

# Refroidissement d'un magma à viscosité thermodépendante en régime d'advection chaotique

Kamal El Omari<sup>1</sup>, Yves Le Guer<sup>1\*</sup>, Diego Perugini<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire SIAME - Fédération CNRS IPRA,  
Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), 64000 Pau, France

<sup>2</sup> Department of Earth Sciences, University of Perugia, Italy

\*(auteur correspondant : yves.leguer@univ-pau.fr)

**Résumé** - Ce travail concerne l'étude numérique du refroidissement d'un magma basaltique en régime d'advection chaotique. Nous montrons par résolution numérique des équations du mouvement et de l'énergie, comment ce phénomène peut se produire pour un écoulement au sein d'une géométrie modèle simple : une cavité dont les parois sont entraînées alternativement. Nous considérons le magma basaltique comme étant newtonien mais dont la viscosité a une dépendance exponentielle avec la température. Pour un nombre de Reynolds initial égal à 1 (le déplacement pariétal de la chambre magmatique est induit par des mouvements tectoniques), nous étudions la cinétique de refroidissement du magma au cours du temps en utilisant différents indicateurs de mélange thermique. Nous montrons, qu'en raison de la présence de structures complexes de l'écoulement, liées à l'advection chaotique et à la thermodépendance, le refroidissement s'effectue à des vitesses différentes en fonction des régions de la chambre magmatique ce qui peut représenter une explication plausible pour la présence de grandes variations de composition chimique observées dans les magmas solides.

## Nomenclature

$B$	nombre de Pearson	$\mu$	viscosité dynamique, Pa.s
$C_p$	chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$\sigma$	écart type
$k$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$L$	largeur de cavité, m	$\tau$	période adimensionnelle
$T^*$	température adimensionnelle	<i>Indices et exposants</i>	
$U$	vitesse de paroi, $m.s^{-1}$	$i$	initial
<i>Symboles grecs</i>		$p$	paroi
$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$		

## 1. Introduction

Le problème du refroidissement d'une masse magmatique est d'un grand intérêt en pétrologie et en volcanologie. Les systèmes magmatiques observables présentent en effet une large hétérogénéité de composition à la fois dans l'espace et dans le temps. L'hypothèse communément admise est que ces hétérogénéités en composition chimique proviennent d'interactions complexes lors du mélange de plusieurs magmas de compositions différentes. Cependant, ces disparités dans les systèmes ignés peuvent apparaître également au sein de la même masse magmatique en raison de différents taux de cristallisation induits par des vitesses de refroidissement différentes [1, 2]. Ces vitesses de refroidissement différentes étant elles mêmes dues à une distribution des températures hétérogènes dans l'espace et dans le temps. Ces processus de cristallisations différenciés conduiraient à des magmas de compositions différentes et avec différents gradients de concentration. Ces différentes zones peuvent éventuellement se mélanger entre elles et créer des systèmes magmatiques très complexes. Un exemple de ce processus est la cristallisation fractionnée qui tend à se produire le long des parois froides de la chambre

magmatique, où le magma s'appauvrit vis à vis d'éléments qui migrent vers les cristaux, ce qui génère des gradients de composition dans la phase liquide.

Des travaux récents sur le mélange chaotique thermique pour des fluides très visqueux ont montré que les champs de températures pouvaient être très fortement modulés par une dynamique chaotique induite par le mouvement des parois [3, 4]. Ce processus concernerait également les systèmes magmatiques, pour lesquels la formation de différentes zones thermiques dans l'espace et dans le temps influencerait fortement l'historique de refroidissement et par la suite créerait des distributions non uniformes de la rhéologie et de la composition du magma. En effet, il est maintenant connu que la distribution de tailles des cristaux est étroitement liée à la cinétique de refroidissement des magmas. Dans la présente étude, nous nous intéressons uniquement à la cinétique de refroidissement d'un magma liquide en lien avec les mouvements de la chambre. Nous nous appuyons sur des simulations numériques de l'advection chaotique thermique afin de proposer des explications qui pourraient contribuer à la compréhension de ces mécanismes de refroidissement différenciés. Notre étude constitue une première étape pour aider à la compréhension de cette problématique complexe [2].

