

# Effet du rapport de forme sur la convection naturelle au sein d'une cavité tridimensionnelle soumise à des gradients croisés de température et de concentration

Mohamed ELKARAM<sup>1\*</sup>, Btissam ABOURIDA<sup>1</sup>, Lahoucine BELARCHE<sup>1</sup> et Touria MEDIOUNI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique, Procédés de l'Energie et de l'Environnement (LMP2E)

Ecole Nationale des Sciences Appliquées, B.P. 1136, Agadir-Morocco

\*(auteur correspondant : [mohamedelkaram@gmail.com](mailto:mohamedelkaram@gmail.com))

**Résumé** - La convection thermosolutale dans une cavité parallélépipédique soumise à des gradients croisés de température et de concentration est étudiée numériquement en utilisant une formulation volumes finis tridimensionnelle. Les deux parois verticales, gauches et droites, sont maintenues respectivement à des températures chaude  $T_1$  et froide  $T_0$ , alors que les deux autres parois verticales sont soumises partiellement à un gradient de concentration. Les parois restantes étant adiabatiques.

Les transferts de chaleur et de masse moyens ainsi que l'écoulement du fluide dans la cavité sont étudiés pour différents rapports de forme transversal,  $A_y = B / H$  ( $0.25 \leq A_y \leq 3.5$ ). Les dimensions des sections soumises à des gradients de concentration  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = D / H$ , le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , le rapport de flottabilité  $N$ , ainsi que le nombre de Lewis  $Le$  sont respectivement fixées à 0.3,  $10^5$ , 0.71, 1 et 1. Des lignes de courant, des isothermes et des iso concentrations sont présentées pour mettre en évidence l'importance de l'effet du rapport de forme. Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur et de masse ainsi que l'intensité du flux peuvent être considérablement améliorés par un choix approprié des paramètres gouvernants.

## Nomenclature

$A_y$  rapport de forme transversal,  $B/H$   
 $B$  épaisseur de la cavité, m  
 $D$  dimension des portions,  $m$   
 $g$  accélération de la pesanteur,  $m/s^2$   
 $H$  hauteur de la cavité,  $m$   
 $k$  conductivité thermique,  $w/(m.K)$   
 $L$  longueur de la cavité,  $m$   
 $Le$  nombre de Lewis  
 $Nu$  nombre de Nusselt moyen  
 $N$  rapport de flottabilité  
 $p$  pression adimensionnelle  
 $P$  pression  $N/m^2$   
 $Pr$  nombre de Prandtl,  $\nu/\alpha$   
 $Ra$  nombre de Rayleigh  
 $Sh$  nombre de Sherwood  
 $T$  Température, °K  
 $u, v, w$  composante de vitesse, m/s

$U, V, W$  vitesses adimensionnelles  
 $x, y, z$  coordonnées cartésiennes, m  
 $X, Y, Z$  coordonnées adimensionnelles

### **Symboles grecs**

$\alpha$  diffusivité thermique,  $m^2.s^{-1}$   
 $\theta$  température adimensionnelle  
 $\psi$  fonction de courant  
 $\Phi$  concentration adimensionnelle  
 $\beta_T$  coefficient d'expansion thermique,  $K^{-1}$   
 $\beta_c$  coefficient d'expansion massique  
 $\mu$  viscosité dynamique,  $Kg/(m.s)$   
 $\nu$  viscosité cinématique,  $m^2/s$   
 $\rho$  densité volumique,  $Kg/m^3$

### **Indices et exposants**

0 paroi froide  
1 paroi chaude

## 1. Introduction

La convection naturelle due à la double diffusion, est un phénomène thermique fréquemment rencontré dans de multiples applications pratiques telles que l'océanographie, les processus de séchage, processus de croissance des cristaux, le dessalement solaire... etc. L'intérêt évident de ce type de convection a donné lieu à plusieurs études, théoriques et

pratiques, considérant le cas des gradients de température et de concentration parallèles ou bien croisés [1-2]. Toutefois, on notera que la majorité des travaux disponibles traitent le cas de la double diffusion bidimensionnelle [3-5], alors que le cas tridimensionnelle [6-8] reste très peu abordé, malgré le fait qu'il permet une meilleure simulation de l'écoulement et du transfert thermique et massique au sein de la cavité.

Ceci explique le choix de la présente étude qui consiste à traiter numériquement la convection thermosolutale au sein d'une cavité tridimensionnelle. Les deux parois verticales, gauche et droite, sont maintenues respectivement à des températures froide  $T_0$  et chaude  $T_1$ , alors que les deux autres parois verticales sont soumises partiellement à un gradient de concentration. Les parois restantes étant adiabatiques.

