

Étude numérique de l'interaction entre un canal vertical asymétriquement chauffé et son environnement extérieur

Charles GARNIER^{1,2*}, Anne SERGENT^{1,2}, Yann FRAIGNEAU¹, Patrick LE QUERE¹

¹ LIMSI, CNRS UPR 3251, Bât 508 - BP 133 - 91403 Orsay, France

² Université Pierre et Marie Curie - Paris 06, 4 place Jussieu 75005 Paris, France

* (auteur correspondant : charles.garnier@limsi.fr)

Résumé - Ce travail vise à établir un jeu de conditions limites modélisant l'interaction d'un canal vertical 2D asymétriquement chauffé avec un réservoir infini. L'étude montre un fort couplage entre le canal et l'environnement extérieur. Des profils de pression sont extraits d'une simulation complète avec environnement pour modéliser les interfaces du canal. A partir de ces données, deux jeux de conditions limites sont proposés (condition de Neumann homogène sur la vitesse d'entrée ou de contrainte tangentielle nulle) et comparés à des conditions limites de Bernoulli local. On montre que l'écoulement en bas du canal n'est correctement approché que si le profil de pression lié à l'environnement extérieur est combiné à une contrainte tangentielle nulle.

Nomenclature

H	hauteur, m	U	vitesse horizontale adimensionnelle
L	largeur, m	V	vitesse verticale adimensionnelle
Nu	nombre de Nusselt à la paroi chauffée	<i>Symboles grecs</i>	
P	pression motrice adimensionnelle	α	diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl	β	coefficient d'expansion volumique, K^{-1}
q''	densité de flux, $W \cdot m^{-2}$	λ	conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Ra	nombre de Rayleigh	θ	température, K
T	température adimensionnelle, $T = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta T}$	ν	viscosité cinématique, $m^2 \cdot s^{-1}$

1. Introduction

Les écoulements ouverts de convection naturelle sont présents dans les systèmes industriels tels que le refroidissement passif des bâtiments, le refroidissement des panneaux solaires ou la cheminée solaire. Le canal vertical est un prototype de ces configurations. On s'intéresse ici à l'interaction entre un canal vertical asymétriquement chauffé et son environnement extérieur.

Les premières études expérimentales (Elenbaas [1], Wirtz et Stutzman [2], Webb et Hill [3]) ont mis en évidence deux régimes dynamiques au sein d'un canal vertical. A faible nombre de Rayleigh, un régime pleinement développé est observé. Le fluide entre dans le canal par le bas et sort par le haut sous la forme d'un jet en atmosphère libre. L'écoulement est proche d'un écoulement de Poiseuille. A haut nombre de Rayleigh, un régime de type couche limite avec une cellule de recirculation dans la partie supérieure du canal est observé (Sparrow *et al* [4], Kihm *et al* [5]). Pour le cas d'un canal asymétriquement chauffé, ces premières études ont observé une structure de l'écoulement de retour en haut du canal en forme de V. Le fluide froid entrant par le haut du canal vient alors alimenter la couche limite thermique. Récemment, l'expérience menée dans un réservoir par Ospir *et al* [6] a permis d'observer un régime de type couche limite mais avec une zone de recirculation en haut du canal composée de deux cellules co-rotatives. Dupont *et al* [7] et Sanvicente *et al* [8] ont observé une zone de recirculation évoluant en temps et en

espace. La variété des structures de la zone de recirculation obtenues expérimentalement pose la question de l'influence de l'environnement extérieur sur le comportement de l'écoulement au sein du canal.

Plusieurs études numériques (Barozzi *et al* [9], Gan [10]) ont donc considéré à la fois le canal et son environnement extérieur. Il a été montré que la dimension et les conditions limites appliquées sur le domaine extérieur doivent faire l'objet d'une attention particulière. Si les dimensions du réservoir ne sont pas assez grandes, le confinement modifie l'écoulement dans le canal. De plus, le fluide dans le réservoir va s'échauffer rapidement et ainsi limiter l'effet de la poussée d'Archimède dans le canal. Cependant, modéliser le fluide dans l'environnement n'est pas toujours possible, soit parce que l'on cherche à modéliser un canal dans un environnement infini, soit en raison d'un coût de calcul élevé. Ainsi plusieurs modélisations de l'écoulement aux interfaces haute et basse du canal ont été proposées de façon à réduire le domaine de calcul aux limites géométriques du canal. Dalbert *et al* [11] ont proposé de prendre en compte la chute de pression en bas du canal due à l'aspiration du fluide. La loi de Bernoulli est appliquée en considérant un environnement extérieur à pression et température constantes. En haut du canal, le fluide est considéré sortant comme un jet en atmosphère libre. Un récent travail de collaboration [12] donne des solutions de référence pour un ensemble de conditions limites basées sur la loi de Bernoulli, mais ne conclut pas quant à la pertinence physique de ces conditions limites. La modélisation de l'interaction entre l'écoulement dans le canal et l'environnement extérieur reste donc une question ouverte.