## 2. Problème physique

### 2.1. Propriétés du magma basaltique

Dans cette étude nous modélisons la chambre magmatique par une cavité rectangulaire fermée et bidimensionnelle (Fig. 1), remplie d'un magma basaltique newtonien, dont les propriétés thermophysiques sont données dans le Tableau 1. La température initiale  $T_i$  du magma fondu est choisie à 1200 °C et la température de la roche environnante  $T_p$  à 600 °C. Toutes les propriétés thermophysiques sont considérées comme indépendantes de la température, sauf la viscosité. Le nombre de Prandtl correspondant à  $T_i$  est  $Pr = 45450$ . Pour ce nombre élevé de Prandtl, l'écoulement du magma est caractérisé par un transfert de quantité de mouvement beaucoup plus élevé que la diffusion de la chaleur. Classiquement, pour un écoulement laminaire stationnaire, les effets de paroi se font ressentir plus loin à l'intérieur de la cavité pour le champ de vitesses que pour le champ thermique, ainsi le refroidissement du magma est régi uniquement par ce qui se produit dans le voisinage immédiat des parois [3]. Nous allons voir que ce mécanisme diffère lorsque l'advection chaotique entre en action. Pour cette étude, nous considérons que la masse magmatique reste à la phase liquide entre  $T_i$  et  $T_p$  et qu'aucun phénomène de cristallisation avec libération éventuelle de chaleur latente n'est prise en compte. Comme autre hypothèse, nous considérons que la densité reste constante au cours du refroidissement du magma. Ainsi, la convection naturelle n'est pas considérée dans cette première étude (cavité horizontale) alors qu'elle joue en réalité très certainement un rôle important.

Propriété	valeur	unité
$\rho$	2750	kg.m <sup>-3</sup>
$k$	2,2	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$\alpha$	$8 \times 10^{-7}$	°C
$C_p$	1000	J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$\mu(T_i=1200 \text{ °C})$	100	Pa.s

Tableau 1 : Propriétés thermophysiques du magma basaltique étudié

La viscosité du magma primaire est liée à sa teneur en silice. Plus la quantité de silice est

importante dans un magma, plus il est visqueux en raison des liens forts silice-oxygène qui composent les chaînes de silice. La teneur en cristaux et en gaz dissous affecte également la viscosité du magma. Un autre facteur influençant fortement la viscosité du magma est la température : elle augmente lorsque la température diminue. Dans cette étude, nous considérons, en première approche, un fluide newtonien pour lequel la dépendance en température de la viscosité est modélisée par une loi exponentielle qui peut simuler l'augmentation rapide de la viscosité lors de la formation de cristaux microscopiques au cours du refroidissement [5] :

$$\mu = \mu_0 \exp(B(1 - T^*)) \quad (1)$$

avec  $\mu_0$  la viscosité à la température initiale ( $T^* = 1$ ).  $B$  est le nombre de Pearson qui quantifie le degré de thermodépendance du processus de refroidissement [4]. Trois niveaux sont considérés ici :  $B = 0$ , cas non thermodépendant,  $B = 5$  et  $B = 10$ , cas à thermodépendances modérée et forte, respectivement. La relation exponentielle entre la température et la viscosité (Eq. 1) introduit un degré de non linéarité au calcul de l'écoulement. L'hypothèse de fluide newtonien resterait valable pour un pourcentage en cristaux dans le magma inférieur à 25-30 %.

## 2.2. Écoulement d'advection chaotique

Le phénomène d'advection chaotique est maintenant bien connu pour améliorer le mélange de fluides ou le transfert de chaleur dans de nombreux procédés industriels [6]. Il a aussi une importance particulière dans certains phénomènes naturels en géophysique : en volcanologie [1] ou pour les phénomènes de dispersion dans l'atmosphère ou les océans (polluants, marée noire, plancton, etc.). L'advection chaotique devient particulièrement intéressante pour les applications pour lesquelles les effets visqueux sont grands comparés aux effets d'inertie (nombres de Reynolds très faibles). L'écoulement d'un magma se caractérise par une viscosité relativement grande et éventuellement une faible vitesse de la paroi. Pour un écoulement d'advection chaotique 2D, un champ de vitesse instationnaire simple est capable de générer des trajectoires très complexes. Le mécanisme de mélange global comprend alors une première phase d'agitation composée d'étirements et repliements successifs d'éléments fluides augmentant ainsi les gradients de température ou de concentration dans le fluide, ce qui améliore l'efficacité de la deuxième phase qu'est la diffusion.