## 2. Définition du problème et modèle mathématique

Le schéma du problème physique et les coordonnées sont indiqués sur la figure 1. Le modèle est constitué d'une cavité tridimensionnelle de dimensions  $L \times H \times B$ . Le rapport de forme transversal de la cavité est défini par  $Ay = B / H$ . Les deux parois verticales, gauche et droite, sont maintenues respectivement à des températures froide  $T_0$  et chaude  $T_1$ , alors que les deux autres parois verticales sont soumises partiellement à un gradient de concentration. Les parois restantes étant adiabatiques.

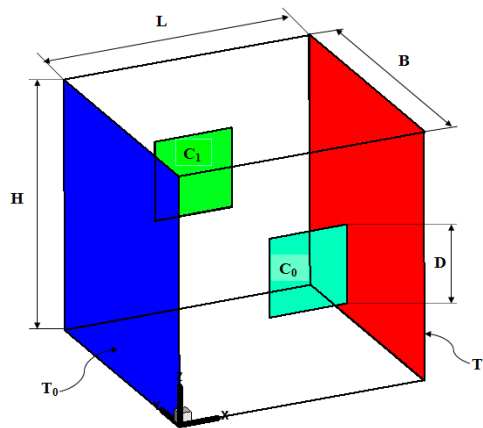


Figure 1 : Géométrie étudiée et système de coordonnées

En tenant compte des approximations de Boussinesq et en négligeant la dissipation visqueuse, les équations adimensionnelles du problème s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial}{\partial X}(U) + V \frac{\partial}{\partial Y}(U) + W \frac{\partial}{\partial Z}(U) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial}{\partial X}(V) + V \frac{\partial}{\partial Y}(V) + W \frac{\partial}{\partial Z}(V) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial}{\partial X}(W) + V \frac{\partial}{\partial Y}(W) + W \frac{\partial}{\partial Z}(W) = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \frac{R_a}{P_r} (\theta - N\Phi) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} + W \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{1}{Sc} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} \right) \quad (6)$$

Où U, V, W, P,  $\theta$  et  $\Phi$  représentent respectivement la vitesse suivant x, la vitesse suivant y, la vitesse suivant z, la pression, la température et la concentration. Les variables adimensionnées utilisées dans ces équations sont définies par :

$$(X, Y, Z) = \left( \frac{x}{H}, \frac{y}{H}, \frac{z}{H} \right), (U, V, W) = \left( \frac{uH}{\alpha}, \frac{vH}{\alpha}, \frac{wH}{\alpha} \right), \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \text{ et } \Phi = \frac{C - C_0}{C_1 - C_0}$$

Les paramètres Pr, Ra et N désignent respectivement le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh et le rapport de flottabilité . Ces paramètres sont définis par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, Ra = \frac{g \beta_r k (T_1 - T_0) H^3}{\alpha \nu} \text{ et } N = \frac{\beta_c (C_1 - C_0)}{\beta_r (T_1 - T_0)}$$

Les conditions aux limites thermiques et massiques adimensionnelles associées aux équations précédentes sont les suivantes :

- Paroi verticale gauche ( $X = 0$ ) :  $\theta_0 = -0.5$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0$  ;
- Paroi verticale droite ( $X = 1$ ) :  $\theta_1 = 0.5$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0$  ;
- Paroi latérale ( $Y = 0$ ) :  $\Phi_0 = -0.5$  à travers la section et  $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0$  ailleurs sur la paroi et  $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$  sur toute la paroi ;
- Paroi latérale ( $Y = 1$ ) :  $\Phi_1 = 0.5$  à travers la section et  $\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0$  ailleurs sur la paroi et  $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$  sur toute la paroi ;
- Les parois horizontales :  $\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0$ .

Le nombre de Nusselt local, le nombre de Nusselt moyen sont respectivement définis par :

$$Nu(y, z) = \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=0,1} \quad (7)$$

$$Nu = \iint Nu(y, z) dy dz \quad (8)$$

Ainsi que Le nombre de Sherwood local, le nombre de Sherwood moyen, sont respectivement définis par :

$$Sh(x, z) = \left. \frac{\partial C}{\partial Y} \right|_{y=0,1} \quad (9)$$

$$Sh = \iint Sh(x, z) dx dz \quad (10)$$

La fonction de courant caractérisant la trajectoire du fluide dans un plan donné est liée aux gradients de vitesses. Ainsi dans le plan X=0.5 elle est définie de la manière suivante :

$$W = \partial\psi/\partial y \text{ et } V = - \partial\psi/\partial z \quad (11)$$

### 3. Méthode numérique

Les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de transfert de masse sont discrétisées par la méthode des volumes finis développée par Patankar [9] en utilisant le schéma en loi de puissance (power law). Les équations de conservation de la quantité de mouvement couplées avec l'équation de continuité sont résolues à l'aide de l'algorithme SIMPLEC. Pour la résolution du système algébrique obtenu après discrétisation des équations aux dérivées partielles, la méthode des directions alternées (ADI) a été utilisée.