Dans ce travail, nous proposons de mettre en évidence l'effet des conditions limites aux interfaces du canal en comparant les résultats obtenus pour un canal seul à des simulations complètes d'un canal immergé dans un réservoir. L'objectif de ce travail est d'identifier un jeu de conditions limites aux interfaces permettant de reproduire l'interaction entre un environnement infini et un canal vertical. L'article est organisé de la façon suivante : après avoir présenté le problème physique dans la section 2 pour les deux configurations considérées, les méthodes numériques mises en oeuvre sont décrites (section 3). L'influence de la géométrie du réservoir est discutée à la section 4.1, et trois jeux de conditions limites aux interfaces du canal sont considérés (section 4.2) allant des conditions limites standards à l'introduction d'un profil de pression réaliste. Une conclusion est ensuite donnée (section 5).

2. Problème physique

On considère un canal vertical 2D chauffé à flux constant q'' sur la moitié de la paroi intérieure gauche, les autres parois (externe et interne) sont adiabatiques. Le canal est ouvert à ses extrémités haute et basse. Cette configuration a été proposée dans les études expérimentales [3, 6] et adoptée comme cas test numérique [12]. Le fluide considéré est de l'eau ($Pr = 7.85$). Nous étudions ici deux approches numériques différentes. La modélisation du canal sans domaine extérieur, notée *IC* (Canal Isolé) et la modélisation "complète" de l'écoulement dans le canal et dans le domaine extérieur, notée *CE* (Canal avec Environnement). Pour les deux approches, le même canal vertical est considéré (fig. 1). Trois rapports d'aspects sont définis : Rf_c pour le canal, Rf_t pour le réservoir et Rf représentant le rapport réservoir/canal (voir fig.1 pour les définitions). Les équations instationnaires 2D de Boussinesq sont résolues. Elles sont adimensionnées en utilisant la largeur du canal L_C comme échelle de longueur, la vitesse de référence est définie comme $\frac{\alpha Ra^{1/2}}{L_C}$ (où $Ra = \frac{g\beta q'' L_C^4}{\alpha\nu\lambda}$) et la différence de température $\Delta T = \frac{q'' L_C}{\lambda}$. A l'état initial, le fluide est considéré au repos et à température constante θ_0 .

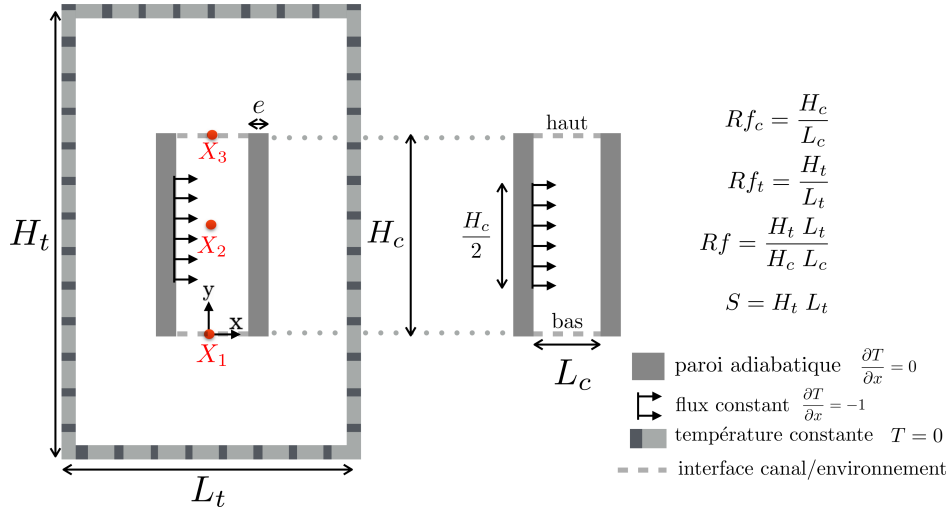


Figure 1 Configurations étudiées : canal vertical avec environnement extérieur (gauche) ou sans environnement extérieur (droite)