La cavité rectangulaire 2D (Fig. 1) que nous avons choisie pour l'étude de l'écoulement du magma est une géométrie classique pour l'advection chaotique [7]. Elle a un rapport de forme  $H/L = 0,6$ . Pour le protocole d'agitation, une vitesse constante  $U$  est imposée alternativement aux parois latérales au cours de chaque période (Fig. 2). La période adimensionnelle  $\tau$  est un des paramètres qui contrôle l'efficacité du mélange. La taille de la période considérée  $\tau = 10$  permet à chacune des deux parois en mouvement de parcourir la cavité 5 fois. L'écoulement choisi est fortement laminaire avec un nombre de Reynolds de référence égal à 1, basé sur la viscosité du magma initial chaud (1200 °C).

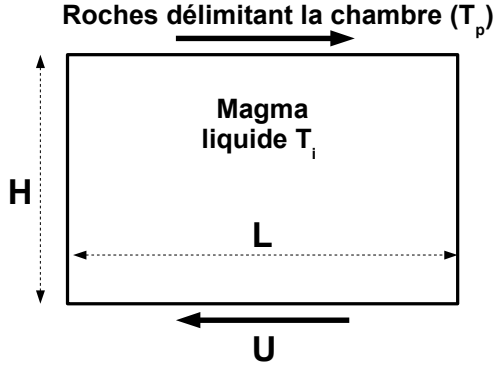


Figure 1 : Schéma du domaine d'écoulement (chambre magmatique) étudié. La chambre peut être horizontale.

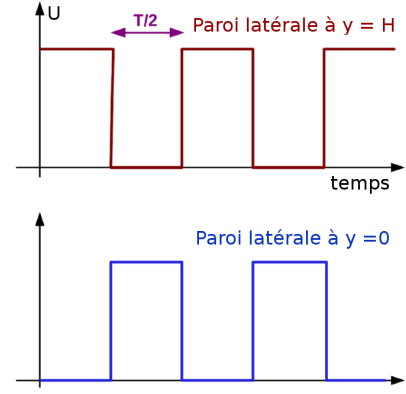


Figure 2 : Modulations temporelles du mouvement des deux parois latérales mobiles de la chambre.

### 3. Problème mathématique

#### 3.1. Équations de conservation et paramètres de l'écoulement

Les équations résolues sont celles de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, qui s'écrivent dans leur forme adimensionnelle comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{\mu_0} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right) \quad (3)$$

$$\partial_t T^* + \mathbf{v} \cdot \nabla T^* = \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 T^* \quad (4)$$

où

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu_0}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 C_p}{k} \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T - T_p}{T_i - T_p}$$

Les échelles caractéristiques pour l'adimensionnement sont  $L$ ,  $U$ ,  $U/L$  et  $\rho U^2$  respectivement pour l'espace, la vitesse, le temps et la pression.

#### 3.2. Méthode numérique

Les équations de conservation (2 à 4) sont résolues à l'aide du code de calcul parallèle Tamaris que nous développons. Ce code utilise la méthode des volumes finis non structurés. Les schémas numériques sont d'ordre 2 de précision aussi bien pour l'espace que pour le temps. Ce dernier est discrétisé par une formulation implicite. Les termes convectifs sont approchés par le schéma non linéaire haute résolution (CUBISTA) assurant une très faible diffusion numérique, ce qui permet de ne pas surestimer l'effet de la diffusion thermique sur le mélange. Plus de détails sur ce code peuvent être trouvés dans [9]. Après une étude de sensibilité des résultats au maillage, un maillage suffisamment fin de 54000 cellules a été choisi. On pourra se référer aux publications [3], [8] et [9] pour trouver différents cas de validation du code de calcul pour des liquides avec différents types de comportement rhéologique.