La convergence des résultats numériques est établie à chaque pas de temps selon le critère suivant:

$$\sum_{i,j,k=1}^{i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}} \frac{|\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n|}{|\varphi_{i,j,k}^n|} \leq 10^{-5}$$

Où  $\varphi$  représente les variables de champ (U, V, W, T, P, C), i, j, et k sont les points du maillage. Les exposants n et n+1 représentent respectivement l'itération actuelle et l'itération précédente.

Le code numérique ainsi établi a préalablement été validé en confrontant ces résultats à ceux de I. Sezai [10] dans le cas la convection naturelle due à la double diffusion dans une cavité. Les différences entre les deux codes ne dépassent pas 1.43% et 1.46% en termes de Nu et Sh.

Une étude détaillée de l'effet du maillage a permis de choisir le maillage 41×41×41 nœuds comme étant le plus convenable pour la présente étude. Le pas de temps optimal a été également fixé à 10<sup>-4</sup> après de multiples tests.

### 4. Résultats et discussions

Les résultats présentés ont été obtenus pour un rapport de flottabilité égal à 1 et un rapport de forme transversal,  $A_y = B / H$  allant de 0.25 à 3.5. Les dimensions des sections sources de concentration  $\varepsilon$ , le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Rayleigh thermique Ra sont respectivement fixés à 0.3, 0.71 et 10<sup>5</sup>.

Nous présentons dans un premier temps, des isothermes, des iso concentrations et des lignes de courant pour ces différents paramètres afin d'illustrer le mouvement du fluide et l'échange de chaleur et de masse dans la cavité.

#### 4.1. Isothermes et lignes de courant et iso concentration:

Dans le but de visualiser l'écoulement et la distribution de masse et de température au sein du domaine d'étude, des lignes de courant, des iso concentrations ainsi que des isothermes en 3D sont représentées respectivement sur les figures 2a, 2b et 2c, pour  $\varepsilon = 0.3$ , Ra= 10<sup>5</sup>, Le=1, N=1 et  $A_y = 1$ .

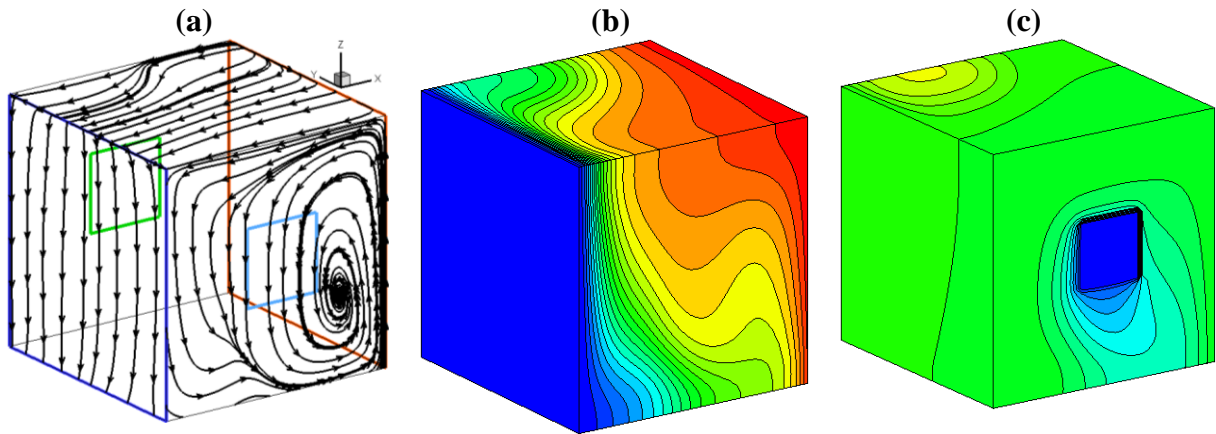


Figure 2 : Lignes de courant (a), isothermes (b) et iso-concentration (c), tridimensionnelle, pour  $Ra=10^5$ ,  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $A_y = 1$ .