Cas	H_t	L_t	H_c	L_c	e	Rf_t	Rf_c	Rf
CE10	20	5	10	1	0.1	4	10	10
CE40	40	10	10	1	0.1	4	10	40
CE160	80	20	10	1	0.1	4	10	160
CE640	160	40	10	1	0.1	4	10	640
IC	/	/	10	1	/	/	10	/

position	X	Y
X_1	0	0
X_2	0	$H_c/2$
X_3	0	H_c

Tableau 1 Définition de l'ensemble des configurations d'étude

Canal sans son environnement extérieur IC L'écoulement dans le canal vertical est simulé sans modéliser le domaine extérieur, mais en considérant les interfaces haute et basse du canal ouvertes sur deux milieux semi-infinis à pression P_0 et température θ_0 . Les limites du domaine de calcul correspondent aux limites géométriques du canal (fig. 1). Le canal est chauffé à flux constant sur la moitié d'une de ses parois, les autres parois sont adiabatiques. Une condition de non-glissement est imposée aux parois. Différents jeux de conditions limites (vitesse-pression-température) appliquées aux interfaces du canal seront étudiées dans la partie 4.2.

Canal avec son environnement extérieur CE Le canal est immergé au centre d'un réservoir fermé dont les parois sont maintenues à θ_0 . Les conditions limites thermiques pour les parois intérieures du canal sont identiques au cas IC (fig. 1). Les parois non-chauffées internes et externes du canal sont adiabatiques et une condition de non-glissement est imposée sur l'ensemble des parois. Le tableau 1 définit les différentes géométries de réservoir (Rf) étudiées dans ce travail. Les rapports d'aspect du canal Rf_c et du réservoir Rf_t restent constants.

3. Méthodes numériques

Les équations instationnaires 2D de Boussinesq sont discrétisées avec un schéma semi-implicite d'ordre 2. L'avance en temps est effectuée par un schéma d'Euler retardé d'ordre 2. Le problème est discrétisé spatialement par une méthode des volumes finis - schéma MAC. Le couplage vitesse-pression est traité par une méthode de prédiction-projection [13]. L'étape de projection est résolue en utilisant une méthode multigrille. Les simulations sont effectuées avec un code parallèle OpenMP permettant de résoudre des configurations de grandes dimensions.

Tableau 2 Définition des maillages pour les différentes configurations

Cas	Maillage du réservoir	Maillage du canal	Nombre de points dans les parois du canal
CE10	256 x 512	52 x 256	6
CE40	512 x 1024	52 x 256	6
CE160	1024 x 2048	52 x 256	6
CE640	2048 x 4096	52 x 256	6
IC	non pertinent	66 x 256	non pertinent

Pour tous les cas, le maillage est uniforme et ses dimensions sont données dans le tableau 2.

4. Résultats et discussion

Les résultats sont obtenus pour deux nombres de Rayleigh. A $Ra = 5.10^3$, un écoulement pleinement développé est observé (fig. 2). A $Ra = 5.10^5$, une couche limite se développe le long de la paroi chauffée et une zone de recirculation apparaît en haut du canal (fig. 3). L'écoulement est caractérisé par des grandeurs globales : le nombre de Nusselt Nu , la température débitante de sortie T_{bulk} , le débit entrant par le bas du canal G_{bot} ou entrant par le haut G_{top} , dont les définitions sont les suivantes (pour plus de détails voir [12]) :

$$\begin{aligned}
 Nu &= \frac{2}{H_c} \int_{H_c/4}^{3H_c/4} \frac{1}{T(-0.5, y)} dy & T_{bulk} &= \left(\int_{-0.5}^{0.5} V(x, H_c) T(x, H_c) dx \right) / \left(\int_{-0.5}^{0.5} V(x, 0) dx \right) \\
 G_{bot} &= \int_{-0.5}^{0.5} V(x, 0) dx & G_{top} &= \int_{x_0}^{0.5} V(x, H_c) dx \text{ où } x_0 \text{ tel que } V(x_0, H_c) = 0.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Cette étude se décompose en deux étapes. Tout d'abord, nous étudions l'influence de la taille du réservoir (section 4.1) dans l'objectif d'identifier des instants pour lesquels on peut considérer que l'écoulement dans le canal est indépendant de l'environnement extérieur. Ces champs de référence nous permettront de valider les jeux de conditions limites à la section 4.2.