## 4. Résultats

### 4.1. Formes de l'écoulement et motifs du champ de la température

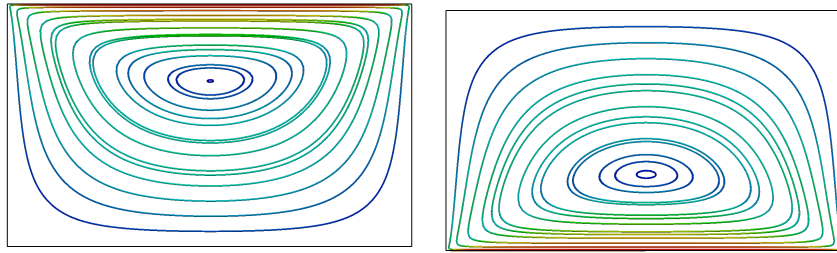


Figure 3 : Lignes de courant durant la première (gauche) et la deuxième moitié (droite) d'une période.

Sur la figure 3 on peut voir les lignes de courant de l'écoulement relativement simple qui règne dans la cavité durant les deux moitiés d'une période. Malgré leur simplicité, l'alternance de ces deux champs de la vitesse dans la cavité conduit à un champ complexe des températures comme on peut le voir sur la figure 4, qui représente des instantanés du champ de la température à différents instants mais néanmoins en phase, et pour deux valeurs du nombre de Pearson  $B$ . On observe en effet, la formation de différentes zones avec des niveaux de température très variés. Pour  $B = 0$ , on note la présence de zones *mal* mélangées (chaudes) qui persistent dans la chambre. La thermodépendance a un effet notable, puisque ces zones chaudes ne sont pas présentes pour  $B = 5$ . Cela est dû à l'importante augmentation de la viscosité du magma thermodépendant au niveau des parois froides, ce qui augmente l'entraînement du liquide par les parois mobiles et améliore le brassage.

### 4.2. Évolution des grandeurs statistiques

L'impact de la thermodépendance de la viscosité sur le mélange du magma peut être apprécié à l'aide d'indicateurs globaux. Ainsi, sur la figure 5 nous observons l'évolution de la température moyenne  $T_m^*$  dans la chambre. La chute de cette température peut être qualifiée de quasi-exponentielle lorsque l'advection chaotique est présente. Le cas purement conductif (parois statiques) est donné comme référence et on peut noter dans ce cas le caractère *lent* du mélange, puisque basé uniquement sur la diffusion. Ce cas se caractérise aussi par un champ de températures très simple (isothermes concentriques). On note aussi que  $T_m^*$  est plus basse quand  $B$  est plus grand. L'examen de la variance  $\sigma^2$  du champ de  $T^*$  (Fig. 6) nous montre que plus  $B$  est élevé plus la création de gradients dans le champ de températures est élevée au cours des 10 premières périodes, leur lissage est par la suite plus fort. L'évolution de l'échange thermique pariétal (Fig. 7) montre également une baisse du nombre de Nusselt globalement exponentielle, avec la présence de modulations périodiques liées aux mouvements de la paroi. Pour  $B = 10$ , les fortes non linéarités introduites par la thermodépendance se traduisent par des fluctuations importantes et non régulières de l'évolution du nombre de Nusselt. Sans advection chaotique (cas conductif) le transfert thermique montre un ralentissement important.

### 4.3. Fonctions de distribution de probabilité et motifs récurrents

La distribution des températures au sein du magma est analysée à l'aide des fonctions de distribution de probabilité (PDF) sur la figure 8 pour les trois valeurs de  $B$  étudiées. Ces PDF