La figure 2a montre que l'écoulement consiste en une grande cellule occupant la totalité de la cavité et tournant dans le sens trigonométrique. Le noyau de cette cellule étant localisé au niveau de la partie inférieure de la cavité au voisinage de la paroi verticale chaude. Les iso-concentration représentées par la figure 2c affichent un fort gradient de concentration au niveau de la partie supérieure de la cavité au voisinage de la paroi active. Les isothermes correspondantes (figure 2b) montrent un transfert de chaleur, qui suit le mouvement du fluide, en transportant la chaleur de la paroi verticale droite chaude vers celle gauche froide.

Dans le but de choisir le plan le plus représentatif de l'écoulement et du transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité, nous avons commencé par effectuer de multiples coupes selon X, Y et Z. Une étude des profils obtenus dans chaque cas, nous ont permis de choisir le plan  $X=0.5$ , passant par le milieu de la cavité, comme étant le plus approprié, car il montre de façon claire la structure de l'écoulement du fluide ainsi que le transfert de chaleur et de masse à travers la cavité. Ainsi, la figure 3 représente les lignes de courant (a), les isothermes (b) et les iso-concentration (c) dans le plan  $X=0.5$  pour  $Ra=10^5$ ,  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $A_y=1.5$ , 1 et 0.5.

On peut voir sur ces figures que la structure monocellulaire de l'écoulement se maintient pour tous les rapports de forme considérés, avec une intensification lorsque A diminue. Les isothermes montrent un transfert thermique de la paroi chaude vers la paroi froide, accompagné d'une distorsion plus évidente lorsque  $A_y$  diminue. Des gradients massiques plus importants sont également rencontrés dans ce cas.

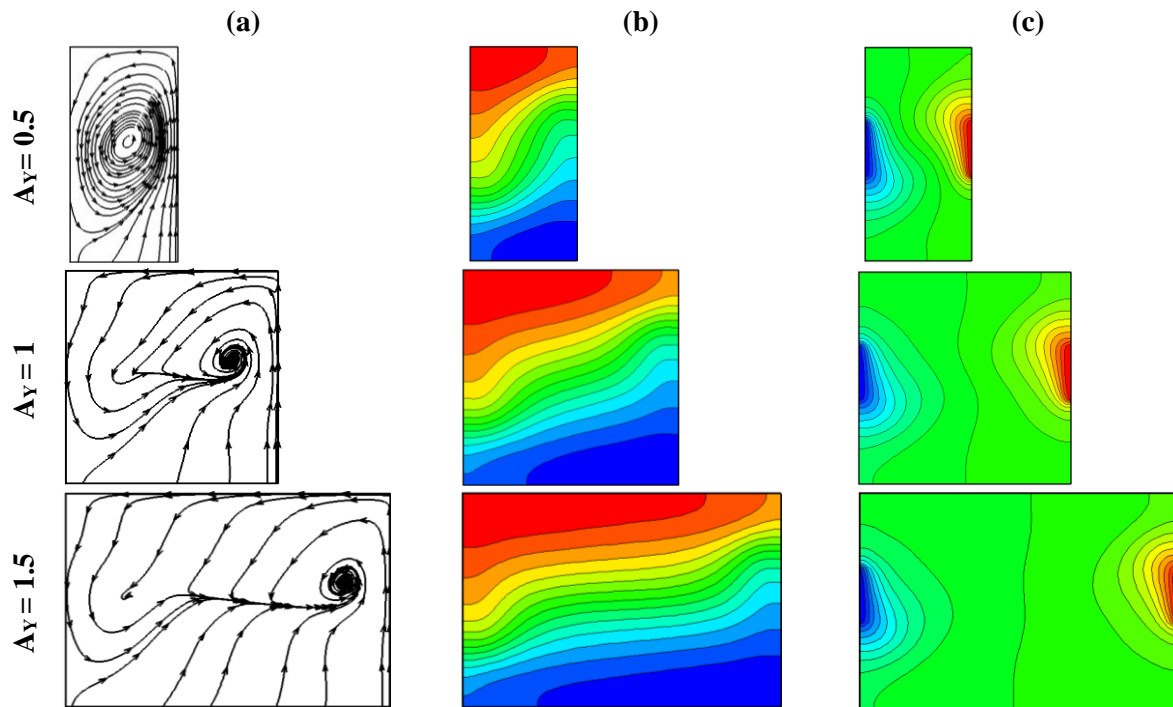


Figure 3 : Lignes de courant (a), isothermes (b) et iso-concentration (c) sur le plan  $X=0.5$ , pour  $Ra=10^5$ ,  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $A_y = 0.25, 1, 1.5$  et  $2.5$ .