4.1. Influence de l'environnement extérieur

Cas $Ra = 5.10^3$ La figure 2 présente les champs de température instantanés obtenus à $t = 50$ pour $CE10$ et $CE640$. On note le fort couplage entre le canal et l'environnement extérieur dans le cas $CE10$. Celui-ci est lié au bouclage de l'écoulement entre le haut et le bas du canal via l'environnement extérieur (particulièrement visible avec les lignes de courant), au jet de sortie du canal impactant sur la paroi haute du réservoir et à l'établissement d'une stratification du milieu extérieur. Ainsi pour les petits réservoirs ($CE10$ et $CE40$) le débit G_{bot} ainsi que le nombre de Nusselt Nu décroissent avec le temps. Cela s'explique par l'établissement d'une stratification thermique dans le réservoir entraînant une stratification de la pression motrice. Celle-ci joue le rôle de bouchon et limite l'effet cheminée et ainsi réduire les vitesses verticales (fig. 2-droite). La stratification sera d'autant plus lente à s'établir que le réservoir est grand.

On remarque que pour les plus grands réservoirs ($CE160$ et $CE640$), l'écoulement dans le canal est indépendant de la taille de l'environnement extérieur après la phase d'établissement (soit pour $t \gtrsim 50$). Ceci est confirmé par l'évolution temporelle des grandeurs globales de l'écoulement (voir tab. 3) et notamment de G_{bot} . L'évolution temporelle de la vitesse verticale en différents points du canal présente alors un régime stationnaire pour $t \gtrsim 50$, tant que le fluide sort du canal comme un jet en atmosphère libre et que le panache formé reste loin de la paroi supérieure du réservoir. En conséquence, on prendra le cas $CE640$ pour $t = 50$ comme champ de référence pour l'approximation numérique d'un canal vertical dans un environnement infini.

Tableau 3 Grandeurs caractéristiques de l'écoulement à différents instants pour $Ra = 5.10^3$

$Ra = 5.10^3$ time	Nu			G_{bot}			G_{top}			T_{bulk}		
	25	50	100	25	50	100	25	50	100	25	50	100
CE10	3.43	3.36	3.25	0.409	0.391	0.345	0.0	0.0	0.0	0.171	0.173	0.197
CE40	3.46	3.44	3.42	0.421	0.427	0.420	0.0	0.0	0.0	0.163	0.162	0.165
CE160	3.46	3.44	3.44	0.428	0.432	0.433	0.0	0.0	0.0	0.160	0.160	0.160
CE640	3.39	3.37	3.37	0.430	0.433	0.433	0.0	0.0	0.0	0.158	0.158	0.158

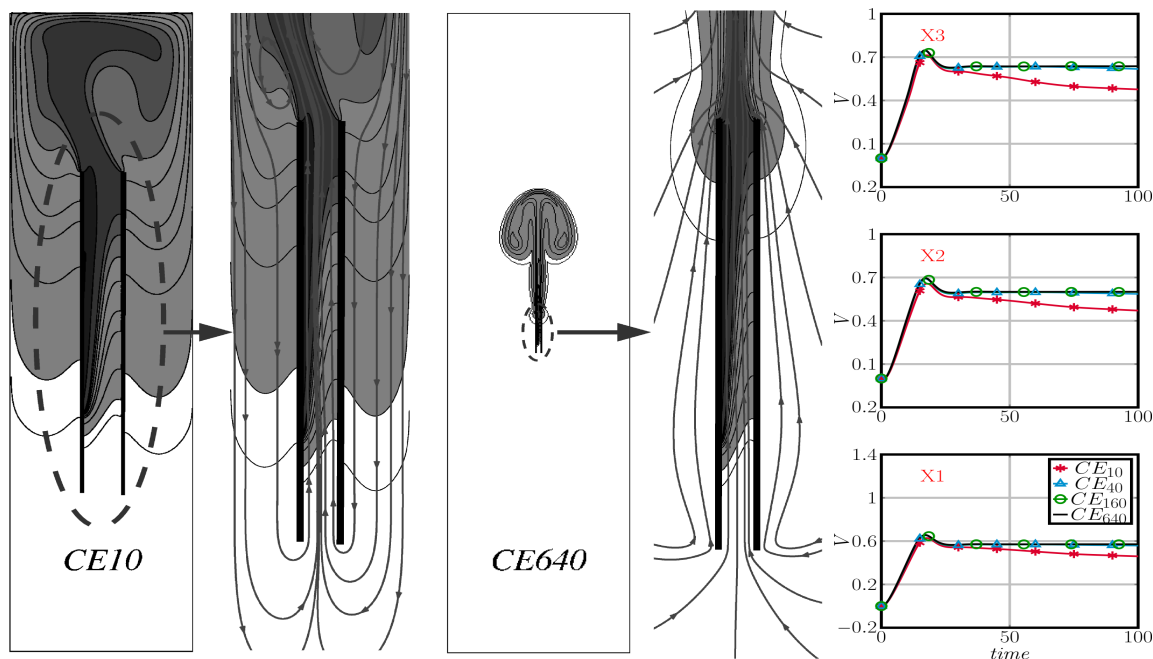


Figure 2 $Ra = 5.10^3$: champs instantanés de température à $t = 50$ pour CE10 et CE640 (gauche) ; séries temporelles de vitesse verticale V en X_1 , X_2 , X_3 pour CE10, CE40, CE160 et CE640 (droite)