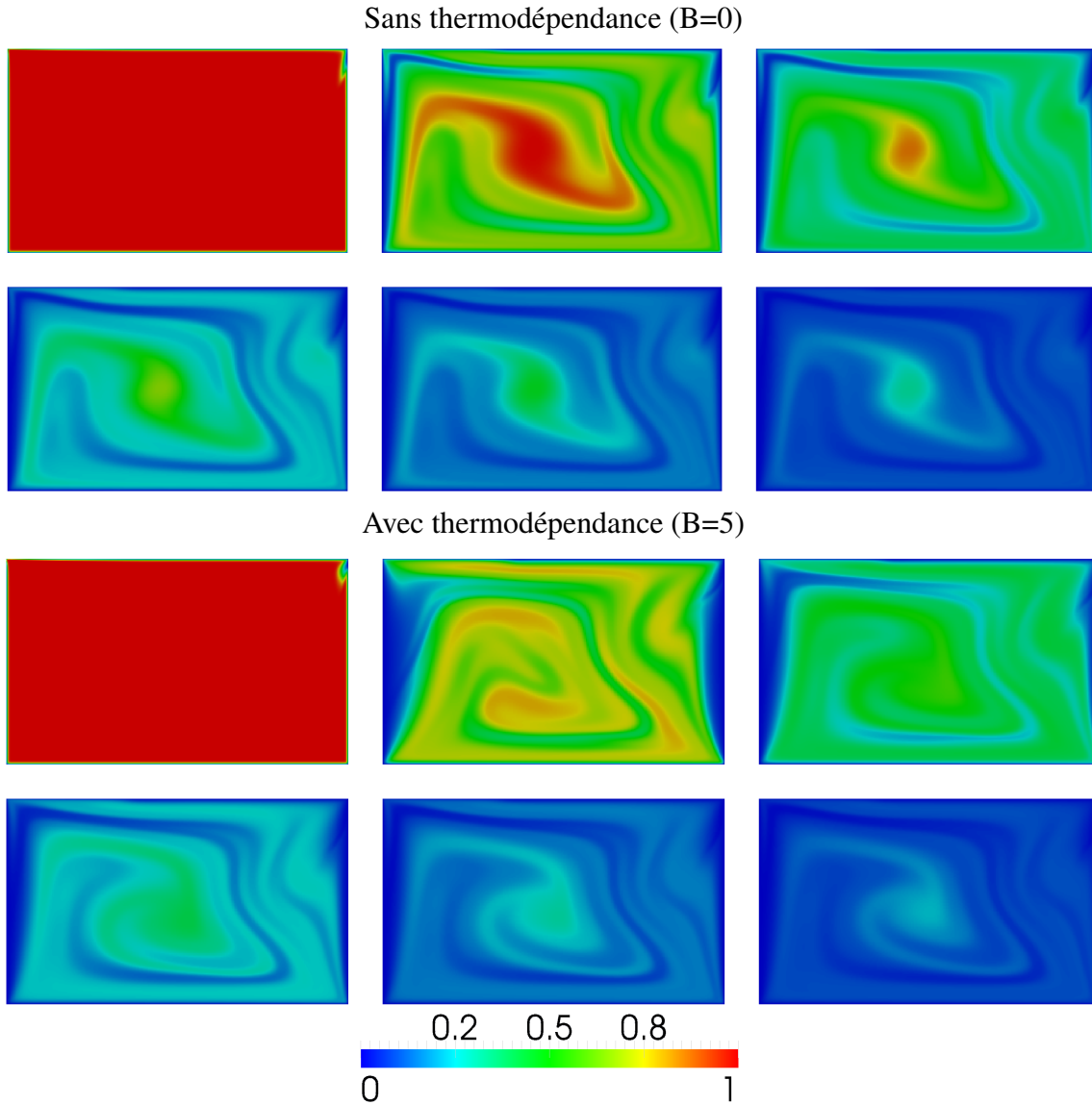


Figure 4 : Champs de la température à des instants périodiques  $t = 0, 5\tau, 10\tau, 15\tau, 20\tau, 25\tau$  et  $30\tau$  (de gauche à droite et de haut en bas), pour  $B = 0$  et 5.

sont données à des instants en phase mais à différentes périodes. On observe sur ces figures que le pic des températures les plus probables se décale progressivement vers les températures les plus froides en augmentant d'amplitude. Ce pic est plus élevé et plus proche de  $T^* = 0$  lorsque  $B$  est plus grand. Quand la température  $T^*$  est réduite à l'aide de l'écart type  $\sigma$  selon :

$$X = \frac{T^* - T_m^*}{\sigma} \quad (5)$$

les PDF de cette nouvelle quantité  $X$  se superposent pour tous les instants périodiques (Fig. 9). Cela est surtout vrai pour  $B = 0$  et traduit l'apparition de motifs auto-similaires récurrents au sein du champ de la température (appelés également modes propres étranges). Avec l'augmentation de la thermodépendance et de la non linéarité due au lien plus fort entre le champ de la vitesse (qui n'est plus celui de la figure 3) et le champ de température, les motifs de l'écoulement ne sont plus récurrents et l'écoulement devient encore plus complexe.

