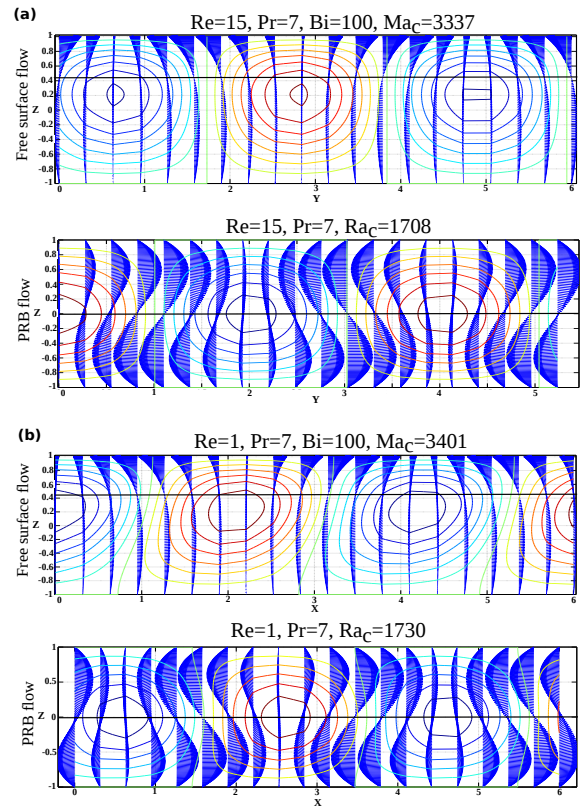


Figure 7 Vecteurs vitesse \mathbf{V} et contours $\hat{\theta}$ du mode propre le plus instable avec surface libre par rapport à l'écoulement PRB. (a) rouleaux longitudinaux. (b) rouleaux de transversaux.

l'écoulement dans le cas de rouleaux transversaux en fonction des nombres de Reynolds et de Biot. La présence de la surface supérieure libre diminue également le nombre d'onde critique des rouleaux par rapport à l'écoulement de PRB. Les structures des rouleaux longitudinaux et transversaux sont également modifiées. La prise en compte simultanée des deux mécanismes, flottabilité et thermocapillarité ($Ma \neq 0$ et $Ra \neq 0$) fait l'objet d'une étude plus détaillée [21].

Références

- [1] J. P. Kuettner, Cloud bands in the earth's atmosphere : Observations and theory, *Tellus* 23 (4-5) (1971) 404–426.
- [2] W. S. Saric, Görtler vortices, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 26 (1) (1994) 379–409.
- [3] X. Nicolas, Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below, *Int. J. Therm. Sci.* 41 (10) (2002) 961–1016.
- [4] D. A. Nield, Surface tension and buoyancy effects in cellular convection, *J. Fluid Mech.* 19 (03) (1964) 341–352.
- [5] J. Pantaloni, R. Bailleux, J. Salan, M. Velarde, Rayleigh-Bénard-Marangoni instability : new experimental results, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 4 (4) (1979) 201–218.
- [6] X. Nicolas, J. M. Luijkx, J. K. Platten, Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (4) (2000) 589–610.

- [7] Y. Kato, K. Fujimura, Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 601–611.
- [8] M. Akiyama, G. Hwang, K. Cheng, Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates, *J. Heat Transfer* 93 (1971) 335–341.
- [9] J. Luijkx, J. Platten, J. Legros, On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (7) (1981) 1287–1291.
- [10] M. Ouazzani, J. Platten, A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes–ii, *Int. J. Heat Mass Transfer* 33 (7) (1990) 1417–1427.
- [11] D. Goussis, R. Kelly, Surface wave and thermocapillary instabilities in a liquid film flow, *J. Fluid Mech* 223 (1) (1991) 25–45.
- [12] I. Sadiq, R. Usha, Linear instability in a thin viscoelastic liquid film on an inclined, non-uniformly heated wall, *Int. J. Eng. Sci.* 43 (19) (2005) 1435–1449.
- [13] H. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Transversal convection patterns in horizontal shear flow, *Physical Review A* 45 (6) (1992) 3714.
- [14] P. Carrière, P.A. Monkewitz, Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection., *J. Fluid Mech.* 384 (1999), 243–262.
- [15] L. Bammou, K. El Omari, S. Blancher, Y. Le Guer, B. Benhamou, T. Mediouni, A numerical study of the longitudinal thermoconvective rolls in a mixed convection flow in a horizontal channel with a free surface, *Int. J. Heat Fluid Flow* 42 (2013) 265–277.
- [16] L. Bammou, S. Blancher, Y. Le Guer, K. El Omari, B. Benhamou, Linear stability analysis of Poiseuille-Bénard-Marangoni flow in a horizontal infinite liquid film, *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, in press (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.03.008>.
- [17] P. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [18] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. J. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [19] L. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, Vol. 10, Society for Industrial Mathematics, 2000.
- [20] Y. Mori, Y. Uchida, Forced convective heat transfer between horizontal flat plates, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9 (8) (1966) 803–808.
- [21] L. Bammou, S. Blancher, Y. Le Guer, K. El Omari, B. Benhamou, Linear stability analysis of the onset of longitudinal and transverse rolls in mixed convection flow combined with a thermocapillary effect, preprint 2014.

5. Remerciements

Dans le cadre de ce travail, L.B. a bénéficié d'une Bourse d'Excellence de Recherche du CNRST-Maroc et a été soutenu par un programme de coopération Maroc-France Volubilis (MA/09/214-Maroc, MA/09/213-France).