Cas $Ra = 5.10^5$ La figure 3 présente plusieurs champs instantanés de température pour CE640. En régime de couche limite, une cellule de recirculation en forme de V apparaît en haut du canal. Le fluide entre dans le canal à la fois par le bas et le haut, et sort en haut du canal sous la forme d'un jet oscillant. Ce jet a un effet direct sur l'évolution spatio-temporelle de la zone de recirculation dans le canal, qui grandit ou rétrécit suivant la position du jet (non montrée ici). Ce comportement s'observe sur l'évolution temporelle de la vitesse verticale dans le canal (fig. 3-droite), en particulier au point X_3 , où des fluctuations commencent à apparaître (à $t \approx 280$ pour CE640, $t \approx 150$ pour CE160). L'amplitude des fluctuations est plus faible pour CE160 que CE640 du fait d'un plus grand confinement.

Pour la section 4.2, on retiendra le cas CE640 pour $t = 100$ comme champ de référence de façon à limiter l'effet du confinement et s'affranchir des effets liés à l'apparition d'oscillations.

Discussion En conséquence, la forte connexion entre stratification thermique / jet de sortie et l'écoulement dans le canal démontre qu'un canal vertical ne peut pas être isolé de son environnement extérieur, que ce soit en ce qui concerne la stratification thermique extérieure ou bien la nature instationnaire du jet de sortie. Il semble donc nécessaire d'introduire ces ingrédients dans la modélisation des conditions limites haute et basse du canal si on ne souhaite simuler que l'intérieur du canal tout en cherchant à approcher au mieux des écoulements avec environnement extérieur. Ceci est l'objectif de la section 4.2, dans laquelle trois jeux de conditions limites sont comparés : les conditions limites standards de Bernoulli local [12], et deux autres jeux se

basant sur les profils de pression aux interfaces haute et basse du canal extraits des champs *CE640* (environnement le moins confiné).