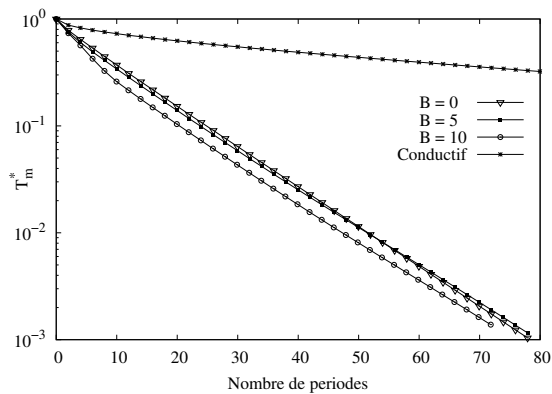


Figure 5 : Evolution de la température moyenne pour différents degrés de thermodépendance  $B$ , comparées au cas conductif.

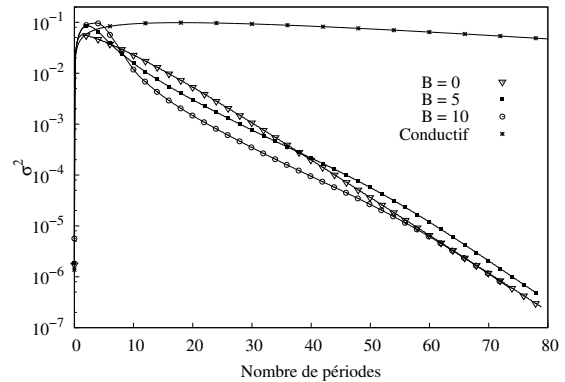


Figure 6 : Evolution de la variance pour différents degrés de thermodépendance ( $B$ ), comparées au cas conductif.

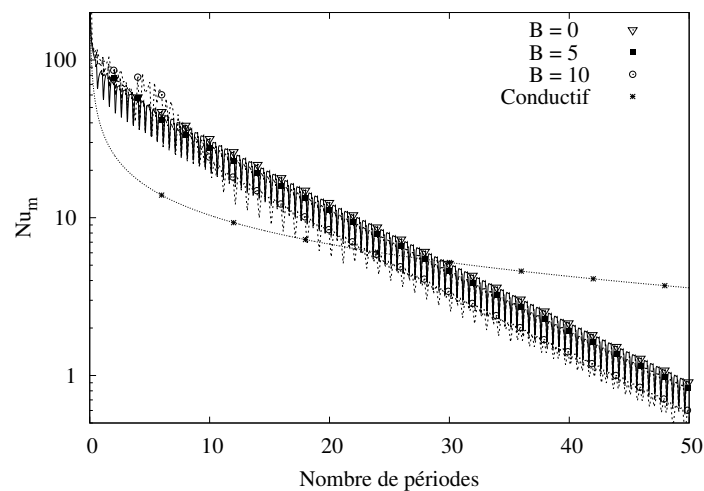


Figure 7 : Évolution du Nusselt moyen sur une paroi latérale pour différentes valeurs de  $B$  et pour un cas conductif pur.

## 5. Conclusion

Dans cette première étude nous avons tenté de vérifier l'hypothèse selon laquelle la grande variété de composition chimique observée dans des magmas solidifiés ne provient pas nécessairement de différents magmas, mais bien d'un seul magma initial qui aurait subi un refroidissement conjugué à de l'advection chaotique au sein d'une chambre magmatique. A l'aide d'une modélisation simplifiée de l'écoulement dans une cavité modèle, nous avons montré, qu'en effet, des motifs très variés apparaissent dans le champ des températures et des zones distinctes subissent des cinétiques de refroidissement très différentes, qui sont certainement à l'origine de ces différences de composition chimique. La thermodépendance de la viscosité ajoute un degré supplémentaire de complexité, les hétérogénéités spatio-temporelles de la température observées sur les cartographies ne sont cependant pas bien traduites par les quantités spatiales globales suivies (température moyenne, variance associée et nombre de Nusselt). D'autres phénomènes importants pour ce problème sont envisagés, comme les courants de convection natu-