#### 4.2 Transfert thermique et massique :

Pour mettre en évidence l'effet du facteur de forme sur le transfert de chaleur et de masse, on a représenté sur la figure 4, les variations du nombre de Nusselt moyen,  $Nu$  et du nombre de Sherwood moyen,  $Sh$  pour  $Ra=10^5$ ,  $Le=1$ ,  $N=1$  et des rapports de formes  $A_y$  variant de 0.25 à 3.5. Les résultats montrent une diminution importante du nombre de Sherwood pour les faibles rapports de forme. Toutefois, le transfert de masse moyen devient presque constant lorsque  $A_y$  augmente au-delà de 1.5. Cette diminution est accompagnée d'une augmentation du transfert thermique traduit par la variation de nombre de Nusselt moyen. De même, le nombre de Nusselt devient presque constant au-delà de la même valeur critique  $A_y = 1.5$ .

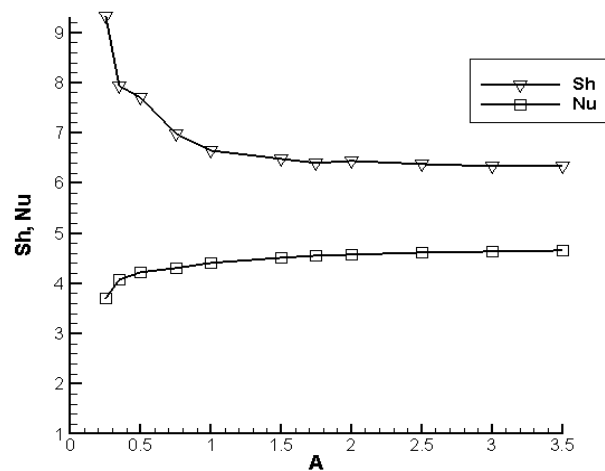


Figure 4 : Sherwood moyen et Nusselt moyen en fonction de rapport de forme  $0.25 < A < 3.5$ , pour  $Ra=10^5$ ,  $N=1$  et  $\varepsilon = 0.3$

## 5. Conclusion

Une étude numérique tridimensionnelle permettant de simuler l'effet du rapport de forme sur la convection thermosolutale au sein d'une cavité tridimensionnelle soumise à des gradients croisés de température et de concentration a été menée et a conduit aux conclusions suivantes:

- L'écoulement consiste en une grande cellule occupant la totalité de la cavité. Les isothermes et les iso-concentration montrent des gradients localisés au voisinage des parois actives.
- Pour un rapport de flottabilité  $N$  fixé à 1, le transfert de masse représenté par la variation de nombre de Sherwood diminue avec le facteur de forme de la cavité  $A$  jusqu'à une valeur de  $A = 1.5$ . Cette diminution s'accompagne d'une augmentation de transfert de chaleur. Au delà de cette valeur,  $Sh$  et  $Nu$  deviennent insensibles au rapport de forme  $A$ .

## Références

- [1] P. Vadsz (Ed.), *Emerging Topics in Heat and Mass Transfer in Porous Media*, Springer, New York, 2008.
- [2] D.A. Nield, A.Bejan, *Convection in Porous Media, third ed.* Springer, New York, 2006.
- [3] A. Ibrahim , D. Lemonnier, *Numerical study of coupled double-diffusive natural convection and radiation in a square cavity filled with N<sub>2</sub>-CO<sub>2</sub> mixture*, International Journal of Heat and Mass Transfer 36 (2009) 197–202.
- [4] Rachid Bennacer, Abdulmajeed A.Mohamed, *Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients*, Int J. Therm Sci 40 (2001), 899-910.
- [5] Shen Chen, Jonas Tolke, Manfred Krafceyk, *Numerical investigation of double-diffusive (natural) convection in vertical annuluses with opposing temperature and concentration gradients*, International Journal of Heat and Fluid Flow 31 (2010) 217-226.
- [6] Zhi-Wu Chen et al , *Double-diffusive a buoyancy convection in a square cuboid with horizontal temperature and concentration gradients*, International Journal of Heat and Mass Transfer 60 (2013) 422–431.
- [7] A.Khadiri, R. Bennacer, M. Hasnaoui, A.Amahmida, *Tow-and three-dimensional multiple steady states in a porous cavity heated and salted from below*, International Journal of Thermal Sciences 50 (2011) 918-929.
- [8] A. Abidi, L. Kolsi, M.N. Borjini, H. Ben Aissia, M.J. Safi, *Effect of heat and mass transfer through diffusive walls on three-dimensional double-diffusive natural convection*, Numerical Heat Transfer 53 (2008) 1357–1376.
- [9] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [10] I. Sezai, A.A. Mohamed, *Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients*, Physics of Fluids 12 (2000) 2210–2223.