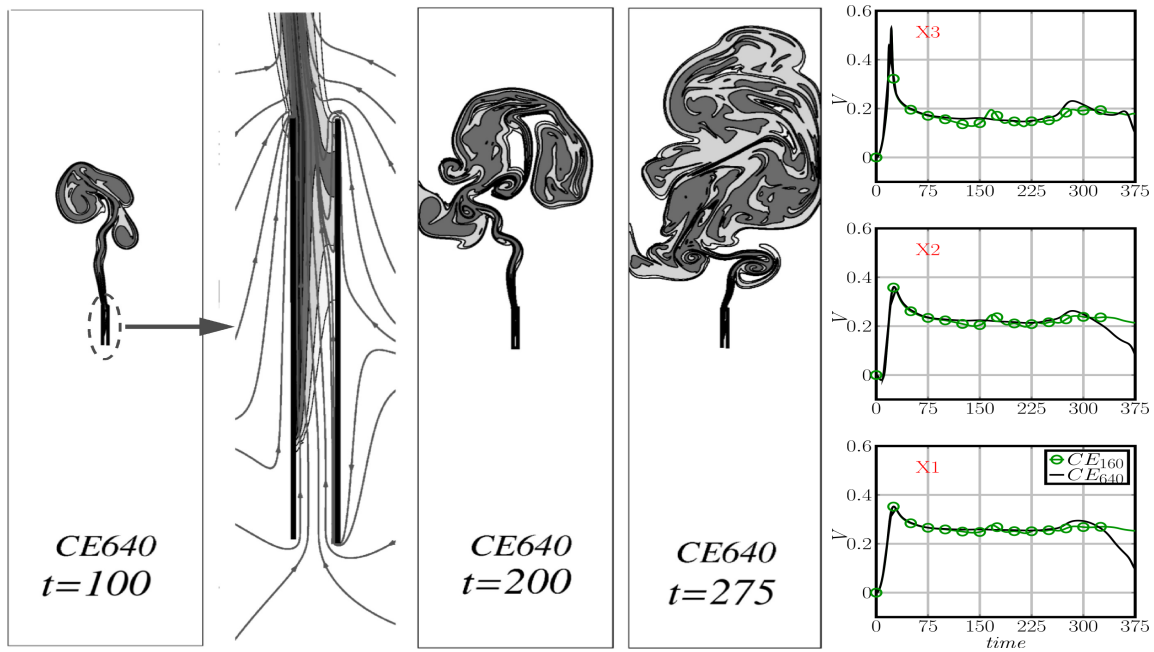


Figure 3 $Ra = 5.10^5$: champs instantanés de température à $t = 100, 200, 275$ pour le cas *CE640* (gauche) ; séries temporelles de vitesse verticale V en X_1, X_2, X_3 pour *CE160* et *CE640* (droite)

4.2. Comparaison des conditions limites pour le canal sans son environnement extérieur

Trois jeux de conditions limites sont étudiés. Le premier jeu IC_{LB} est basé sur la loi de Bernoulli local et a été proposé par [12]. Le deuxième jeu IC_P s'appuie sur les profils de pression extraits du cas *CE640* associés à des conditions de Neumann homogènes pour la vitesse et la température (fluide sortant) ou de Dirichlet pour la température (fluide sortant) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si le fluide entre } \mathbf{V} \cdot \mathbf{y} < 0 \quad T = 0, \quad P = P_{CE_{640}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \text{si le fluide sort } \mathbf{V} \cdot \mathbf{y} > 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad P = P_{CE_{640}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Le troisième jeu IC_{stress} est le même que IC_P , mais avec une contrainte tangentielle nulle sur l'interface basse du canal où on impose $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$. Toutes les simulations effectuées conduisent à un écoulement stationnaire dans le canal.

On note le peu d'influence des conditions limites sur les quantités globales de l'écoulement (tab. 4). Cependant, on remarque que le débit d'entrée G_{bot} est sous-estimé par IC_{LB} à $Ra = 5.10^3$ et surestimé par IC_P à $Ra = 5.10^5$. De plus, à $Ra = 5.10^3$ la modélisation de l'interface haute surestime la température débitante T_{bulk} pour toutes les configurations IC .

Pour mieux interpréter l'effet des conditions limites sur les grandeurs globales de l'écoulement, on s'intéresse aux profils des différentes variables sur les interfaces (fig. 4, 5) pour les différentes conditions limites et la solution de référence obtenue avec environnement *CE640*. Pour les deux Ra considérés, on peut noter que le profil de température aux interfaces est toujours bien représenté, même si l'influence de l'environnement extérieur est visible à $Ra = 5.10^3$. Même si le profil de vitesse verticale sur l'interface basse est qualitativement bien représenté par toutes

$Ra = 5.10^3$	Nu	G_{bot}	G_{top}	T_{bulk}	$Ra = 5.10^5$	Nu	G_{bot}	G_{top}	T_{bulk}
IC_P	3.35	0.428	0	0.165	IC_P	7.93	0.233	$5.864 \cdot 10^{-3}$	$3.048 \cdot 10^{-2}$
IC_stress	3.35	0.430	0	0.166	IC_stress	7.93	0.216	$1.189 \cdot 10^{-2}$	$3.264 \cdot 10^{-2}$
IC_LB	3.33	0.419	0	0.168	IC_LB	7.92	0.213	$1.262 \cdot 10^{-2}$	$3.307 \cdot 10^{-2}$
$CE640, t = 50$	3.37	0.433	0	0.158	$CE640, t = 100$	7.84	0.216	$1.338 \cdot 10^{-2}$	$3.223 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4 Comparaison des grandeurs globales pour CE640 et IC à $Ra = 5.10^3$ et $Ra = 5.10^5$

les configurations IC à $Ra = 5.10^3$, IC_P impose sur l'interface basse (pour les deux Ra) un frottement pariétal beaucoup trop faible. Cette mauvaise approximation de l'écoulement à l'interface basse est encore plus notable à $Ra = 5.10^5$ où IC_P produit un écoulement non physique en entrée car divergent sur le profil de vitesse horizontale. En revanche imposer une contrainte tangentielle nulle IC_stress corrige ce défaut, et permet d'obtenir une meilleure approximation du profil de vitesse horizontale, mais nécessite la connaissance du profil de pression. IC_LB donne une bonne approximation pour V pour les deux Ra , sans nécessiter la connaissance *a priori* du profil de pression. Cependant, il impose une vitesse horizontale nulle aux interfaces et une mauvaise approximation de la distribution de pression.