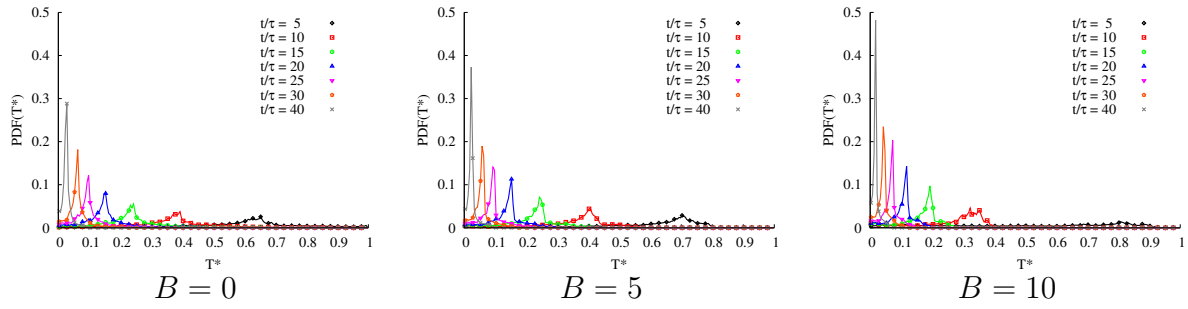


Figure 8 : Allure des PDF de la température à des instants périodiques pour trois degrés de thermodépendance ( $B$ ).

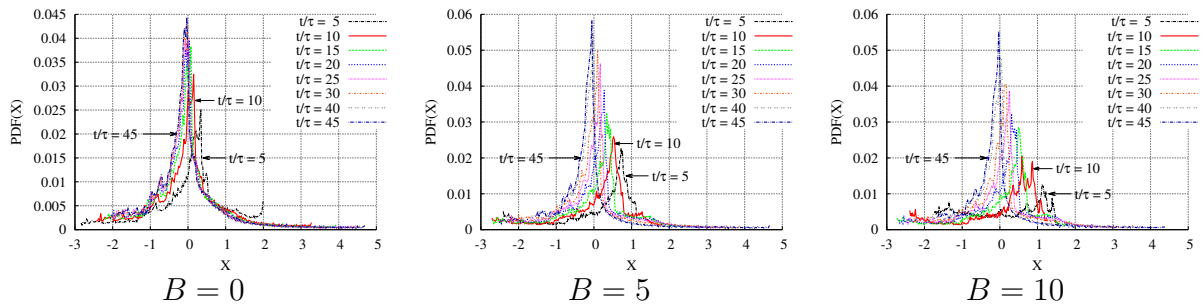


Figure 9 : Allure des PDF de la température réduite  $X$  à des instants périodiques pour trois degrés de thermodépendance ( $B$ ).

relle ou les comportement rhéologiques non newtoniens (prise en compte d'un fluide à seuil) avant d'aborder le problème plus complexe de la cristallisation.

## Références

- [1] Perugini D. and Poli G. The mixing of magmas in plutonic and volcanic environments : analogies and differences. *Lithos*, 153 (2012) 261-277.
- [2] El Omari K., Le Guer Y and Perugini D., Cooling of a magmatic system under thermal chaotic mixing. Submitted to *Pure and Applied Geophysics*, march 2014.
- [3] El Omari K. and Le Guer Y. Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 53 (2010) 123-134.
- [4] Le Guer Y. and El Omari K., Chaotic advection for thermal mixing. *Adv. in Applied Mechanics* 45 (2012) 189-237.
- [5] Costa A. and Macedonio G., Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity : implications for magma flows. *Nonlin. Processes Geophys.*, 10 (2003) 545–555.
- [6] Aref H., Stirring by chaotic advection, *J. Fluid Mech.* 143 (1984).
- [7] Liu M., Peskin R. L., Muzzio F. J. and Leong C. W., Structure of the stretching field in chaotic cavity flows, *AIChE Journal.*, 40 (1994) 1273–1286.
- [8] El Omari K. and Le Guer Y., Thermal chaotic mixing of power law fluids in an alternate rotating walls mixer, *Int. J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 165 (2010), 11-12, 641-651.
- [9] Bammou L., El Omari K., Blancher S., Le Guer Y., Benhamou B. and Mediouni T., A numerical study of the longitudinal thermoconvective rolls in a mixed convection flow in a horizontal channel with a free surface, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 42 (2013) 265–277.