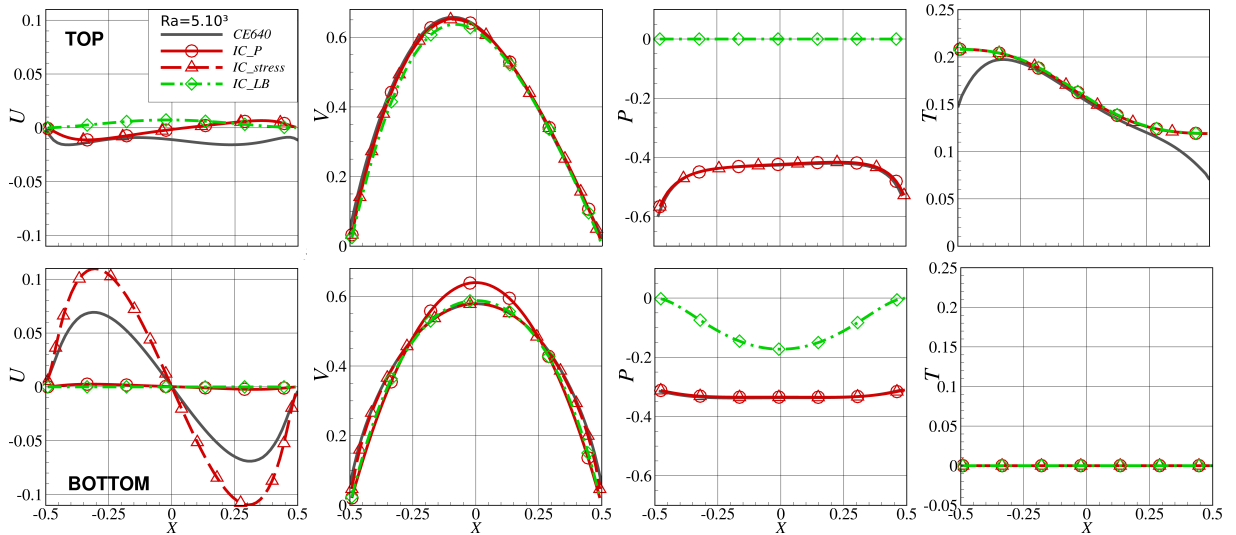


Figure 4 Comparaison de U , V , P et T aux interfaces haute et basse du canal pour $Ra = 5.10^3$

5. Conclusion

Des simulations d'un canal vertical avec ou sans environnement extérieur ont été réalisées. L'objectif de ce travail est d'identifier un jeu de conditions limites aux interfaces permettant de modéliser l'interaction entre un environnement infini et un canal vertical. Deux approches ont été examinées. La première inclut le canal et son environnement dans le domaine de calcul, la seconde restreint celui-ci aux limites géométriques du canal. La première approche montre le fort couplage entre l'écoulement dans le canal et l'environnement extérieur au travers de la stratification thermique ou du caractère instationnaire du jet sortant du canal. Cette première conclusion met en évidence la difficulté d'une simulation "réduite" au seul canal. Nous avons alors testé une modélisation des interfaces haute et basse du canal basée sur l'extraction des profils de pression d'une simulation complète avec environnement. A partir de ces données, deux jeux de conditions limites ont été proposés avec une condition de Neumann homogène sur la vitesse d'entrée ou une contrainte tangentielle nulle. Les résultats obtenus sont comparés à

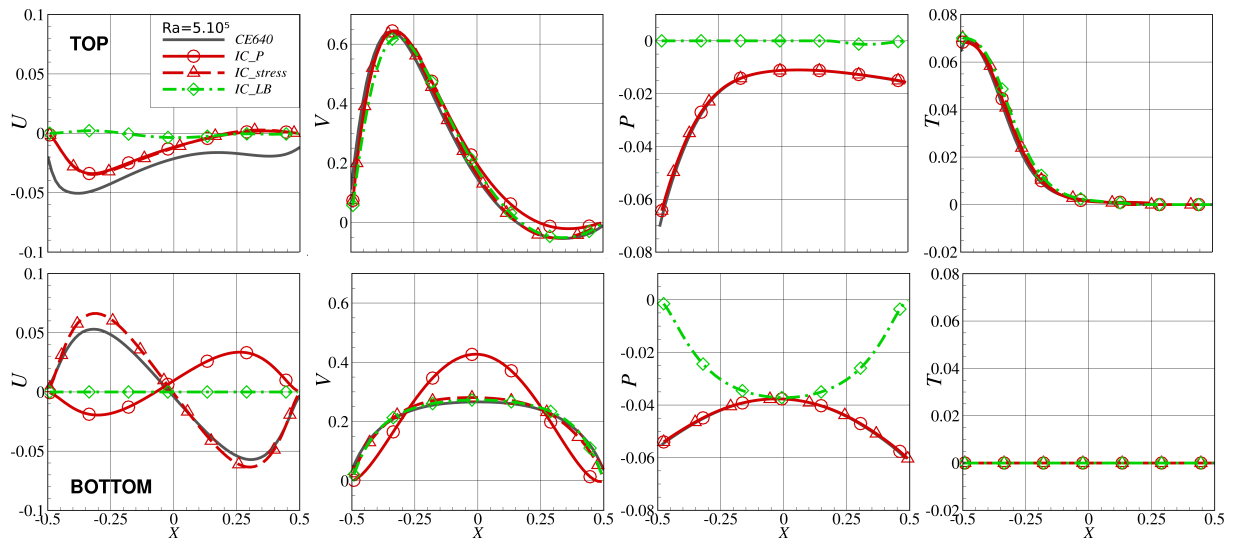


Figure 5 Comparaison de U , V , P et T aux interfaces haute et basse du canal pour $Ra = 5.10^5$

des simulations imposant des conditions limites de Bernoulli local. On montre que même si les quantités globales de l'écoulement dans le canal sont en général bien estimées, l'écoulement aux interfaces du canal et en particulier sur l'interface basse n'est correctement approché que si le profil de pression lié à l'environnement extérieur est connu et qu'une contrainte tangentielle nulle est imposée en bas du canal.

Références

- [1] Elenbaas W., Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection, *Physica*, 9 (1942), 1–28
- [2] Wirtz R.A. and Stutzman R.J., Experiments on Free Convection Between Plates with Symmetric Heating, *Journal of Heat Transfer*, 104 (1982) 501–507
- [3] Webb B.W. and Hill D.P., High Rayleigh Number Laminar Natural Convection in an Asymmetrically Heated Vertical Channel, *Transactions of the ASME*, 111 (1989) 649–656
- [4] Sparrow E.M. and Chrysler G.M. and Azevedo L.F., Observed Flow Reversals and Measured-predicted Nusselt Numbers for Natural Convection in a One-sided Heated Vertical Channel, *Journal of Heat Transfer*, 106 (1984) 325–332
- [5] Kihm K.D. and Kim J.H. and Fletcher L.S., Onset of Flow Reversal and Penetration Length of Natural Convection Flow Between Isothermal Vertical Walls, *Transactions of the ASME*, 17 (1995) 776–779
- [6] Ospir D. and Popa C. and Chereches C. and Polidori G. and Fohanno S., Flow Visualization of Natural Convection in a Vertical Channel with Asymmetric Heating, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 (2012) 486–493
- [7] Dupont F. and Ternat F. and Samot S. and Blonbou R., Two-dimension Experimental Study of the Reverse Flow in a Free Convection Channel with Active Walls Differentially Heated, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 47 (2013) 150–157
- [8] Sanvicente E. and Giroux-Julien S. and Ménézo C. and Bouia H., Transitional Natural Convection Flow and Heat Transfer in an Open Channel, *International Journal of Thermal Sciences*, 63 (2013) 87–104
- [9] Barozzi G.S. and Corticelli M.A. and Nobile E., Numerical Simulation of Time-dependent Buoyant Flows in an Enclosed Vertical Channel, *Heat and Mass Transfer*, 35 (1999) 89–99
- [10] Gan G., Impact of Computational Domain on the Prediction of Buoyancy-driven Ventilation Cooling, *Building and Environment*, 45 (2010) 1173–1183
- [11] Dalbert A.-M. and Peube J.-L. and Penot F. and Robert J.-F., Etude de l'écoulement dans un collecteur plan, *Revue Phys. Appl.*, 15 (1980) 201–206
- [12] Desrayaud G. and Chenier E. and Joulin A. and Bastide A. and Brangeon B. and Caltagirone J.P. and Cherif Y. and Eymard R. and Garnier C. and Giroux-Julien S. and Harnane Y. and Joubert P. and Laaroussi N. and Lassus S. and Le Quere P. and Li R. and Sergent A. and Xin S. and Zoubir A., Benchmark Solutions for Natural Convection Flows in Vertical Channels Submitted to Different Open Boundary Conditions, *International Journal of Thermal Sciences*, 72 (2013) 18–33
- [13] Goda K., A multistep Technique with Implicit Difference Schemes for Calculating Two - or Three - Dimensional Cavity Flows, *Journal of Computational Physics*, 30 (1979) 76–95